Digitized by Google

Digitized by Google

# LE GUIDE
## DES JEUNES
# MATHÉMATICIENS,
## *OU ABREGÉ*
# DES MATHÉMATIQUES,
*A LA PORTÉE DES COMMENÇANS.*

Traduit de l'Anglois de JEAN WARD,

*PAR le R. P. PEZENAS de la Compagnie de Jesus, Professeur Royal d'Hydrographie à Marseille.*

21.113
51
P49

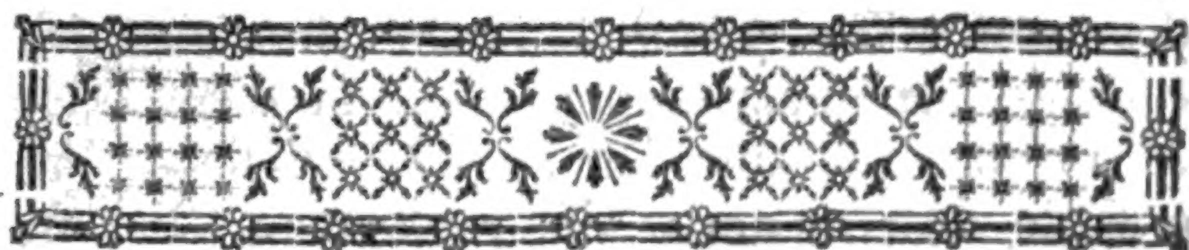
A PARIS,
Chez CH. AN. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Corps Royal de l'Artillerie & du Génie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LVI.

*AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.*

BIBLIOTECA

Digitized by Google



# PRÉFACE
## DE L'AUTEUR.

IL n'eſt pas néceſſaire (& il ſeroit preſque infini) de s'étendre ſur tous les uſages & avantages des Mathématiques en général : ainſi je ne dirai qu'un mot de l'*Arithmétique* & la *Géométrie*, qui ſont le fondement de toutes les autres parties des Mathématiques.

Quant à l'utilité de l'*Arithmétique*, il eſt certain qu'on ne ſçauroit, ſans le ſecours des nombres, entreprendre aucune affaire, aucun commerce, ni réuſſir dans aucun emploi.

A l'égard de l'utilité de la *Géométrie*, il eſt évident qu'on ne peut ni inventer ni perfectionner aucune machine ou inſtrument dans les Arts & métiers ſans le ſecours de ſes principes, quoique peut-être les Artiſtes ou Ouvriers ſoient peu verſés dans la Géométrie.

Mais pour les avantages qui réſultent de ces deux grandes ſciences, lorſqu'elles ſont jointes enſemble, & qu'elles ſe ſoutiennent mutuellement, & lorſqu'on les applique à la pratique, on s'en appercevra aiſément, ſi l'on fait attention aux grands avantages que les hommes retirent de la navigation, du plan & de la diviſion

des terres, ſans parler de l'uſage des horloges, cadrans, pendules, montres, &c. Tous ces Arts, & un grand nombre d'autres (dont il ſeroit impoſſible de faire ici le dénombrement) dépendent entiérement de ces deux ſciences.

Il n'eſt donc pas ſurprenant que dans tous les ſiecles un ſi grand nombre de Sçavans ſe ſoient appliqués à écrire ſur les Mathématiques; mais ils ont pour la plûpart ſuppoſé que leurs Lecteurs avoient déja fait quelque progrès dans cette ſcience avant que de lire leurs Livres, qui ſont ordinairement de grands volumes, écrits en des termes ſi abſtraits, que les jeunes Commençans en ſont ordinairement effrayés du premier abord.

Ces conſidérations m'ont fourni l'idée (il y a pluſieurs années) de compoſer une introduction aux Mathématiques, qui fût aſſez claire & aſſez familiere pour encourager ceux qui auroient envie d'employer quelque tems à cette étude, & pour les porter à s'y attacher avec plaiſir, quand même ils n'auroient aucune connoiſſance de ſes premiers élémens; c'eſt pour cela que je commence par les premiers principes, c'eſt-à-dire par l'unité en Arithmétique, & par le point en Géométrie. Après avoir jetté ces premiers fondemens, je m'avance comme par degrés, & je conduis pas à pas le jeune Lecteur avec toute la clarté poſſible, &c.

C'eſt pour cette raiſon que je donnai à ce Traité (l'an 1707) le titre qu'il porte (*Guide des jeunes Mathématiciens*). Il a ſi bien rempli ſon titre, que je crois pouvoir dire (ſans vanité) qu'il a

servi de guide à près de cinq mille personnes, dont la plûpart, peut-être, n'auroient jamais jetté les yeux sur les Mathématiques : il a même été reçu favorablement des Sçavans, & tellement approuvé des Universités, en Angleterre, en Ecosse & en Irlande, qu'on a ordonné qu'il fût lu & expliqué publiquement dans leurs Ecoles.

Voici un extrait fort court des différens Traités que ce Livre renferme.

I. L'Arithmétique ordinaire & décimale, avec toutes les regles utiles, & une méthode générale pour extraire les racines de toutes les puissances.

II. L'Algebre ou l'Arithmétique en lettres, où l'on facilite la méthode de former & de résoudre les Equations, & où cette méthode est éclaircie par une grande variété d'exemples & de questions numériques. On y donne aussi tout le calcul des intérêts, annuités, &c.

III. Les Elémens de Géométrie, abrégés & démontrés par analyse, avec une méthode nouvelle & aisée pour trouver par une seule équation la circonférence & l'aire du cercle, avec toute l'exactitude que l'on voudra déterminer : on y donne aussi une nouvelle maniere de calculer les sinus & les tangentes.

IV. Les Sections coniques, où l'on démontre clairement les principales propriétés, &c. de l'Ellipse, de la Parabole, & de l'Hyperbole.

V. L'Arithmétique des infinis, développée & rendue aisée, avec son application à la Géométrie des surfaces & des solides.

Et un Appendix ſur la pratique du Jaugeage.

Je crois qu'il eſt inutile d'en dire davantage: le Livre parlera de lui-même; & ſi les Lecteurs n'en ſont pas ſatisfaits, tout ce que je pourrois dire ici ne le rendroit pas meilleur. Ce qui eſt certain, c'eſt qu'en le liſant on trouvera plus que le titre ne promet, & peut-être plus qu'on n'eſpéroit d'y trouver. Le ſtyle en eſt clair & ſimple, mon but étant uniquement d'inſtruire, & non pas d'amuſer ou d'étonner les jeunes Lecteurs par des termes obſcurs & ſcientifiques. J'aurai toujours la ſatisfaction de n'avoir recherché que ce qui eſt utile, & d'avoir écarté tout ce qui peut obſcurcir cette ſorte de connoiſſance.

Quoique je ſois aſſuré qu'on ne trouvera dans ce Traité aucune erreur fondamentale, je ne prétends pas néanmoins qu'il ſoit exempt de défauts & d'imperfections (*humanum eſt errare*). Je me flatte que le Lecteur les excuſera en faveur du déſir que j'ai eu de lui être utile en le compoſant.

# TABLE
## DES PARTIES ET CHAPITRES.

## PREMIERE PARTIE.
### Arithmétique.

*Connoissances préliminaires sur le but des Mathématiques, &c.* Page 1

CHAP. I. *Sur les différentes parties de l'Arithmétique, avec la définition des caracteres dont on se sert dans ce Traité.* 3

CHAP. II. *Des principales Regles d'Arithmétique en nombres entiers.* 6

CHAP. III. *De l'Addition & Soustraction des nombres de différentes dénominations, & de la réduction d'une dénomination à une autre.* 35

CHAP. IV. *Des Fractions ordinaires.* 47

CHAP. V. *Des Fractions décimales.* 59

CHAP. VI. *Des proportions continues, & des combinaisons.* 79

CH. VII. *De la Proportion non continue, ou Regle d'Or.* 93

CHAP. VIII. *Des Regles de Compagnie, de Troc, de Change, &c.* 109

CHAP. IX. *De l'Alliage.* 120

CHAP. X. *Des Métaux, & de leurs pesanteurs spécifiques.* 129

CHAP. XI. *Évolution ou extraction des racines de toutes les puissances, par une méthode générale.* 136

## SECONDE PARTIE.
### Algebre.

CHAP. I. *De la maniere de noter les quantités, & de tracer leurs pas, &c.* 164

CHAP. II. *Des six principales Regles de l'Arithmétique algébrique sur les quantités entieres.* 168

CHAP. III. *Des Fractions algébriques, ou quantités rompues.* 189

CHAP. IV. *Des quantités sourdes.* 199

CHAP. V. *Sur la nature des Équations, & la maniere de les préparer pour la solution.* 205

CHAP. VI. *Des quantités proportionnelles, tant arithmétiques que géométriques, & harmoniques.* 215

CHAP. VII. *De la proportion qui n'est pas continue, & comment on change les équations en analogies, &c.* 222

CHAP. VIII. *De la substitution & de la solution des Équations quadratiques.* 227

CHAP. IX. *De l'analyse ou de la méthode de résoudre les Problêmes, éclaircie par une grande variété d'exemples de questions numériques.* 236

CHAP. X. *Solution des Équations affectées en nombres.* 272

CHAP. XI. *De l'intérêt simple, des annuités ou pensions, &c.* 286

CHAP. XII. *De l'intérêt composé & annuité, &c.* 296

## TROISIEME PARTIE.

### Géométrie.

CHAP. I. *Des définitions géométriques, &c.* 337

CHAP. II. *Premiers Rudimens ou Problêmes préparatoires pour la Géométrie plane.* 347

CHAP. III. *Démonstrations des Théorêmes les plus utiles dans la Géométrie plane.* 355

CHAP. IV. *Solution de plusieurs Problêmes faciles dans la Géométrie plane, où les Commençans pourront (en partie) comprendre l'application ou l'usage des Théorêmes précédens.* 375

CH. V. *Problêmes, pratiques, ou regles pour trouver les capacités superficielles ou les aires des figures rectilignes.* 396

CHAP. VI. *Méthode nouvelle & aisée pour trouver la circonférence du cercle & son aire, dans toute l'exactitude*

*( ou nombre de figures ) qui sera requise ; avec une méthode nouvelle & facile de calculer les sinus naturels & les tangentes.* 406

# QUATRIEME PARTIE.

## Sections coniques.

CHAP. I. *Définitions du Cône & de ses Sections.* 421
CHAP. II. *Des principales propriétés de l'Ellipse.* 429
CHAP. III. *Des principales propriétés de la Parabole.* 445
CHAP. IV. *Des principales propriétés de l'Hyperbole.* 453

# CINQUIEME PARTIE.

Arithmétique des infinis. 466

*Appendix sur la pratique du Jaugeage.* 508
*Addition du Traducteur.* 541

Fin de la Table.

## *Approbation du Censeur Royal.*

J'AI lu, par ordre de Monseigneur le Chancelier, un manuscrit intitulé *Le Guide des jeunes Mathématiciens, &c.* j'ai cru que l'impression en seroit utile. Fait à Paris ce 7 Juillet 1748.

MONTCARVILLE.

## *PRIVILEGE DU ROI.*

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Imprimeur à Paris, nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public des Ouvrages qui ont pour titre : *Le Guide des jeunes Mathématiciens, traduit de l'Anglois*, par le R. P. Pezenas, Jésuite. *Nouveau Traité du Microscope, mis à la portée de tout le monde, traduit de l'Anglois. Traité des Fluxions & Traité d'Algebre*, par Colin Maclaurin. *Nouveau Tarif de la Menuiserie, avec les détails & les prix de tous les ouvrages de Menuiserie. La Méchanique du Feu, ou Traité de la Construction des nouvelles Cheminées*, par M. Gauger. *Principes de Physique rapportés à la Médecine, & Traité des Métaux & des Minéraux*, par M. Chambon, Médecin du Roi. *Nouvelle explication du Flux & Reflux de la Mer, suivant un nouveau systême de Cosmographie & de Physique générale. Traité de Perspective à l'usage des Artistes, démontré géométriquement*, par M. Jeaurat. *Traité Analytique des Sections Coniques, Fluxions & Fluentes*, par M. Muller. *L'Ingénieur de Campagne, ou Traité de la Fortification*, par M. le Chevalier de Clairac. *Petit Dictionnaire Universel, abrégé & mis à la portée des personnes qui n'ont point d'étude*, par Thomas Dyche, *traduit de l'Anglois. L'Historien Chronologique, ou l'Histoire d'Angleterre, depuis son origine jusqu'à présent, traduit de l'Anglois de M. Salmon* ; s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES,

voulant favorablement traiter l'Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces présentes, de faire imprimer lesdits Ouvrages, autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de neuf années consécutives, à compter du jour de la date des présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, où de ceux qui auront droit de lui ; à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression de ces Livres sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-scel des présentes ; que l'impétrant se conformera en tout aux réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; & qu'avant de les exposer en vente, les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos ordres ; le tout à peine de nullité desdites Présentes : du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant ou ses ayant cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, Charte normande, & Lettres à ce

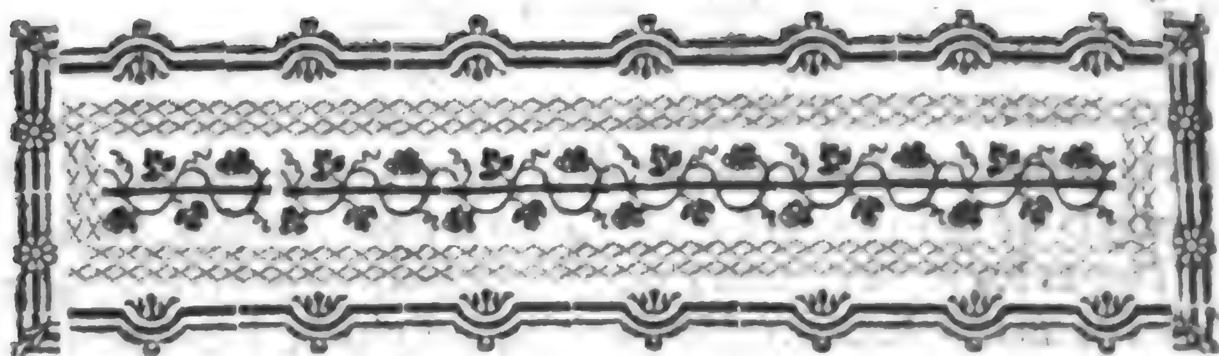
contraires ; car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le quatorzieme jour du mois d'Avril, l'an de grace mil sept cent quarante-neuf, & de notre regne le trente-quatrieme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

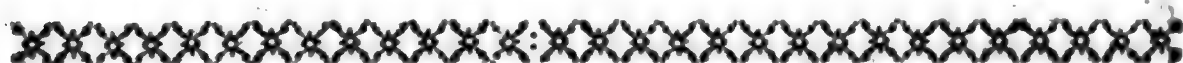
*Registré sur le Registre XII de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 160, fol. 160, conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris, le 16 Mai 1749.*

Signé, G. CAVELIER, Syndic.

LE GUIDE



# LE GUIDE DES JEUNES MATHEMATICIENS.



## PREMIERE PARTIE.

### PRELIMINAIRES.

LE but des Mathématiques eſt uniquement de chercher & de déterminer la vraie quantité de la matiere, de l'eſpace, ou du mouvement.

On appelle ici *quantité de la matiere*, la grandeur ou le volume de tout ce qui eſt viſible, dont on peut meſurer ou eſtimer la longueur, la largeur, & l'épaiſſeur.

On appelle *quantité de l'eſpace*, la diſtance d'une choſe à l'autre.

Et *quantité de mouvement*, la vîteſſe d'un corps qui ſe meut d'un lieu à un autre.

La conſidération de ces quantités, ſelon qu'on peut les propoſer, eſt l'objet des Mathématiques, & ſur-tout celle de la *matiere*.

On peut conſiderer la *matiere* par rapport à ſa *quantité*, ſa *forme*, & ſa *poſition naturelle*, *accidentelle*, ou *déterminée*, ce qui eſt ſuſceptible d'une infinité de variétés;

mais toutes ses variétés connues jusqu'à présent, ou même toutes celles qu'on peut imaginer, sont comprises sous ces deux idées, la *grandeur* & le *nombre*, qui sont les deux objets de la *Géométrie*, de l'*Arithmétique*, & de l'*Algébre*. Toutes les autres parties des Mathématiques ne sont que les branches de ces trois sciences, ou plutôt leur application aux cas particuliers.

La *Géométrie* est une *science* dans laquelle on cherche & l'on vient à connoître la *grandeur* entiere, ou quelque partie d'une *quantité* proposée, en la comparant avec une autre quantité connue de la même espece, laquelle sera toujours l'une de ces trois; sçavoir, la *ligne* (ou la seule *longueur*), la *surface*, c'est-à-dire la *longueur* & la *largeur*, & le *solide* (qui a *longueur*, *largeur* & *profondeur*, ou *épaisseur*) la nature n'admettant que ces trois dimensions.

L'*Arithmétique* est une science par laquelle nous venons à connoître quel *nombre* de *quantités* d'une espece, tant réelles qu'imaginaires, est contenu dans une autre quantité de la même espece. Cette connoissance est bien différente de celle de la *Géométrie*, qui n'a pour but que de répondre exactement aux questions que l'on peut faire sur la longueur, largeur, profondeur, &c.; mais lorsqu'on veut connoître un *nombre* de *quantités*, ou combien de fois une *quantité* est renfermée dans une autre, on a recours à l'Arithmétique, qui a pour but de répondre aux questions sur le *nombre* & la *multitude* des *quantités*. En un mot, la *quantité* est l'objet de la *Géométrie*, uniquement par rapport à sa *grandeur*, & les *quantités* sont l'objet de l'*Arithmétique*, uniquement par rapport à *leur nombre*.

L'*Algébre* est une science qui résout & démontre les problêmes les plus abstraits ou les plus difficiles, tant en *Arithmétique* qu'en *Géométrie*, c'est-à-dire qu'elle s'étend également sur l'une & sur l'autre; c'est pour cela qu'on lui donne indifféremment le nom de l'une ou de l'autre. *Harriot*, *Viete*, & *Wallis* la nomment *Arithmétique spécieuse*, & souvent on la nomme *Géométrie moderne* : c'est sur-tout le nom que lui donne le grand Mathématicien

M. Edmond Halley, dans les Transactions philosophiques, *nomb.* 205.

» L'excellence, dit-il, de la *Géométrie moderne*, se fait » sentir avec évidence dans les solutions pleines & par- » faites qu'elle nous donne des *problêmes*. Elle représente » d'un seul coup tous les cas possibles, & souvent dans un » seul théorême général elle renferme des *sciences* entie- » res, qui étant réduites en propositions, & démontrées ,, à la maniere des Anciens, produiroient de très-longs ,, Traités; car un théorême qui résout le problême le plus ,, compliqué, s'étend par réduction à tous les cas subor- ,, donnés.

Il nous en donne ensuite un exemple bien remarquable dans la théorie de la Dioptrique, pour trouver généralement le foyer de tous les verres de lunettes.

Telle est l'idée générale & abrégée de ces trois grandes sciences, l'*Arithmétique*, la *Géométrie*, & l'*Algébre*. Je vais entrer dans un plus grand détail, & commencer par l'*Arithmétique*, qui est la *base* ou le *fondement* de tous les Arts, tant *Mathématiques* que *Méchaniques*, & qu'il faut par conséquent bien entendre avant toutes choses.

---

# CHAPITRE PREMIER.

## *Sur les différentes parties de l'Arithmétique, avec la définition des caracteres dont on se servira dans ce Traité.*

L'*Arithmétique* ou la *science des nombres* se divise en trois parties, dont les deux premieres se nomment proprement *naturelles*, & la troisiéme *artificielle*.

La premiere étant la plus simple & la plus aisée, se nomme communément *Arithmétique ordinaire en nombres entiers*, parce qu'elle ne considere que les *unités* ou *entiers* qui représentent des *quantités* entieres d'une espece proposée.

La seconde est celle qui suppose que l'unité (& par

conséquent la quantité que l'unité représente) est comme *rompue* ou *divisée* en *parties* égales (en nombre pair ou impair), & qui ne les considere que comme de simples parties, moindres chacune que l'unité, ou même comme des parties mêlées avec les entiers; & c'est ce que l'on appelle la *théorie des fractions ordinaires.*

La troisiéme, ou la *partie artificielle*, se nomme *Arithmétique décimale*: c'est un art qu'on a trouvé pour traiter les fractions ou nombre rompus d'une maniere beaucoup plus commode & aisée que celle dont on se sert pour les fractions ordinaires, car toutes les différentes opérations que l'on fait sur les nombres décimaux, différent fort peu de celles qui sont en usage pour les nombres entiers; aussi cette méthode est-elle aujourd'hui généralement pratiquée, sur-tout dans les *calculs géométriques.*

L'*Arithmétique* (dans toutes ses parties) dépend de l'arrangement des dix caracteres arabes, ou figures numériques, qui sont

*un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*, *zero*.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

On dit que l'usage de ces caracteres fut introduit en Angleterre, il y a environ six cens ans, ou vers l'an 1130. Voyez l'Algebre du Dr. *Wallis*, page 12.

Le premier de ces *caracteres* se nomme *unité*, & représente une quantité d'une espece quelconque, comme un *monde*, un *astre*, un *homme*, &c. L'unité est le commencement de tous les *nombres*, c'est-à-dire que le nombre est une *multitude d'unités*; car un & un font deux, un & un, & encore un, font trois, &c. ce qui est le premier *axiome* de l'Arithmétique.

Le dernier caractere se nomme zero, & ne signifie rien par lui-même; mais étant joint aux autres figures, il leur donne différentes valeurs, comme on le verra bientôt.

Pour donner un ordre convenable à ces *figures numériques*, selon les différentes variétés qui se trouvent dans les calculs, il est bon que les commençans apprennent la

signification des *signes* ou *caracteres algébriques suivans*. Ils nous seront d'un grand usage pour exprimer toutes nos régles plus briévement & plus clairement, & ils nous épargneront beaucoup de paroles & de discours inutiles.

---

### *SIGNIFICATIONS DES SIGNES.*

+ signifie *plus*, c'est le signe de l'*Addition*; comme 8 + 7 signifie 8 plus 7, ou que les nombres 8 & 7 doivent être ajoutés ensemble. On doit entendre la même chose lorsque plusieurs *nombres* sont liés ensemble par le signe +, comme 34 + 22 + 9 + 45, &c. signifie que tous ces nombres doivent être ajoutés ensemble.

— signifie *moins*, c'est le signe de la *Soustraction*; comme 9 — 6 signifie 9 moins 6, & qu'il faut soustraire 6 de 9 pour avoir la différence de ces deux nombres.

× signifie *multiplié par*, c'est le signe de la *Multiplication*; comme 9 × 6 signifie 9 multiplié par 6.

÷ signifie *divisé par*, c'est dans plusieurs Livres le signe de la *Division*, comme 8 ÷ 2 signifie 8 divisé par 2. On se sert aussi de 2 ) 8, ou $\frac{8}{2}$, ou 8 : 2, tout cela signifie également 8 divisé par 2.

= signifie *égal*, c'est le signe d'*égalité* ou d'*équation*, c'est-à-dire que si ce signe = est placé entre des nombres, ou *des quantités*, il apprend qu'elles sont égales, comme 9 = 9, ou 9 + 6 = 15, ou 9 — 6 = 3, &c. c'est-à-dire 9 est égal à 9, ou 9 plus 6 est égal à 15, ou 9 moins 6 est égal à 3, &c.

:: signifie *ainsi est*, c'est le signe de la *proportion*, ou de ce que l'on appelle communément *Régle d'Or* ou *Régle de Trois*, & :: est toujours placé dans la proportion entre les deux *termes*, ou nombres du milieu : par exemple, 2 : 8 :: 6 : 24, signifie comme 2 est à 8, ainsi 6 est à 24.

Ces signes étant bien compris, abrégeront beaucoup ce Traité.

# CHAPITRE II.

## *Des principales Régles d'Arithmétique en nombres entiers.*

LES régles d'Arithmétique sont en grand nombre ; on les varie selon l'occasion, mais elles sont toutes renfermées sous les six especes suivantes ; la *Numération*, ou *notation*, l'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication*, la *Division*, & l'*Evolution* ou *extraction des racines.*

## SECTION PREMIERE.

### *De la Numération ou Notation.*

LA *numération* apprend à lire ou exprimer la vraie valeur de chaque nombre, ou à l'écrire selon sa vraie valeur lorsqu'on le nomme : elle a deux parties ; 1°. placer les figures selon leur ordre ; 2°. trouver la vraie valeur de chaque figure dans la place où elle est. Ces deux parties sont clairement représentées dans la Table suivante.

| Centaines de mille millions. | Dixaines de mille millions. | Mille millions. | Centaines de millions. | Dixaines de millions. | Millions. | Centaines de mille. | Dixaines de mille. | Mille. | Centaines. | Dixaines. | Nombres ou unités, { *& c'est la 1re place en comptant.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8, | 9 | 8 | 7, | 6 | 5 | 4, | 3 | 2 | 1 |
| *Periode de mille millions.* | | | *Periode de millions.* | | | *Periode de milles.* | | | *Periode d'unités.* | | |

On voit par cette *Table* de numération, que l'ordre des places se prend de la droite à la gauche; la premiere place de chaque nombre étant toujours celle qui est à la main droite, la figure qui s'y trouve ne signifie que sa propre valeur, c'est-à-dire autant d'unités qu'elle en représente.

La seconde place est celle des *dixaines*, & chaque figure dans cette place représente autant de dixaines que la figure représente d'unités. La troisiéme est celle des *centaines*: la quatriéme des *milles*, *&c.* c'est-à-dire que chaque place à main gauche a dix fois autant de valeurs que la suivante à main droite.

Par exemple, s'il faut lire ou prononcer 759, selon la vraie valeur de chaque figure, telles qu'elles sont placées, la premiere figure de cette somme est 9, parce qu'elle occupe la place des *unités*, & par conséquent elle ne signifie que sa simple valeur, c'est-à-dire 9 *unités* ou neuf. La seconde figure 5 est dans la place des *dixaines*, & par conséquent elle signifie cinq *dixaines* ou cinquante. La figure 7 est dans la troisiéme place, qui est celle des *centaines*, & ainsi elle signifie sept cens, & l'on doit lire ou prononcer toute la somme en cette maniere: *sept cens cinquante-neuf.*

Remarque. Quoique la figure 7 soit dans la troisiéme place, selon l'ordre de la *numération*, on commence à lire & à prononcer toute la somme par cette figure, comme on commence dans les mots par les lettres qui sont à main gauche. Ainsi quelque grand que soit le nombre des figures rangées, sans point ni virgule, on commence toujours par la figure qui est à main gauche pour lire toute la somme.

Par exemple, 763566 n'est qu'une *somme* entiere, ou un seul nombre composé de six figures, & on le lit ainsi: sept cens soixante-trois mille cinq cens soixante-six.

On doit garder la même régle pour lire une *somme*, ou une suite de *nombres*, composée de *sept*, *huit*, *neuf* ou plusieurs *figures*, en donnant à chaque figure la valeur

qui lui convient, selon qu'elle est éloignée de l'unité, comme dans la Table précédente.

Ces valeurs peuvent venir des zero aussi-bien que des autres figures : par exemple, 6 tout seul ne représente que six unités; mais si l'on joint à 6 un zero à main droite, on aura 60, & 6 devient alors soixante unités, parce qu'il est dans la place des dixaines; si l'on y joint un autre zero, on aura 600, ou six cens unités, &c.

Ainsi quoique le zero par lui-même ne signifie rien, comme on l'a dit ci-devant, cependant si on le place à main droite d'une figure, il augmente la valeur de cette figure.

Encore un exemple, si l'on veut, de la numération, qui sera celui de la Table, 678987654321, & qui doit se prononcer ainsi :

*Six cens soixante & dix-huit mille millions*,
*Neuf cens quatre-vingt-sept millions*,
*Six cens cinquante-quatre mille*,
*Trois cens vingt-une unités*, d'une *espece* ou *quantité* proposée quelconque.

Et l'on doit encore ici observer que chaque troisiéme figure, depuis la place des unités, porte le nom de centaines; ce qui fait voir que si l'on partage une grande somme, ou plutôt si on la distingue en périodes, de trois figures pour chaque *période*, comme dans la Table précédente, on pourra s'en servir avec avantage pour faciliter aux commençans l'évaluation & la numération de cette somme.

---

## SECTION II.

### *DE L'ADDITION.*

L'*Addition* est une *régle* par laquelle plusieurs nombres sont ramassés & joints ensemble, de maniere à faire connoître leur *somme totale*.

Dans cette régle on doit bien obſerver deux choſes, ſi l'on veut la pratiquer aiſément. 1°. La premiere eſt de bien placer les nombres, enſorte que chaque figure ſoit placée directement ſous les figures de même valeur, les *unités* ſous les *unités*, les *dixaines* ſous les *dixaines*, & les *centaines* ſous les *centaines*, &c.

On tire toujours une ligne ſous le rang le plus bas pour ſéparer les nombres donnés de leur *ſomme* lorſqu'on l'a trouvée.

*Exemple.* Si l'on a donné les nombres 54327 & 2651, pour les ajouter enſemble, on doit les placer ainſi :

$$\begin{array}{r} 54327 \\ 2651 \\ \hline \end{array}$$

2°. La ſeconde choſe qu'il faut obſerver, c'eſt de bien ramaſſer ou ajouter enſemble chaque rang de figures de même valeur, & placées les unes ſous les autres. Or cela ſe fait ainſi.

REGLE.

*Commencez toujours votre* Addition *par les* unités, *&* *ajoutez enſemble toutes les* figures *qui ſont dans ce rang. Si leur* ſomme *eſt moindre que* dix, *vous l'écrirez au deſſous de la ligne en ſon rang; mais ſi leur ſomme ſurpaſſe* dix, *vous n'écrirez que le ſurplus ou la figure qui eſt au deſſus de* dix, *ou des* dixaines, *& vous porterez au rang des* dixaines *le nombre de celles qui ſurpaſſent les* unités; *vous les ajouterez avec toutes les figures qui ſont dans le rang des* dixaines, *de la même maniere que vous avez ajouté les* unités, *& vous obſerverez la même régle pour les* centaines, mille, &c.

La *ſomme* qui viendra de ces *additions* ſera la *ſomme totale*.

*EXEMPLE I.*

Il faut trouver la ſomme des deux *nombres* précédens;

ſçavoir $\left\{ \begin{array}{r} 54327 \\ 2651 \\ \hline 56978 \end{array} \right.$, *ſomme* requiſe.

En commençant par les *unités*, je dis, 1 & 7 font 8; qui eft moindre que 10; j'écris donc 8, felon la régle, dans fon rang fous les *unités*; & venant aux *dixaines*, je dis, 5 & 2 font 7, qui étant moindre que 10, j'écris 7 fous les *dixaines*; je paffe aux *centaines*, & enfuite aux *mille* de la même maniere, écrivant chaque fomme en fon rang : enfin parce qu'il n'y a point de *figure* dans le nombre inférieur que l'on puiffe ajouter à la *figure* 5, qui eft dans le rang des *dixaines de mille* dans le nombre fupérieur, j'écris 5 au deffous de la ligne en fon rang, & je trouve que $54327 + 2651 = 56978$, vraie *fomme* requife.

*EXEMPLE II.*

Il faut trouver la *fomme* de ces *nombres*, $3578 + 496 + 742 + 184 + 95$. Les ayant placés, comme on voit ici à côté, je commence par les *unités*, & je dis, 5 & 4 font 9, & 2 font 11, & 6 font 17, & 8 font 25; j'écris 5 fous les *unités*, & je porte 20 ou deux *dixaines* au rang des *dixaines*, & dans ce rang ces 20 ne font que 2. Je dis donc, 2 & 9 font 11, & 8 font 19, & 4 font 23, & 9 font 32, & 7 font 39; j'écris 9 fous les *dixaines*, & je porte 30 ou trois *dixaines*, qui font 300, au rang des *centaines*, où ces 30 ne font que 3 : je dis donc, 3 que j'ai gardé & un font 4, & 7 font 11, & 4 font 15, & 5 font 20; & comme il n'y a ici aucune figure au deffus des *dixaines*, j'écris zero fous les *centaines*, & je porte deux *dixaines* ( ou plutôt 2000 ) au rang des *mille*, difant, comme auparavant, 2 que j'ai gardé & 3 font 5; j'écris 5 fous les mille, parce qu'il n'y a plus de figure à ajouter; ainfi la fomme totale eft $5095 = 3578 + 496 + 742 + 184 + 95$.

$$\begin{array}{r} 3578 \\ 496 \\ 742 \\ 184 \\ 95 \\ \hline 5095 \end{array}$$

Si l'on fait bien attention à cet exemple, on y trouvera la démonftration de la méthode ordinaire pour l'*addition* des *nombres* entiers : mais pour la rendre plus fenfible, je vais faire la même addition d'une autre maniere.

Ajoutez ensemble les *figures* de chaque rang, sans faire attention à celui qui suit, & écrivez au dessous chaque somme.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 8 |
| | 4 | 6 | 6 |
| | 7 | 4 | 2 |
| | 1 | 8 | 4 |
| | | 9 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| La *somme* du rang des *unités* est . . . . . . | | | 2 | 5 |
| Celle du rang des *dixaines* est . . . . . . . | | 3 | 7 | 0 |
| Celle du rang des *centaines* est . . . . . . . | 1 | 7 | 0 | 0 |
| Les trois *mille* placés dans leur rang sont . . | 3 | 0 | 0 | 0 |
| La *somme totale* monte comme auparavant à . | 5 | 0 | 9 | 5 |

On voit par là d'où vient qu'on porte les *dixaines* au rang suivant, & pourquoi les zero n'augmentent pas la somme.

La démonstration la plus naturelle de cette régle est appuyée sur ce principe, *que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble*, c'est-à-dire que les *nombres* que l'on veut ajouter doivent être regardés comme les parties, & la *somme totale* comme le *tout*, composé de toutes ces parties.

De là suit la maniere d'éprouver si une addition a été bien faite. Il faut séparer les *nombres* donnés en deux, ou en plusieurs parties, selon leur multitude, & après avoir ajouté ceux qui se trouvent dans chaque partie, on fera une somme totale de toutes ces sommes particulieres; cette derniere somme sera égale à la premiere qu'on avoit trouvée, si l'addition a été bien faite : si elle ne lui est pas égale, on découvrira bientôt l'erreur.

*Exemple.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ajoutez | 5647<br>3289<br>4016 | La somme des nombres de cette partie est | 12952. |
| | 2900<br>5007<br>1606 | La somme de celle-ci est | 9513. |
| *La somme totale de tous ces nombres,* | 22465 | La somme des deux précédentes est | 22465. |

## SECTION III.

### DE LA SOUSTRACTION.

La *Soustraction* est une régle par laquelle on déduit ou retranche un nombre d'un autre, pour connoître le *reste*, la *difference*, ou l'*excès*.

Ainsi ôtant 6 de 9, il reste 3. Ce nombre 3 est la *difference* entre 6 & 9, ou l'*excès* de 9 sur 6.

Par conséquent le *nombre*, ou la *somme*, d'où il faut soustraire un autre nombre, doit être plus grand, ou au moins égal à l'autre.

La régle de la *Soustraction* est directement contraire à l'*Addition*, on doit y avoir la même précaution de placer les *figures* exactement sous celles de même valeur, les *unités* sous les *unités*, les *dixaines* sous les *dixaines*, les *centaines* sous les *centaines*, *&c.* On doit aussi, comme dans l'Addition, tirer une ligne qui sépare les nombres donnés de leur différence.

Ayant placé le plus petit nombre sous le plus grand, on gardera la régle suivante.

### REGLE.

*Commencez, comme dans l'*Addition*, par la* figure *à main droite au rang des* unités*, & ôtez la* figure inférieure*, qui est dans ce rang, de la* figure *supérieure pour écrire au dessous le* reste *ou la* différence. *Si les deux* figures *se trouvent égales, écrivez au dessous un* zero ; *mais si la* figure *supérieure est plus petite que l'inférieure, vous ajouterez* 10 *à cette* figure*, & de cette* somme *vous ôterez la* figure *inférieure, écrivant au dessous le* reste*, comme auparavant ; mais parce que ces* 10 *ainsi ajoutés, ont été supposés empruntés du rang supérieur voisin, c'est-à-dire des* dixaines*, il faut nommer la* figure *supérieure d'où vous avez emprunté* 10*, un de*

*moins qu'elle ne vaut réellement ; ou, ce qui revient au même, il faut ajouter un à la* figure *inférieure dans le même rang des* dixaines, *& continuer ainsi la Soustraction des* dixaines, *& ensuite des* centaines, *jusqu'à la fin.*

## EXEMPLE I^er^.

Si l'on veut trouver la *différence* entre 6785 & 4572 ; c'est-à-dire *soustraire* 4572 de 6785 ; ayant placé ces nombres, comme l'on voit ici, & comme dans l'Addition.

| |
|---|
| 6785 |
| 4572 |
| 2213 |

Je commence par les *unités*, & ôtant 2 de 5, il *reste* 3, qu'il faut écrire au dessous ; ensuite venant aux *dixaines*, j'ôte 7 de 8, & il *reste* 1, que j'écris sous les *dixaines* : je viens aux *centaines*, & ôtant 5 de 7, il *reste* 2, que j'écris sous les *centaines* : enfin, ôtant 4 de 6, il *reste* 2 sous les mille, & l'opération étant achevée, la différence se trouve 2213 $= 6785 - 4572$.

## EXEMPLE II.

| |
|---|
| 7496 |
| 5849 |
| 1647 |

On demande la *différence* entre 5849 & 7496. Ayant placé ces *nombres*, comme on voit ici à côté, je commence par les *unités*, & je dis, 9 ne peut pas être ôté de 6 ; j'emprunte 10, & ôtant 9 de 16, le *reste* est 7, que j'écris sous les *unités*. Venant aux *dixaines*, il faut payer 10 que j'ai emprunté de 90 pour faire 16 de 6, & comptant la *figure* 9 un de moins, j'ôte 4 de 8, & il *reste* 4, ou bien (ce qui se pratique plus communément) je dis un que j'ai emprunté & 4 sont 5 que j'ôte de 9, le *reste* est 4, que je place sous les *dixaines*. Venant aux *centaines*, je dis 8 ne peut pas être ôté de 4, mais 8 de 14, il *reste* 6, que j'écris ; & ayant emprunté 10, comme ci-devant, il faut les payer de la même maniere, ou en prenant pour 7 un de moins dans le rang supérieur, disant 5 de 6, il *reste* 1 ; ou en disant 1 que j'ai emprunté, & 5 sont 6, que j'ôte de 7, & il *reste* 1, que je place en son rang, & tout étant fait, la différence requise est 1647 $= 7496 - 5849$.

EXEMPLE III.

De 830476
ôtez 741068

Le *reste* est 89408

On voit dans cet exemple que les *zéro* dans le nombre à soustraire ne diminuent pas le *nombre* d'où l'on fait la soustraction.

Je crois que ces trois exemples suffisent pour faire comprendre aux commençans la méthode de *soustraire* les *nombres* entiers, & le principe est, que *le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble*, c'est-à-dire que dans cette *régle* le *nombre* d'où l'on *soustrait* doit être regardé comme un tout, & le *nombre* à *soustraire* comme une partie de ce tout, & par conséquent si l'on ôte cette partie du tout, le *reste* sera l'autre partie.

De là suit la méthode ordinaire d'éprouver la soustraction, en ajoutant ensemble le *reste* avec le *nombre* à *soustraire*; car si la somme de ces deux nombres, qui sont les parties du tout, est égale au nombre d'où l'on a fait la soustraction, qui est le tout, l'opération est exacte; si elle n'est pas égale, il faut découvrir & corriger l'erreur.

EXEMPLE.

De 59435
ôtez 47608 } Ajoutez
*Preuve* { 11827 }
59435 {Somme qui est égale au *nombre* d'où l'on a fait la *Soustraction*.

Et par la même raison, on peut éprouver la vérité de la *soustraction* par la *soustraction*.

Car si de 59425, qui est ici le tout,
on ôte 47608, comme une partie de ce tout,
il *restera* 11827, l'autre partie, comme ci-devant.
Et si de 59435, qui est toujours le tout,
on ôte 11827, qui est la seconde partie,
il *restera* 47608, premiere partie, ou *nombre* qu'il falloit soustraire du premier.

| | |
|---|---|
| De 75643 | De 7000000 |
| ôtez 9000 | ôtez 986432 |
| il *reste* 66643 | *reste* 6013568 |

---

## SECTION IV.

### *DE LA MULTIPLICATION.*

LA *Multiplication* eſt une *régle* par laquelle on augmente promptement un *nombre* donné autant de *fois* qu'on le propoſe, c'eſt-à-dire qu'un *nombre* en *multiplie* un autre, lorſque le *nombre multiplié* eſt ajouté à lui-même auſſi ſouvent qu'il y a d'*unités* dans le *nombre multipliant*, ce qui *produit* un autre nombre.

Il faut donc pour la *Multiplication* deux *nombres* donnés, qui ſe nomment *facteurs*. Le premier eſt celui qui doit être *multiplié*, & qui eſt ordinairement le plus grand des deux *nombres*; on l'appelle *multiplicande*. Le ſecond eſt celui par lequel le premier doit être multiplié, & on le nomme ordinairement *multiplicateur*; il marque combien de fois le *multiplicande* doit être *ajouté* à lui-même; car il faut ajouter le *multiplicande* à lui-même autant de fois qu'il y a d'*unités* dans le *multiplicateur*; & de là il réſulte un troiſiéme *nombre*, qu'on appelle *produit*; mais dans les *opérations géométriques*, on le nomme *plan* ou *rectangle*. Par exemple, s'il faut augmenter 6 quatre fois, c'eſt-à-dire *multiplier* 6 par 4, ces deux *nombres* doivent être placés l'un ſous l'autre comme dans l'*Addition* ou *Souſtraction*, en cette maniere.

6 *Multiplicande* }
4 *Multiplicateur* } ou *Facteurs*.

24. *Produit*; parce que 4 fois 6 ſont 24, comme on voit clairement par l'*Addition*, en plaçant 6 quatre

fois, & ensuite les ajoutant tous quatre en une somme, comme on voit ici.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 6 | Ajoutez |
| 2 | 6 | |
| 3 | 6 | |
| 4 | 6 | |
| | 24 | |

De là il suit évidemment que la *multiplication* n'est qu'une maniere *abrégée* d'ajouter à lui-même un *nombre* donné autant de fois qu'on le demande.

Avant qu'on puisse parvenir à faire aisément une multiplication, on doit sçavoir par cœur tous les produits des neuf figures les unes par les autres, c'est-à-dire que deux fois 2 sont 4, trois fois 3 sont 9, trois fois six sont 18, &c. selon qu'on les voit exprimés dans la Table suivante, où j'ai omis les *produits* par 2, comme étant si aisés qu'il est inutile de les écrire.

## *TABLE DE MULTIPLICATION.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 × 3 = 9 | 4 × 4 = 16 | 5 × 5 = 25 | 7 × 7 = 49 |
| 3 × 4 = 12 | 4 × 5 = 20 | 5 × 6 = 30 | 7 × 8 = 56 |
| 3 × 5 = 15 | 4 × 6 = 24 | 5 × 7 = 35 | 7 × 9 = 63 |
| 3 × 6 = 18 | 4 × 7 = 28 | 5 × 8 = 40 | |
| 3 × 7 = 21 | 4 × 8 = 32 | 5 × 9 = 45 | 8 × 8 = 64 |
| 3 × 8 = 24 | 4 × 9 = 36 | | 8 × 9 = 72 |
| 3 × 9 = 27 | | 6 × 6 = 36 | |
| | | 6 × 7 = 42 | 9 × 9 = 81 |
| | | 6 × 8 = 48 | |
| | | 6 × 9 = 54 | |

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire de donner aucune explication de cette Table; car si l'on a bien compris les *signes* & leurs *significations*, la table est toute expliquée : il faut seulement remarquer que 4 × 3 = 3 × 4, ou 7 × 5 = 5 × 7, &c, c'est-à-dire que trois fois 4 sont autant que

que quatre fois 3, ou que cinq fois 7 font autant que 7 fois 5, &c. ce qui doit s'entendre de tous les produits qui sont dans la table.

Lorsque l'on sçaura par cœur parfaitement tous ces produits, ensorte qu'on n'hésite pas en les répétant, on pourra s'appliquer à la multiplication, mais non pas avant, & on la trouvera fort aisée, si l'on fait bien attention à la *régle* suivante, & aux *exemples*.

## REGLE.

*Commencez toujours par la* figure *qui est dans les* unités *du* multiplicateur, *& multipliez avec cette* figure *celle qui est dans les* unités *du* multiplicande*; si leur* produit *est moindre que dix, vous l'écrirez sous les* unités, *& vous viendrez à la* figure *suivante du* multiplicande; *mais si leur* produit *surpasse* 10, *vous écrirez le surplus, comme dans l'*Addition, *& vous retiendrez les* dixaines, *pour les ajouter au* produit *que vous trouverez en multipliant la seconde* figure *du* multiplicande *par la même figure du* multiplicateur; *vous garderez de même le surplus de leur somme au dessus de* 10, *comme auparavant, & vous continuerez de la même maniere, jusqu'à ce que vous ayez* multiplié *toutes les figures du* multiplicande *par cette* figure *du* multiplicateur.

## EXEMPLE I.

Il faut *multiplier* 3213 par 3.

| | | |
|---|---|---|
| 3213 | *Multiplicande* | ou *Facteurs.* |
| 3 | *Multiplicateur* | |
| *Produit* 9639 | | |

En commençant par les *unités*, je dis, trois fois 3 font 9, que j'écris sous les unités, parce que ce nombre est moindre que 10; venant aux *dixaines*, je dis, trois fois 1 font 3, que j'écris sous les *dixaines*; je viens aux *centaines*, & je dis, trois fois 2 font 6, que j'écris de même; & enfin aux *mille*, je dis, trois fois 3 font 9, que j'écris,

& l'opération eſt faite : de ſorte que le vrai produit eſt 9639 = 3213 × 3.

### EXEMPLE II.

On veut *multiplier* 8569 par 8 ; je place ces nombres, comme on voit ici.

$$\begin{array}{r} 8569 \\ 8 \\ \hline 68552 \end{array}$$

Commençant par les *unités*, je dis, huit fois 9 ſont 72, j'écris 2 & retiens 7 *dixaines* ; & venant à la *figure* ſuivante du *multiplicande* ( où les 7 *dixaines* ne feront que 7 ), je dis, huit fois 6 ſont 48, & 7 que j'ai retenu, ſont 55, j'écris 5, & je retiens 50 ( qui ſont réellement 500 ) pour le rang ſuivant ( des centaines ) où 500 ne ſont que 5 ; je dis donc, huit fois 5 ſont 40, & 5 que j'ai retenu ſont 45, j'écris 5 ſous les *centaines*, & je garde 40 ou quatre *dixaines* ( qui ſont réellement 4000 ) pour la place ſuivante des *mille* ; je dis donc, huit fois 8 ſont 64, & 4 que j'ai retenu ſont 68. ( Comme c'eſt ici le dernier rang ou la derniere *figure* du *multiplicande* ), j'écris le produit 68, & l'opération eſt finie : enſorte que 8569 × 8 = 68552, *produit* requis.

La raiſon de cette opération, & de toutes les autres ſemblables, ſe trouve aiſément, en faiſant attention à ce qui ſuit.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 5 | 6 | 9 | mêmes *facteurs* que ci-devant. |
| | | | | 8 | |
| | | | 7 | 2 | Ici huit fois 9 ſont 72, comme auparavant, parce que 9 eſt dans le rang des *unités*. |
| | | 4 | 8 | 0 | Mais ici ce n'eſt pas réellement huit fois 6 = 48, mais c'eſt huit fois 60 = 480, parce que 6 eſt dans le rang des *dixaines*. |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | Ici ce n'eſt pas 8 fois 5 = 40, mais 8 fois 500 = 4000, parce que 5 eſt dans le rang des *centaines*. |
| 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | Enfin parce 8 du *multiplicande* eſt dans le rang des *mille*, c'eſt huit fois 8000 = 64000, & non pas huit fois 8 = 64. |
| 6 | 8 | 5 | 5 | 2 | La ſomme de tous ces *produits* particuliers donne le vrai *produit*, comme ci-devant. |

Si l'on fait un peu attention aux *exemples*, & à ce que nous venons de dire, le lecteur comprendra aisément de quelle maniere on peut *multiplier* les *nombres* entiers par une seule *figure*; mais lorsqu'on veut les multiplier par plusieurs *figures*, on doit faire autant de *produits* particuliers qu'il y a de figures dans le *multiplicateur*; c'est-à-dire que toutes les *figures* du *multiplicande* doivent être *multipliées* par chaque *figure* du *multiplicateur*, comme s'il n'avoit que cette seule *figure*; & la *somme* de tous ces *produits* particuliers sera le vrai *produit* requis : mais dans cette opération, il faut avoir grand soin de bien placer les *produits* particuliers (qui résultent de chaque *figure* du *multiplicateur*); ce qui se fait aisément, en observant les régles suivantes.

Placez toujours la premiere *figure* de chaque *produit* particulier directement sous la *figure qui multiplie*; ou bien *la premiere* figure *du second* produit *particulier doit se placer directement sous la seconde* figure *du premier* produit; *& la premiere* figure *du troisiéme* produit particulier *sous la troisiéme* figure *du premier* produit, & ainsi de suite.

On verra aisément pourquoi on place ainsi la premiere *figure* de chaque *produit*, si l'on fait bien attention au dernier *exemple*, dans lequel les *zero* ne sont marqués que pour désigner la vraie distance de chaque *produit* particulier à l'*unité*. Et quoiqu'on ne soit pas en usage de marquer les *zero* de cette maniere, on ne laisse pas de les supposer ainsi marqués, c'est-à-dire qu'on laisse toujours leurs places vuides, comme dans les deux *exemples* suivans, où j'ai mis des *points* à la place des *zero*.

## EXEMPLE III.

Il faut *multiplier* 78094 par 7563.

| | |
|---|---|
| 78094 | *Facteurs.* |
| 7563 | |
| 234282, | Premier *produit* particulier par . . 3. |
| 468564. | Second *produit* particulier par . . . 60. |
| 390470.. | Troisiéme *produit* particulier par 500. |
| 546658... | Quatriéme *produit* particulier par 7000. |
| 590624922 | *Total*, ou vrai *produit* requis. |

## EXEMPLE IV.

On veut *multiplier* 57498 par 60008.

| | |
|---|---|
| 57498 | |
| 60008 | |
| 459984 | *Produit* par . . . . . 8. |
| 344988.... | *Produit* par 60000. |
| 3450339984 | = 57498 × 60008, qu'on avoit demandé. |

On voit ici que j'ai laissé tous les *zero* du *multiplicateur*, & que je me suis borné à bien placer le premier *produit* de la derniere *figure* 60000, selon les régles précédentes.

Lorsqu'il y a un *zero* ou plusieurs *zero* à main droite du *multiplicande* ou du *multiplicateur*, ou de tous les deux; il faut en ce cas *multiplier* les *figures* comme ci-devant, sans faire attention aux *zero*, jusqu'à ce qu'on ait ajouté tous les *produits* particuliers, & alors on joindra à leur *somme* autant de *zero* qu'il y en a dans l'un des *facteurs*, ou dans tous les deux, comme dans les exemples suivans.

| EXEMPLE V. | EXEMPLE VI. | EXEMPLE VII. |
|---|---|---|
| 9538 | 87600 | 785000 |
| 4600 | 79 | 56900 |
| 57228 | 7884 | 7065 |
| 38152 | 6132 | 4710 |
| | | 3925 |
| 43874800 | 6920400 | 44666500000 |

*Voici quelques exemples qui ne ſont pas mis au long.*

75649 × 579 = 43800771
687000 × 356 = 244572000
530674 × 45007 = 23884044718
7901375 × 30000 = 237041250000
537084000 × 590700 = 317255518800000
10203040 × 504030201 = 5142640554026 1405
98765432 × 123456789 = 121932641112635269

*Remarque.* Si l'on veut *multiplier* un nombre par 10, 100, 1000, 10000, &c. il ſuffit de joindre les *zero* du *multiplicateur* aux figures du *multiplicande.*

Ainſi 578 × 10 = 5780 | 578×1000 = 578000
578 × 100 = 57800 | 578×10000 = 5780000 &c.

Ces *exemples* ( étant bien compris ) ſuffiſent pour mettre au fait les commençans de toutes les variétés qui peuvent ſe rencontrer dans la *multiplication* des *nombres* entiers à la façon ordinaire ; cependant il eſt à propos de faire voir ici comment on peut former la *multiplication* ( par pluſieurs *figures* ) avec la ſeule *addition.*

## EXEMPLE.

Il faut *multiplier* 879654 par 79863.

Pour faire cette opération ( ou quelqu'autre ſemblable ) par la ſeule *addition* , il faut faire un tarif ou petite table du *multiplicande* donné, en cette maniere.

| | |
|---|---|
| 1. | 879654 |
| 2 | 1759308 |
| 3 | 2638962 |
| 4 | 3518616 |
| 5 | 4398270 |
| 6 | 5277924 |
| 7 | 6157578 |
| 8 | 7037232 |
| 9 | 7916886 |
| 10 | 8796540 |

*Premierement*, vous ferez une petite colonne pour y placer par degrés en descendant les neuf *figures*, 1, 2, 3, 4, 5, &c. Ensuite à côté de la *figure*, vous écrirez le *multiplicande* (qui dans cet *exemple* est 879654) à côté de la *figure* 2, le double du *multiplicande*, que vous trouverez en l'*ajoutant* à lui-même; à ce double, *ajoutez* le *multiplicande*, & écrivez la somme à côté de la *figure* 3; continuez ainsi par la seule *addition*, jusqu'à ce que le *multiplicande* ait été ajouté dix fois dans la *table*; & si l'opération a été bien faite, vous retrouverez le *multiplicande* à la fin avec un *zero* à main droite (comme dans la table ci-jointe) : ce qui étant fait, on voit clairement que les *figures* dans la petite colonne de la table représentent celles du *multiplicateur*, & que les *nombres* à côté de ces *figures* de la petite colonne, sont les vrais produits du *multiplicande* par chaque *figure* du *multiplicateur*, comme on le concevra aisément par cet *exemple*.

879654 }
79863 } *Fact.* comme ci-devant.

A côté de 3, on trouve dans la Table.... 2638962 = 879654 × 3
A côté de 6, on trouve 5277924 = 879654 × 60
A côté de 8, on a . 7037232 = 879654 × 800
A côté de 9 . . . 7916886 = 879654 × 9000
A côté de 7 . . 6157578 = 879654 × 70000

Le *produit* requis 70251807402 = 879654 × 79863.

*Remarque.* Cette méthode de réduire en table le *multiplicande* est également aisée & certaine, n'étant point sujette à erreur, & ne chargeant pas la mémoire; aussi est-elle fort utile dans les grands calculs : mais la méthode ordinaire est la meilleure dans la pratique commune, & doit être préférée à celle-ci.

Plusieurs *Maîtres d'Arithmétique* ( & plusieurs *Auteurs* qui en ont écrit ) veulent qu'on éprouve la vérité de la *multiplication*, en chassant tous les 9 compris dans les deux *facteurs*, & dans leur *produit*; mais comme cette méthode est fort sujette à erreur, je n'en parlerai pas ici, & je renverrai à la *section* suivante la preuve de la *multiplication*, où j'espere de démontrer clairement les régles de la *Division* & de la *Multiplication* en même tems.

---

## SECTION V.

### *DE LA DIVISION.*

LA *Division* est une *régle* par laquelle on peut promptement *soustraire* un *nombre* d'un autre, aussi souvent qu'il y est contenu, c'est-à-dire qu'elle découvre promptement combien de fois un *nombre* est contenu, ou peut se trouver dans un autre; il faut pour cela avoir deux nombres donnés. 1°. L'un des deux est celui que l'on veut *diviser*, & il se nomme le *Dividende*.

2°. L'autre est celui par lequel on veut *diviser* le *dividende*, & il se nomme le *Diviseur*.

Et en comparant ces deux nombres, le *dividende* & le *diviseur*, il en résulte un troisiéme, que l'on nomme le *Quotient*, & qui fait voir combien de fois le *diviseur* est contenu dans le *dividende*, ou en combien de parties égales le *dividende* doit être divisé.

Si l'on multiplie le *diviseur* par le *quotient*, leur *produit* sera le *dividende*. D'où il suit que la *division* est directement contraire à la *Multiplication* ( comme la *Soustraction* à l'*Addition* ) & l'une prouve la vérité de l'autre :

Je vais donc choisir les *exemples* précédens de la *Multiplication*, pour rendre la *Division* plus claire & plus facile.

Premierement, s'il faut trouver combien de fois 6 est contenu dans 24, c'est-à-dire *diviser* 24 par 6.

Remarquez d'abord qu'il eſt bon de placer toujours les nombres donnés dans l'ordre ſuivant. Ecrivez le *diviſeur*, & à main droite une ligne courbe ; après cette ligne le *dividende*, & à main droite une autre courbe, où il faudra placer la *figure*, ou les *figures* du *quotient*, à meſure qu'on les trouvera, comme on voit ici.

*Diviſeur*, 6 ) *Dividende* 24 ( 4, *Quotient.*

Dans cet *exemple* je cherche combien de fois 6 eſt contenu dans 24, & je trouve 4, parce que quatre fois 6 ſont 24 ; ainſi 4 eſt le vrai *quotient*, ou la *réponſe* à la queſtion.

Cela paroît évidemment par la *ſouſtraction*, comme on voit ici, où ayant écrit le *dividende* 24, j'en retranche continuellement le *diviſeur*, juſqu'à ce qu'il ne reſte rien ; & comme pour l'épuiſer il me faut quatre *ſouſtractions*, je conclus que 4 eſt le vrai *quotient*.

| | |
|---|---|
| | 24 |
| 1 | 6 |
| | 18 |
| 2 | 6 |
| | 12 |
| 3 | 6 |
| | 6 |
| 4 | 6 |
| | 0 |

COROLLAIRE.

De là il ſuit évidemment que la *Diviſion* n'eſt qu'une *méthode abrégée* de *ſouſtraire* un *nombre* d'un autre auſſi ſouvent qu'il eſt poſſible ; car ſi le *diviſeur* eſt continuellement *ſouſtrait* du *dividende*, en comptant l'unité ( ou 1 ) pour chaque ſouſtraction ( comme ci-devant ), la *ſomme* de ces *unités* ſera le *quotient*.

Toutes les opérations de la *Diviſion* commencent au contraire de celles de la *Multiplication*, c'eſt-à-dire par la 1^re^ *figure* à main gauche, qui eſt celle de la plus grande valeur, & elles diminuent le *dividende* par la *ſouſtraction* répétée de chaque *produit* du *diviſeur* par la *figure* du *quotient*. Toute la difficulté de la *diviſion* des *nombres* entiers ( & même de tous les autres ), conſiſte à choiſir une *figure* du *quotient*, qui ne ſoit ni trop grande ni trop petite. On peut y parvenir aiſément par la régle ſuivante, qui renferme deux cas.

## REGLE.

*Premier cas.* Autant de fois que la premiere *figure* du *diviſeur* peut ſe ſouſtraire de la premiere *figure* du *dividende*, il faut qu'autant de fois la ſeconde *figure* du *diviſeur* puiſſe ſe ſouſtraire de la ſeconde *figure* du *dividende*, jointe avec ce qui *reſte* de la premiere, & qu'autant de fois la troiſiéme *figure* du *diviſeur* puiſſe ſe ſouſtraire de la troiſiéme *figure* du *dividende*, &c.

Mais ſi la premiere *figure* du *diviſeur* ne peut pas ſe ſouſtraire de la premiere *figure* du *dividende*; alors :

*Second cas.* Autant de fois que la premiere *figure* du *diviſeur* peut ſe ſouſtraire des deux premieres *figures* du *dividende*, il faut qu'autant de fois la ſeconde *figure* du *diviſeur* puiſſe ſe ſouſtraire de la troiſiéme *figure* du *dividende*, jointe avec ce qui *reſte* de la ſeconde, & qu'autant de fois la troiſiéme *figure* du *diviſeur* puiſſe ſe ſouſtraire de la quatriéme *figure* du *dividende*, &c.

C'eſt-à-dire que la *figure* du *quotient* doit être telle, qu'étant *multipliée* par le *diviſeur*, elle donne un produit égal à la partie du *dividende* que l'on a pris pour cette opération; mais ſi ce *produit* ne lui eſt pas égal exactement, il faut prendre le plus approchant en deſſous, & le placer comme dans les *exemples* ſuivans : donc le premier ſera celui qui étoit le ſecond dans la ſection précédente de la *Multiplication*, où le *multiplicande* étant 8569, & le *multiplicateur* 8, on a trouvé le produit 68552. Nous allons donc ſuppoſer que les deux *nombres* donnés ſont le *produit* 68552, & le *multiplicateur* 8, pour trouver par la *Diviſion* le *multiplicande*, c'eſt-à-dire qu'il faut diviſer 68552 par 8.

*Diviſeur* 8 ) *Dividende* 68552 ( Place du *Quotient*, quand on l'aura trouvé.

Selon le *premier cas* de la *régle*, je compare le *diviſeur* 8 avec la premiere *figure* 6 du *dividende*; & voyant qu'on ne peut pas ôter 8 de 6, j'examine (par le *ſecond*

*cas* ) combien de fois on peut soustraire 8 de 68, qui sont les deux premieres *figures* du *dividende*. Je vois qu'on peut le soustraire huit fois, parce que huit fois 8 sont 64, & que c'est là le plus grand *produit* de 8 ( par une *figure* seule ) qui puisse se soustraire de 68; j'écris donc 8 au *quotient*, & avec cette *figure* 8, je *multiplie* le *diviseur* 8, écrivant le *produit* au dessous des deux premieres *figures* du *dividende* pour le soustraire des mêmes *figures*, comme on voit ici.

```
8 ) 68552 ( 8
    64
   ---
     4.
```

Pour en venir à la seconde *opération*, je marque un *point* sous la *figure* suivante du *dividende*, qui est 5, & je la place en dessous à côté du *reste* 4 dans son rang; ce qui donne pour *reste* 45 : ensuite je vois combien de fois on peut ôter 8 de 45, & je trouve qu'on peut l'ôter cinq fois, car cinq fois 8 sont 40; j'écris donc 5 au *quotient*, & par cette *figure* je multiplie le *diviseur* 8, plaçant en bas, & *retranchant* leur *produit* comme dans la premiere opération, & comme on voit ici.

```
8 ) 68552 ( 85
    64.
   ---
     45
     40
    ---
      5
```

Pour la troisiéme *opération*, je marque un point sous la *figure* suivante du *dividende*, qui est 5, & je la place en dessous comme auparavant, & le reste comme dans les deux autres opérations, & comme on voit ici.

```
8 ) 68552 ( 856
    64..
    ----
     45
     40
    ----
      55
      48
     ----
       7
```

Enfin je pointe & je place en dessous 2, qui est la derniere *figure* du *dividende*, & faisant les mêmes opérations, je trouve que le *diviseur* 8 peut se retrancher neuf fois de 72, & qu'il ne reste rien; ainsi la *division* est achevée, comme on voit.

```
8 ) 68552 ( 8569
    64...
    -----
     45
     40
    -----
      55
      48
     -----
       72
       72
      ----
        0
```

Le vrai *quotient* est trouvé 8569, exactement la huitiéme partie de 68552, ou le *multiplicande* de l'*exemple* proposé de multiplication. On verra clairement la raison de ces *opérations*, si l'on veut faire un peu d'attention à ce qui suit.

*Diviseur* 8 ) 6 8 5 5 2 ( 8000. I^er^ *Quotient* ou *Fig.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 0 | 0 | 0 |

Le *produit* du *diviseur* par ce *quotient* est 64000, ou 8 fois 8000, la *figure* du *quotient* étant toujours de même valeur que celle du *dividende*, sous laquelle on place l'unité de ce *produit*.

*Diviseur* 8 ) 4 5 5 2 ( 500, 2^e^ *figure* du *quotient*.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 0 | 0 |

Ici le *prod.* est 4000, ou 8 fois 500, & non pas 8 fois 5, &c.

*Diviseur* 8 ) . . 5 5 2 ( 60, 3^e^ *figure* du *quotient*.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 8 | 0 |

Ici le *produit* est aussi 480, ou 8 fois 60, par les raisons préc.

*Diviseur* 8 ) . . . 7 2 ( 9, 4^e^ *figure* du *quotient*.

| | |
|---|---|
| 7 | 2 |

Le *produit* n'est ici que 72 ou 9 fois 8, parce que 9 est dans le rang des *unités*.

*Reste* . . . 0 0.

Maintenant la somme de tous les divers *quotiens* 8000 + 500 + 60 + 9 = 8569, comme auparavant.

Si l'on examine bien le procédé de cet *exemple*, & si on le compare avec celui de l'*exemple II.* dans la *Multiplication*, on verra évidemment que c'est ici le contraire de la *multiplication* ou la *converse*; car les *produits* particuliers sont les mêmes de part & d'autre, & seulement celui qui étoit le *dernier* est ici le *premier*; & ceux que l'on a *ajoutés* sont ici *retranchés* : ensorte que si l'on a bien compris la vraie *raison* de l'une, on comprendra de même la *raison* de l'autre, & la *division* deviendra fort *aisée*, quoique le *diviseur* soit composé de plusieurs *figures*.

EXEMPLE.

On veut *diviser* 590624922 par 7563.

*Diviseur* 7563 ) *Dividende* 590624922 (

On voit d'abord que le *diviseur* 7563 ne peut pas être soustrait de 5906, même *nombre* de *figures* dans le *dividende*.

Ainsi par le *second cas* de la *régle* précédente, il faut prendre cinq *figures* du dividende 59062 pour la *premiere opération* ou *quotient*, afin que la *premiere figure* 7 du *diviseur* puisse se retrancher des deux *premieres figures* 59 du *dividende*, &c.

Ensuite (*par le second cas*) j'examine combien de fois on peut ôter 7 de 59, & je vois qu'on peut l'ôter huit fois, car huit fois 7 font 56, que je *soustrais* par la pensée de 59, & il *reste* 3; je joins à 3 par la pensée la troisiéme *figure* du *dividende*, qui est o, ce qui donne 30; d'où il faut ôter la seconde *figure* du *diviseur* 5 aussi souvent que j'ai ôté 7 de 59, c'est-à-dire huit fois: mais cela ne se peut pas, parce que huit fois 5 font 40, qui est plus que 30; donc 8 est une *figure* trop grande pour être mise au *quotient*; & de là je conclus qu'il faut prendre 7 sans autre *épreuve*. Ainsi j'écris 7 au *quotient*, & je multiplie par 7 le *diviseur*, plaçant leur *produit* sous le *dividende*, & en faisant la *soustraction* comme dans l'autre *exemple*, & comme on voit ici.

```
7563 ) 590624922 ( 7
       52941
       -----
       6121
```

Pour venir à la *seconde opération*, je *pointe* la *figure* suivante du *dividende*, qui est 4, & je la place au dessous à côté du *reste* 6121, qui devient 61214. Je divise ce reste de la même maniere que j'ai divisé 59062, & je trouve la *figure* suivante 8 du *quotient*, avec laquelle je

*multiplie* le *diviseur*, & je *soustrais* leur *produit* de 61214; comme on voit.

```
7563 ) 590624922 ( 78
       52941.
       -----
        61214
        60504
        -----
          710
```

Je pointe la *figure* suivante 9 du *dividende*, & je la joins à ce *reste* 710 pour avoir 7109; & comme le *diviseur* 7563 ne peut pas être ôté de 7109, je place un *zero* dans le *quotient*.

C'est à quoi l'on doit bien faire attention, que toutes les fois qu'on *pointe* une *figure* ou un *zero*, pour la placer en bas, & pour en venir à une nouvelle *opération*, il faut toujours écrire dans le *quotient* ou une *figure*, ou un *zero*. L'opération est donc ainsi :

```
7563 ) 590624922 ( 780
       52941..
       -----
        61214
        60504
        -----
         7109
```

A ce *reste* 7109 je joins une autre *figure* du *dividende*, qui est 2, & il devient 71092; ensuite j'examine combien de fois on peut ôter 7 de 71, &c. ( tout comme dans la premiere opération ), & je trouve qu'on peut l'ôter neuf fois. J'écris donc 9 dans le *quotient*, & je *multiplie* le *diviseur* par 9, écrivant & *soustrayant* leur *produit* comme auparavant, ce qui me donne

```
7563 ) 590624922 ( 7809
       52941...
       -----
        61214
        60504
        ------
         71092
         60067
         -----
          3025
```

Je *pointe* la derniere *figure* 2 du *dividende*; & je la joins à ce reste 3025, ce qui fait 30252 : ensuite opérant à tous égards comme auparavant, je trouve que la *figure* du *quotient* est 4; je *multiplie* par 4 le *diviseur*; j'écris & soustrais leur *produit* comme auparavant, & j'ai

```
7563 ) 590624922 ( 78094
       52941....
       ---------
        61214
        60504
        -----
         71092
         68067
         -----
          30252
          30252
          -----
         (00000)
```

Ici la Division est achevée, & je trouve que le *quotient* est 78094, qui est le vrai *multiplicande* du troisiéme exemple proposé dans la *multiplication*, c'est-à-dire que 7563 est contenu dans 590624922, précisément 78094 fois.

Si l'on examine l'opération de cet *exemple*, & si on la compare avec la *régle* de la Division, on trouvera que la *division* n'est pas fort difficile ; car toute la difficulté (comme je l'ai dit ci-devant) consiste à bien choisir la vraie *figure* du *quotient*, ce qui ne peut pas se faire sans tâtonnement dans la méthode ordinaire de la *Division*; mais ces tâtonnemens ne doivent pas se faire avec tout le *diviseur* (comme il paroît par ce dernier *exemple*). Il suffit d'éprouver les deux premieres *figures* du *diviseur* qui réglent ordinairement tout le reste, excepté que par hazard la seconde *figure* fût 2, 3 ou 4, & qu'en même tems la troisiéme fût 7, 8 ou 9; car alors on doit avoir égard à cette troisiéme *figure*, selon la *régle*.

Si néanmoins on trouve ces tâtonnemens trop pénibles, on peut les éviter, & trouver aisément, & sans

hésiter les mêmes *figures* du *quotient*, par le moyen d'une petite table faite sur le *diviseur*, comme celle qu'on a fait sur le *multiplicande* dans le dernier *exemple* de la *Multiplication*.

### EXEMPLE IV.

Il faut *diviser* 702518074021 par 79863. *Voyez le dernier exemple de la Multiplication, & faites une table du diviseur 79863, comme j'ai dit dans cet exemple, qu'il falloit faire une table du multiplicande.*

| | *Diviseur.* | *Dividende.* |
|---|---|---|
| 1 | 79863 ) | 702518074021 ) 859654. *Quotient.* |
| 2 | 159726 | 638904..... |
| 3 | 239589 | 636140 |
| 4 | 319452 | 559041 |
| 5 | 399315 | 770997 |
| 6 | 479178 | 718767 |
| 7 | 559041 | 522304 |
| 8 | 638904 | 479178 |
| 9 | 718767 | 431260 |
| 10 | 798630 | 399315 |
| | | 319452 |
| | | 319452 |
| | | (000000) |

Je crois que l'on verra aisément en quoi consiste cette opération; car les *figures* de la *Table* sont les produits du *diviseur* par toutes les neuf *figures*, & par conséquent ces *figures* de la petite colonne font voir quelle est celle qui doit être placée dans le *quotient*, sans aucun tâtonnement.

Cette méthode de faire une table du *diviseur* est très-utile aux commençans, jusqu'à ce qu'ils soient bien exercés dans la pratique de la Division, & sur-tout si le *divi-*

*seur*,

*ſeur* eſt fort grand, & qu'il ſoit queſtion de trouver un grand nombre de *figures* dans le *quotient*, comme pour la réſolution des *équations* élevées, pour le calcul des *tables aſtronomiques*, ou de celles des intérêts, &c.

Juſqu'ici j'ai choiſi des *exemples* où le *dividende* eſt exactement meſuré ou diviſé par le *diviſeur*, ſans laiſſer aucun *reſte*, le *dividende* ſe trouvant composé du *diviſeur* & du *quotient*: mais il arrive ordinairement que le *diviſeur* ne meſure pas exactement le *dividende*, & dans ce cas le *reſte* (après que la *diviſion* eſt achevée) doit être mis au deſſus du *diviſeur* avec une petite ligne interpoſée, & à côté du *quotient*.

### EXEMPLE V.

On veut diviſer 379 par 5.

5 ) 379 ( 75 $\frac{4}{5}$ *Reſte.* / *Diviſeur.*
35
———
29
25
———
*Reſte* (4)

### EXEMPLE VI.

Il faut diviſer 43789 par 67.

67 ) 43789 ( 653 $\frac{38}{67}$, vrai *Quotient* requis.
402..
———
358
335
———
239
201
———
(38) *Reſte.*

On verra dans la ſuite ce que l'on doit faire de ces reſtes placés au deſſus de leurs *diviſeurs* (qui forment les *fractions ordinaires*).

REMARQUE. Lorſqu'il arrive que le *diviſeur* eſt l'*unité* avec un ou pluſieurs *zero*, comme 10, 100, 1000, &c. la *diviſion* ſe fait en coupant par un trait ou un point autant de *figures* du *dividende* qu'il y a de *zero* dans le *diviſeur*. Toutes ces *figures* coupées ſeront regardées comme le *reſte* de la *diviſion*, & les autres *figures* du *dividende* ſeront le vrai *quotient*, parce que l'*unité*, ou 1, ne fait aucun changement dans la *multiplication* ni dans la *diviſion*.

### EXEMPLE VII.

Pour diviſer 57842 par 100, on opére ainſi :

100) 578,48, *quotient* requis, ou 100) 57842 ( 578 $\frac{42}{100}$, le même qu'auparavant.

De là il ſuit que ſi un *diviſeur* a des *zero* à main droite, il faut couper autant de *figures* à la fin du *dividende*, & diviſer les autres *figures* du *dividende* par celles du *diviſeur* qui ſont reſtées, après en avoir coupé les *zero*. Mais à la fin de la *diviſion*, il faut rétablir dans le *reſte* les *figures* qu'on avoit coupées dans le *dividende*.

### EXEMPLE VIII.

On veut diviſer 675469 par 5400.

```
5400 ) 675469 ( 125
       54..
       135
       108
        274
        270
  reſte ( 4 )
```

Le vrai *reſte* eſt ici 469, & le vrai *quotient* 125 $\frac{469}{5400}$.

A l'égard de la maniere d'éprouver la vérité, tant de la *diviſion* que de la *multiplication*, je crois qu'on la comprendra aiſément par ce qui a été dit au commencement de cette *ſection*, & par la comparaiſon des trois premiers *exemples* de la *Diviſion* ; car on y voit que ſi l'on *multiplie* enſemble le *diviſeur* & le *quotient*, leur *produit* ( en y ajoutant ce qui *reſte* après la *diviſion* ) ſera égal au *dividende*, comme dans le cinquiéme *exemple*, où le *dividende* eſt 379, le *diviſeur* 5, le *quo-*

*tient* 75, & le *reste* 4. Je dis, 75 × 5 = 375; & *ajoutant* le *reste* 4, j'ai 379.

De même dans le sixiéme *exemple*, le *diviseur* est 67, le *quotient* 653, & le *reste* 38 : or 653 × 67 = 43751, & 43751 + 38 = 43789, *dividende*, &c.

*On a plusieurs manieres d'abréger la* Division *& la* Multiplication. *Je les renvoye à l'*Arithmétique décimale, *aussi-bien que l'*Evolution *ou* extraction *des racines.* Et ainsi je vais terminer ce chapitre par quelques *exemples* de *Division* qui ne sont pas au long, pour exercer les commençans.

579 ) 43800771 ( 75649
ou 75649 ) 43800771 ( 579
45007 ) 23884044718 ( 530674
ou 530674 ) 23884044718 ( 45007
356 ) 244572000 ( 687000
59600 ) 57659066400 ( 967434
10000 ) 679543820000 ( 67954382
79 ) 282016 ( 3569 $\frac{65}{79}$.

## CHAPITRE III.

### *De l'Addition & Soustraction des nombres de différentes dénominations, & de la Réduction d'une dénomination à une autre.*

### SECTION PREMIERE.

#### *I.* DES *MONNOIES.*

LA moindre monnoie en Angleterre est le *fardin* ou le *liard*, qui est la quatriéme partie d'un sol. La livre sterling vaut 20 schelings, le scheling 12 sols, & le sol

4 fardins. En France la moindre monnoie eſt le denier ; un écu vaut 3 livres, la livre 20 ſols, & le ſol 12 deniers.

Lorſqu'on écrit livre, ſol, denier au deſſus (ou à main droite) des nombres, cela ſignifie que ces nombres marquent des *livres*, *ſols* & *deniers*.

Ainſi 35 liv., 10 ſols, 6 den., ou 35 l. 10 ſ. 6 d., l'une & l'autre ſignifie 35 livres, 10 ſols, 6 deniers. Il en eſt de même des caracteres ſuivans, par rapport aux *poids*, *meſures*, &c.

## *II.* POIDS.

Le moindre poids eſt le *grain*. Le *quintal* eſt ordinairement de 100 *livres*, la *livre* de 16 *onces*, le *marc* de 8 *onces*, l'*once* de 8 *gros* ou *dragmes*, la *dragme* de 3 *deniers*, & le *denier* de 24 *grains*. La livre s'exprime ainſi ᵗᵗ.

## *III.* MESURES EN LONGUEUR.

La moindre meſure eſt le *point*, qui eſt la ſixiéme partie d'une ligne. La *toiſe* eſt de 6 *pieds*, le *pied* de 12 *pouces*, le *pouce* de 12 *lignes*, & la *ligne* de 6 *points*. Le pied de Roi vaut $12\frac{8}{10}$ pouces d'Angleterre, & 57060 *toiſes* valent 365184 pieds d'Angleterre, & ſont la meſure d'un degré terreſtre.

## *IV.* DU TEMS.

L'*année* eſt de 365 *jours* 5 *heures* 48 *minutes* 57 *ſecondes* 21 *tierces*, &c. mais la *ſeconde* étant la plus petite partie du *tems* que l'on puiſſe meſurer aiſément par le *mouvement* d'une *machine*, comme d'une *horloge* (la *tierce* étant plus courte qu'un clin d'œil), nous nous arrêterons aux *ſecondes*. Le *jour* eſt de 24 *heures*, l'*heure* de 60 *minutes*, & la *minute* de 60 *ſecondes*. Mais l'*année* commune, qu'on nomme *Julienne*, eſt de 365 *jours* & 6 *heures*. On la diviſe en douze *mois* inégaux.

## SECTION II.

### *Additions des Poids, &c.*

Lorsqu'on sçait combien d'*unités* d'une *dénomination* en font une de la *dénomination supérieure*, il est aussi aisé de les *ajouter* ou de les *soustraire*, que d'*ajouter* ou de *soustraire* les *nombres entiers*, si l'on a bien soin de placer tous les nombres d'une *dénomination* exactement sous ceux de la même *dénomination*, c'est-à-dire, pour les monnoies, les *livres* sous les *livres*, les *sols* avec les *sols*, & les *deniers* sous les *deniers*; ce qui doit s'entendre des *poids* & des *mesures*, selon leurs différentes *dénominations* : ensuite pour l'*addition* on gardera la *régle* suivante.

### Regle.

*Commencez toujours par les* figures *de la plus basse ou moindre* dénomination, *& faites-en une* somme; *voyez ensuite combien d'*unités *de la* dénomination supérieure *sont contenues dans cette* somme, *& gardez ce* nombre *d'unités pour l'ajouter à la* dénomination supérieure; *s'il reste quelque chose de plus que ces* unités, *vous écrirez ce surplus dans le rang de sa propre* dénomination, *& vous continuerez ainsi d'une* dénomination *à l'autre, jusqu'à la fin.*

### *Exemple sur les Monnoies.*

On veut ajouter 35 liv. 14 sols 6 den.; 27 liv. 2 sols 10 den.; 54 liv. 13 sols 4 den., & 10 liv. 17 sols 9 den. pour en faire une somme.

| liv. | sols | den. |
|---|---|---|
| 35 | 14 | 6 |
| 27 | 2 | 10 |
| 54 | 13 | 4 |
| 10 | 17 | 9 |
| 128 | 8 | 5 |

Ces *sommes* particulieres étant bien placées, seront comme on voit ici.

Ensuite, selon la *régle*, je commence par les *deniers* (qui sont ici la plus basse ou la plus petite *dénomination*), & les ayant tous *ajoutés*

ensemble, je trouve que leur somme est de 29 den. qui valent 2 sols & 5 den. ( car 24 den. = 2 sols, & 29 = 24 + 5 ). J'écris 5 sous les *deniers*, & je retiens 2 pour les sols, & en les ajoutant avec tous les autres, je trouve la *somme* de 48 *sols*, c'est-à-dire de 2 liv. 8 sols; j'écris donc 8 sous les *sols*, & je porte 2 aux livres; les ajoutant toutes ensemble, je trouve que leur *somme* est 128 livres, par conséquent la *somme totale* requise est 128 liv. 8 s. 5 d.

Mais comme il arrive souvent aux teneurs de Livres de *comptes* ( & en d'autres affaires ) qu'on est obligé d'ajouter de grandes *sommes*, composées de 30, 40, ou d'un plus grand nombre de *sommes* particulieres, qui remplissent quelquefois des feuilles entieres de papier; il est bon en ce cas de partager l'addition en plusieurs autres, qui ne surpassent pas dix ou douze *sommes* particulieres; après quoi on ajoute ensemble toutes les *sommes* qui proviennent de ces moindres *additions*, & l'on a la somme totale requise.

Pour éviter aussi de marquer des points, ou de faire d'autres marques à vos *figures*, il est bon d'apprendre par cœur les deux Tables suivantes.

| *Table des Deniers.* | | | | | | *Table des Sols.* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *den.* | | *sols.* | *den.* | | *sols.* | *sols.* | | *liv.* | *sols.* | | *liv.* |
| 12 | = | 1 | 72 | = | 6 | 20 | = | 1 | 120 | = | 6 |
| 24 | = | 2 | 84 | = | 7 | 40 | = | 2 | 140 | = | 7 |
| 36 | = | 3 | 96 | = | 8 | 60 | = | 3 | 160 | = | 8 |
| 48 | = | 4 | 108 | = | 9 | 80 | = | 4 | 180 | = | 9 |
| 60 | = | 5 | 120 | = | 10 | 100 | = | 5 | 200 | = | 10 |

L'usage de ces Tables est si facile, qu'il est inutile de l'expliquer ici.

*Exemple de l'Addition des Poids.*

| Quint. | liv. | on. | gros. | den. | grains. |
|---|---|---|---|---|---|
| 43. | 54. | 4. | 6. | 2. | 18 |
| 19. | 75. | 5. | 7. | 1. | 12 |
| 34. | 60. | 6. | 3. | 1. | 15 |
| 58. | 83. | 7. | 5. | 1. | 19 |
| 45. | 25. | 4. | 4. | 2. | 20 |
| 77. | 86. | 6. | 4. | 2. | 8 |
| 279. | 85. | 1. | 1. | 0. | 20 |

Dans cet exemple, la ſomme des *grains* eſt 92, qui valent 3 *deniers* & 20 *grains*. La ſomme des *deniers* eſt 12, qui valent 4 *dragmes*. La ſomme des *dragmes* eſt 33, qui valent 4 *onces* & une *dragme*. La ſomme des *onces* eſt 33, qui valent 2 liv. & une once; celle des *livres* eſt 385, qui valent trois *quintaux* & 85 *livres*.

*Exemple de l'Addition des Meſures.*

| Toiſes. | pi. | pou. | lig. | points. |
|---|---|---|---|---|
| 5678. | 4. | 10. | 11. | 3 |
| 895. | 3. | 7. | 8. | 5 |
| 567. | 5. | 9. | 10. | 4 |
| 735. | 2. | 6. | 7. | 2 |
| 42. | 3. | 3. | 5. | 1 |
| 7920. | 2. | 2. | 7. | 3 |

Je crois qu'il eſt inutile de donner un plus grand nombre d'*exemples* de cette eſpece. Ces trois ſuffiſent ſi on les comprend bien.

---

## SECTION III.

### SOUSTRACTION DES POIDS, &c.

La *Souſtraction* n'eſt que la converſe de l'opération précédente, & peut s'exécuter en obſervant cette *régle*.

## RÉGLE.

*Commencez par la plus basse ou moindre* dénomination ( *comme dans l'*Addition ) *& ôtez de la* figure, *ou des* figures *supérieures, celles qui sont au dessous, écrivant le* reste. *Mais si la* soustraction *ne peut pas se faire, vous augmenterez la* figure, *ou les* figures *supérieures, de la valeur de l'*unité *de celle qui la précéde immédiatement, & de cette* somme *vous ôterez les* figures *inférieures. Et ainsi venant à la* dénomination *qui précéde, vous rendrez ce que vous aurez emprunté, comme dans les* nombres *entiers.*

### *Exemples sur les Monnoies.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| De | 386 liv. | 9 sols. | 8 den. | De | 569 liv. | 10 sols. | 6 den. |
| ôtez | 173 | 4 | 6 | ôtez | 389 | 15 | 8 |
| *Reste* | 213 | 5 | 2 | *Reste* | 179 | 14 | 10 |

Le premier de ces deux *exemples* est évident. Dans le second, en commençant par les *deniers* ( qui sont ici la moindre *dénomination* ), on ne peut pas ôter 8 deniers de 6; il faut donc ( conformément à la *régle* ) emprunter l'*unité* de la dénomination précédente, qui est un sol, qui vaut 12 deniers, & l'ajouter à 6, ce qui fait 18 den. Ensuite de 18, ôtant 8, il reste 10, que j'écris sous les *deniers*; cela étant fait, je viens aux *sols*, où je dois remplacer un que j'ai emprunté, ajoutant un à 15, ce qui fait 16 : mais on ne peut pas ôter 16 de 10; j'emprunte donc encore un de la quantité qui précéde, c'est-à-dire une *livre*, qui vaut 20 sols; 20 & 10 font 30; ôtant 16 de 30, le *reste* est 14, que j'écris en son rang. Enfin venant aux *livres*, je rends une *livre* que j'ai emprunté, ce qui joint à 9 fait 10, mais on ne peut pas ôter 10 de 9, j'emprunte une *dixaine*, & j'ôte 10 de 19, il *reste* 9, & ainsi de suite jusqu'à la fin, comme dans les *nombres* entiers. Le *reste* sera donc 179 liv. 14 sols 10 den.

Cet *exemple* bien consideré, doit rendre tous les autres faciles.

## *Exemples des Poids.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| De | 406034 liv. | 2 onc. | 3 gros. |
| ôtez | 345678 | 9 | 6 |
| *Reste* | 60355 | 8 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| De | 101 mar. | 0 on. | 1 gros | 0 den. | 3 gra. |
| ôtez | 78 | 4 | 6 | 0 | 9 |
| *reste* | 22 | 3 | 2 | 2 | 18 |

## *Exemples du Tems.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| De | 27 jours. | 18 heures. | 35 minutes. | 21 secondes. |
| ôtez | 16 .. | 21 .. | 46 .. | 36 |
| *Reste* | 10 .. | 20 .. | 48 .. | 45 |

La preuve de l'*Addition* & de la *Soustraction* dans tous ces *nombres* de différentes *dénominations*, est la même que celle des *nombres* entiers.

---

## SECTION IV.

### *DE LA RÉDUCTION.*

LA *Réduction* change les nombres de différentes *dénominations* à une seule *dénomination*, c'est-à-dire qu'elle change une *dénomination* supérieure proposée à une *dénomination* inférieure, ou moindre requise, en conservant toujours la valeur équivalente; par ce moyen on peut aisément *multiplier* & *diviser* les nombres de différente espece, ce qui n'est pas aussi facile sans cette *réduction*. L'opération de la *réduction* est très-utile dans la *régle de Proportion* (qu'on nomme communément *régle d'Or* ou *régle de Trois*), sur-tout pour ceux qui ne sont pas au fait des *fractions ordinaires*, ou des *fractions décimales*. En voici la méthode.

REGLE.

*Voyez combien d'*unités *de la* dénomination *requise en*

*forment une de la* dénomination *proposée*, *&* *multipliez la* dénomination *proposée par ce nombre d'*unités, *leur* produit *sera le* nombre *requis.*

*Exemples sur les Monnoies.*

On veut réduire ou changer 357 liv. en *sols*, & ces *sols* en *deniers*, qui forment toujours une somme égale en valeur à 357 liv.

357
*Multipliez* par 20, *sols* contenus dans une *livre.*

7140 = *sols* contenus dans 357 *liv.*
*Multipliez* par 12, *deniers* contenus dans un *sol.*

1428
714

85680 = *deniers* contenus dans 357 *liv.*
comme on l'avoit demandé.

On peut aussi réduire 357 liv. en *deniers* par une seule opération, en cette maniere :

357
*Multipliez* par 240 *deniers* contenus dans une *livre.*

1428
714

85680 = *deniers* contenus en 357 *liv.*
comme ci-devant.

Mais lorsque les *nombres* proposés sont de plusieurs *dénominations*, & qu'il faut les réduire tous à la plus basse, on doit réduire la plus haute *dénomination* à la suivante, en y ajoutant les nombres de cette moindre *dénomination*, ensuite on *réduira* leur *somme* à la *dénomination* inférieure, en ajoutant encore les *nombres* de cette *dénomination*, & ainsi par degrés jusqu'à la derniere.

EXEMPLE.

On veut réduire 375 liv. 17 sols 10 den. 3 quarts en quarts de deniers.

375 *liv.* 17 *sols* 10 *den.* 3 *quarts.*
20

7500 = *sols* contenus dans 375 *liv.*
+ 17 *s.*

7517 = *sols* contenus dans 375 *liv.* 17 *sols.*
12

15034
7517

90204 = *deniers* contenus dans 375 *liv.* 17 *sols.*
+ 10 *den.*

90214 = *deniers* contenus dans 375 *liv.* 17 *sols* 10 *den.*
4

360856 = *quarts de deniers* contenus en 375 *l.* 17 *s.* 11 *d.*
+ 3 *quarts.*

360859 = *quarts de deniers* contenus dans 375 *liv.* 17 *s.* 10 *den.* 3 *quarts.*

On peut abréger cette opération & les autres semblables, par la méthode suivante.

375 *liv.* 17 *sols* 10 *den.* 3 *quarts.*
20. *Multipliez* & *ajoutez* en même-tems 17 *sols.*

7517
12. *Multipliez* & *ajoutez* 10 *den.*

15034
7517

90214
4. *Multipliez* & *ajoutez* 3 *quarts.*

360859, *quarts de deniers* comme ci-devant.

S'il eſt queſtion de livres ſterlings, la ſomme propoſée eſt 375 *liv.* 17 *ſchelings*, 10 *ſols* 3 *fardins* ou *liards*, qui ſe réduiſent à 360859 *fardins*.

*Exemple pour la Réduction des poids.*

Réduire en *grains* 29 liv. 8 onces 3 drag. 1 den. 10 gr.

Multipliez par 16, & ajoutez les 8 *onces*.

182
29

472
Multipliez par 8, & ajoutez les 3 *dragmes*.

3779
Multipliez par 3, & ajoutez 1 *den.*

11338
Multipliez par 24, & ajoutez 10 *grains*.

45362
22676

272122 *grains* = 29*l.* 8 *on.* 3 *dra.* 1 *d.* 10 *gr.*

Ces deux *exemples* ainſi étendus ſuffiſent, ſi on les a bien compris, pour mettre au fait de cette méthode. En voici encore deux de cette eſpece pour exercer les commençans.

1°. En 1692 *années* communes, combien y a-t-il de *jours*, d'*heures*, & de *minutes*? Réponſe, 618003 *jours*, 14832072 *heures*, 889924320 *minutes*, l'*année* commune étant de 365 *jours* & 6 *heures*.

2°. En 5786 *livres* 17 *ſols* 9 *deniers*, combien de *ſols* & de *deniers*? Réponſe, 115737 *ſols*, 1388853 *den.*

On va voir comment on peut changer les *nombres* d'une *dénomination* inférieure en une *dénomination* ſupérieure, ce que pluſieurs Auteurs appellent (quoique très-improprement) *Réduction aſcendante*.

### *Réduction ascendante.*

Cette opération est la converse de la derniere, & se fait par la *Division*, en cette maniere.

### REGLE.

*Voyez combien il faut d'*unités *de la* dénomination *proposée pour en faire une de la* dénomination *requise, & prenez ce* nombre *pour* diviseur *du* nombre *proposé, le* quotient *sera le* nombre *requis.*

### EXEMPLE.

On demande combien de *sols* & de *livres* sont contenus dans 85680 *deniers*?

Les *deniers* dans 1 *sol* sont 12) 85680 (7140 *sols* = 85680 *deniers*.

Les *sols* dans une *livre* sont 20) 7140 (357 *livres*. *Réponse* requise.

### *Autre exemple sur les Monnoies.*

Combien y a-t-il de *deniers*, de *sols* & de *livres* dans 264859 *quarts* de *deniers*?

```
                12)                 20)
4) 264859     ( 66214 den.       ( 5517 sols   ( 275 liv.
   24           62                 151
    08           21                 117
     05           94               (17) sols.
      19         (10) den.
   Reste 3 quarts.
```

*Nota.* Le reste est toujours de même *dénomination* que le *dividende*.

Le dernier *quotient* 275 liv. joint aux différens *restes*, donne la *réponse* requise, 275 liv. 17 s. 10 den. 3 quarts = 264859 quarts de deniers.

### *Exemple pour les Poids.*

On demande combien de *livres*, *onces*, *gros* & *deniers* ſont contenus en 272122 *grains*.

```
                3)          8)          6)
24) 272122    ( 11338    ( 3779     ( 472  ( 29 liv.
     ...          ...        ..        .
     32           23         57        152
     81           23         19        (8) onces.
     92           28         (3) gros.
     202          (1) den.
    (10) grains.
```

Il y a donc 29 *livres*, 8 *onces*, 3 *gros*, 1 *den.* 10 *grains*.

On peut réſoudre pluſieurs queſtions utiles par le moyen de la ſeule *réduction*, comme le change d'une ſorte de *monnoie* en une autre, & la comparaiſon d'une ſorte de *meſure* avec une autre, &c.

Par exemple, ſuppoſé qu'on ait 347 *rixdales* à 4 *ſchelings* 6 *ſols* chacune, & qu'on demande combien elles font de *livres ſterlings*?

```
      347
       54 = ſols contenus dans une rixdale, ou 4 ſols
            6 den. = 54 d.
     1388
     1735        20)
12) 18738 d.   ( 1561 ſ. ( 78 liv.
     67           161
     73           (1) ſ.
     18
    (6) d.
```

Le ſol d'Angleterre s'exprime ainſi : *d.*

La *réponſe* eſt donc 78 *liv.* 1 *ſchel.* 6 *ſ.* ſterl. = 347 *rixd.*

*Quest*. 2. En 645 *aunes* de *Flandres*, combien d'*aunes* d'*Angleterre ?*

*Nota*. Le *quart d'une verge d'Angleterre* (c'est une mesure de trois pieds) *fait une aune de Flandres & un* $\frac{1}{4}$, *ou* 5 *quarts d'une verge fait une aune d'Angleterre.*

Donc 645
3 = *quarts* d'une *verge* contenus dans une *aune Flam.*

Quart dans 1 *aune*=5) 1935 ( 387 *aunes d'Angleterre* pour la *réponse*.

*Quest*. 3. Supposé qu'une Lettre de change soit acceptée à *Londres* pour le payement de 400 *liv. sterlings*, dont la valeur a été livrée à *Amsterdam* en monnoie de *Flandres* à une liv. 13 s. 6 d. pour une *livre sterling*; combien a-t-on livré de monnoie de *Flandres* à *Amsterdam ?*

1°. Une liv. 13 s. 6 den. = 402 d. valeur d'une *livre sterling* à *Amsterdam*.

2°. 402 den. × 400 = 160800 den. = 670 liv. de *Flandres* qui ont été livrées à *Amsterdam*.

# CHAPITRE IV.

## *DES FRACTIONS ORDINAIRES.*

## SECTION PREMIERE.

### *De l'expression des Fractions.*

Une *fraction* ou *nombre rompu* est celui qui représente une *partie*, ou *plusieurs parties* d'une quantité proposée, & il s'exprime par deux *nombres* placés l'un au dessus de l'autre, avec une ligne interposée, en cette maniere :

$\left\{ \frac{3}{4} \right.$ 3 *Numérateur.* 4 *Dénominateur.*

Le *dénominateur* ou *nombre* placé au dessous de la *ligne*, marque en combien de *parties égales* on suppose que la quantité est *divisée* ( n'étant que le *diviseur* dans toute division ). Et le *numérateur* ou *nombre* placé au dessus de la *ligne*, marque combien de ces *parties* sont contenues dans la *fraction* ( c'est le *nombre* qui *reste* après la *division* ). Les fractions sont de trois sortes; sçavoir,

*Fractions* { *propre* ou *simple*. / *impropre*. / *composée*. }

La *fraction propre*, *pure* ou *simple*, est celle qui est moindre que l'*unité*, c'est-à-dire qu'elle représente la *partie*, ou les *parties* immédiates d'une chose, & moindres que le tout, & par conséquent son *numérateur* est toujours moindre que le *dénominateur*.

Comme { $\frac{1}{4}$ est une $4^e$ *partie*. / $\frac{1}{3}$ est une $3^e$ *partie*. } Et { $\frac{1}{2}$ est une *moitié*. / $\frac{2}{3}$ est deux *tiers*, &c. }

La *fraction* impropre est celle qui est plus grande que l'*unité*, c'est-à-dire qu'elle représente un *nombre* de *parties* plus grand que le tout, & son *numérateur* est toujours plus grand que le *dénominateur*; comme $\frac{5}{3}$ ou $\frac{9}{7}$, ou $\frac{41}{15}$, &c.

La *fraction* composée est une *partie* d'une *partie*, consistant en plusieurs *numérateurs* & *dénominateurs* liés ensemble par le mot *( de )*.

Ainsi $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$, &c. se lit ainsi : Un *tiers* de trois *quarts* de deux *cinquiémes* de l'*unité*, c'est-à-dire que l'*unité* ( ou un tout ) étant d'abord divisée en un *nombre* de *parties égales*, & chacune de ces *parties* étant sous-divisée en d'autres *parties*, & ainsi de suite; ces dernieres *parties* se nomment *fractions composées* ou *fractions* de *fractions*.

Par exemple, supposé qu'une *livre* ( ou 20 sols ) soit l'*unité* ou le *tout*, alors 8 sols sera $\frac{2}{5}$ de l'*unité*; 6 sols sera $\frac{3}{4}$ de ces deux *cinquiémes*, & 2 sols sera $\frac{1}{3}$ de ces trois *quarts*, ou 2 sols $=$ $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ d'une livre.

REGLE.

### REGLE.

*Multipliez tous les* numérateurs *ensemble pour avoir un autre* numérateur, *& tous les* dénominateurs *pour avoir le* dénominateur.

Ainsi $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ devient $\frac{6}{60}$ ou $\frac{1}{10}$; car $1 \times 3 \times 2 = 6$, *numérateur*, & $3 \times 4 \times 5 = 60$, *dénominateur*; mais $\frac{6}{60}$ ou $\frac{1}{10}$ d'une livre est 2 sols, comme ci-devant.

---

## SECTION II.

*Changer différentes Fractions en une seule dénomination, en conservant la même valeur.*

Pour bien comprendre cette section, il faut établir auparavant cette *proposition*, que si un *nombre multipliant* deux *nombres*, en produit d'*autres*, les *nombres* produits seront en même proportion que les *nombres multipliés*, c'est-à-dire que si le *numérateur* & le *dénominateur* d'une *fraction* sont également *multipliés* par un *nombre*, leurs *produits* auront la même valeur que cette *fraction*, comme dans ces exemples, $\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$, ou $\frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$, ou $\frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$, &c. c'est-à-dire $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{6}$, ou $\frac{2}{3}$ & $\frac{6}{9}$, ou $\frac{2}{3}$ & $\frac{10}{15}$ ont la même valeur par rapport à leur tout, ou à l'*unité*.

Par là on comprend aisément comment deux ou plusieurs *fractions* de différentes *dénominations* peuvent se changer en d'autres qui ayent un *dénominateur* commun, & qui retiennent toujours la même valeur.

*Exemple.* S'il faut changer $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{7}$ en deux autres *fractions* qui ayent un *dénominateur* commun, & qui retiennent la même valeur, on voit par la proposition précédente, que si l'on *multiplie* également $\frac{2}{3}$ par 7, cette *fraction* deviendra $\frac{14}{21}$, car $\frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{14}{21}$; de même si l'on *multiplie* également $\frac{3}{7}$ par 3, cette *fraction* deviendra $\frac{9}{21}$, car $\frac{3 \times 3}{7 \times 3} = \frac{9}{21}$, &

par ce moyen j'ai trouvé deux *fractions* $\frac{14}{21}$ & $\frac{9}{21}$ qui sont de même *dénomination*, & qui ont la même valeur que les deux proposées ; sçavoir, $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$, & $\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

Et de là suit la régle générale pour réduire toutes les *fractions* à la même *dénomination*.

## Regle.

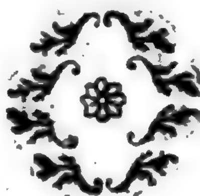
*Multipliez tous les* dénominateurs *l'un par l'autre pour avoir un nouveau (& commun)* dénominateur ; *& chaque* numérateur *par tous les autres* dénominateurs, *excepté par le sien propre, pour avoir de nouveaux* numérateurs.

## Exemple.

On propose les *fractions* $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, & $\frac{6}{7}$.

| Par la régle, on trouve ainsi le nouveau *dénom.* | Et les nouveaux *numérateurs* se trouveront ainsi : | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 5 | 5 | 3 | 3 | 3 |
| 15 | 5 | 6 | 9 | 18 |
| 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| 60 | 20 | 24 | 45 | 90 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 4 |
| 420 | 140 | 168 | 315 | 360 |

Donc 420 est le *dénominateur* commun, & 140, 168, 315, 360 sont les nouveaux *numérateurs*, qui étant placés à la maniere des *fractions*, donnent les nouvelles fractions requises, $\frac{140}{420}$, $\frac{168}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{360}{420}$, c'est-à-dire $\frac{140}{420} = \frac{1}{3}$, $\frac{168}{420} = \frac{2}{5}$, $\frac{315}{420} = \frac{3}{4}$, & $\frac{360}{420} = \frac{6}{7}$.



## SECTION III.

### *Changer les nombres mixtes en fractions, & au contraire.*

Les *nombres* mixtes sont changés en *fractions* impropres par la *régle* suivante.

### REGLE.

*Multipliez les* nombres *entiers par le* dénominateur *de la* fraction *donnée, &* ajoutez *à leur* produit *son* numérateur, *la somme sera le* numérateur *de la* fraction *requise.*

### *EXEMPLE.*

$9\frac{4}{5}$ devient par la *régle* $\frac{49}{5}$; car $\frac{9\times5}{5}=\frac{45}{5}$, & $\frac{45}{5}+\frac{4}{5}=\frac{49}{5}$, *fraction* impropre requise.

De même $13\frac{11}{15}$ devient $\frac{206}{15}$; car $\frac{13\times15}{15}=\frac{195}{15}$, & $\frac{195}{15}+\frac{11}{15}=\frac{206}{15}$, & ainsi des autres, selon l'occasion.

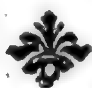
Trouver la vraie valeur d'une *fraction* impropre, c'est la converse de cette *régle*; car si $\frac{49}{5}=9\frac{4}{5}$, il est évident que si l'on *divise* 49 par 5, le *quotient* donnera $9\frac{4}{5}$; & si l'on *divise* 206 par 15, on aura $13\frac{11}{15}$, &c.

D'où il suit que *si l'on divise le* numérateur *d'une* fraction *impropre par son* dénominateur, *le* quotient *donnera la vraie valeur de cette* fraction.

### *EXEMPLES.*

$\frac{35}{7}=5$, $\frac{41}{9}=4\frac{5}{9}$, $\frac{121}{20}=6\frac{1}{20}$, $\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$, &c.

Lorsqu'on veut exprimer les *nombres* entiers à la maniere des *fractions*, on leur donne l'*unité* pour *dénominateur*; ainsi 45 est $\frac{45}{1}$, 9 est $\frac{9}{1}$, & 25 est $\frac{25}{1}$, &c.



## SECTION IV.

### *Abréger ou réduire les fractions à leur plus basse ou moindre dénomination.*

CELA ne se fait pas par nécessité, mais pour éviter l'embarras des trop grands *nombres* dans les *fractions*, & parce qu'il vaut mieux les exprimer aussi briévement qu'il est possible. Pour en venir à bout, il faut considerer les propositions suivantes.

*Les nombres sont ou premiers, ou composés.*

1°. Un *nombre premier* est celui qui ne peut se *mesurer* que par l'unité; ainsi 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. sont des nombres premiers, parce qu'il est impossible de les *diviser* en parties égales par un autre *nombre* que par l'*unité* ou 1.

2°. Les *nombres* qui sont *premiers* entr'eux sont ceux qui n'ont pour *mesure* commune que l'*unité*.

Par exemple, 17 & 13 sont des *nombres* premiers l'un à l'autre, parce qu'on ne peut les diviser que par l'unité. 9 & 14 sont aussi des *nombres* premiers l'un à l'autre, parce que quoique 3 puisse *mesurer* ou *diviser* 9 sans laisser aucun *reste*, cependant 3 ne peut pas *mesurer* 14 sans *reste*. De même quoique 2 puisse *mesurer* 14 sans aucun *reste*, 2 ne peut pas *mesurer* 9 sans *reste*.

3°. Un *nombre composé* est celui qui est *mesuré* par quelqu'autre *nombre*.

Par exemple, 15 est un *nombre composé* de 3 & de 5, car $5 \times 3 = 15$, & par conséquent 3 ou 5 *mesurent* exactement 15. De même 20 est composé de 5 & de 4, car $5 \times 4 = 20$; donc 5 & 4 *mesurent* exactement 20.

4°. Les *nombres composés* l'un à l'égard de l'autre, sont ceux qui ont pour commune *mesure* un *nombre*, c'est-à-dire que si deux ou plusieurs *nombres* peuvent être *divisés*

sans *reste* par un même *diviseur*, ces *nombres* seront dits composés les uns à l'égard des autres.

Par exemple, 14 & 21 sont des *nombres* composés l'un à l'égard de l'autre, parce qu'ils peuvent tous deux être *mesurés* ou *divisés* par 7; car $7 \times 2 = 14$, & $7 \times 3 = 21$; donc 7 est leur *mesure* commune: ensorte que s'il est question d'abréger $\frac{14}{21}$, on trouvera $\frac{2}{3}$ en cette maniere, $\left\{ \begin{matrix} 7)\ 14\ (2 \\ 7)\ 21\ (3 \end{matrix} \right\}$. On trouve les plus grandes *mesures* communes par ces propositions d'Euclide 7, *prob.* 1, 2, 3.

## REGLE.

*Divisez le plus grand* nombre *par le plus petit, & ce* diviseur *par le* reste (*s'il y en a*), *& ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste rien. Le dernier* diviseur *sera la plus grande* mesure *commune* (*& si le dernier* diviseur *est* 1; *ces* nombres *sont premiers entr'eux, & ils sont déja réduits à leurs moindres termes; mais s'il est plus grand que* 1), divisez *les nombres par le dernier* diviseur, *& leurs* quotiens *seront les moindres termes requis.*

## EXEMPLE.

On demande la plus grande *mesure* commune de 72 & 108, ou de $\frac{72}{108}$.

```
72 ) 108 ( 1
      72
     ---
     36 ) 72 ( 2   { puisqu'ici il n'y a point de reste, 36
          72       { est la plus grande mesure commune.
          ---
          (0)
```

Donc $\left\{ \begin{matrix} 36)\ 72 = 2 \\ 36)\ 108 = 3 \end{matrix} \right\}$ par conséquent $\frac{72}{108}$ est abrégée à $\frac{2}{3}$, ses moindres *termes*.

De même pour trouver la plus grande *mesure* com-

mune de 744 & 899, on aura

$$\begin{array}{l} 744\ )\ 899\ (\ 1 \\ \quad\quad\ \ 744 \\ \quad\quad\ \ \overline{155}\ )\ 744\ (\ 4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ 620 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ \overline{124}\ )\ 155\ (\ 1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 124 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overline{31}\ )\ 124\ (\ 4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 124 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overline{(0)} \end{array}$$

On voit ici que 31 eſt la plus grande *meſure* commune, par laquelle 744 & 899 peuvent s'abréger, & ſe réduire à 24 & 29, leurs moindres *termes*, en cette maniere,

$$\begin{array}{l} 31\ )\ \dfrac{744}{899} = \dfrac{24}{29} \\ 31\ ) \end{array}$$

Nota. *Si les deux* nombres *propoſés ſont pairs, on les abaiſſe en prenant continuellement leurs moitiés, autant qu'il eſt poſſible, ou les diviſant par 2.*

EXEMPLE.

Il faut réduire $\frac{56}{84}$ à ſes moindres *termes* : premierement $\frac{2}{2})\ \frac{56}{84}\ (= \frac{28}{42}$, $\frac{2}{2})\ \frac{28}{42}\ (= \frac{14}{21}$, ce qui étant fait, on voit aiſément que 7 eſt la commune *meſure* de 14 & 21, ou $\frac{7}{7})\ \frac{14}{21}\ (= \frac{2}{3}$, &c.

Si les *nombres* que l'on doit réduire ſont joints à un ou pluſieurs *zero*, on peut les abréger, en coupant le même nombre de *zero* de part & d'autre.

Ainſi $\frac{150}{300}$ ſera $\frac{15}{30}$, & $\frac{200}{300}$ ſera $\frac{2}{3}$, &c. c'eſt-à-dire $\frac{150}{300} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, & $\frac{200}{300} = \frac{2}{3}$, $\frac{360}{400} = \frac{36}{40} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$.

## SECTION V.

### *Addition des Fractions.*

Tout ce qu'on a fait par les *régles* précédentes n'a été principalement que pour préparer les *fractions* de différentes *dénominations* à l'*Addition* ou *Soustraction*, selon que l'occasion l'exige. Si ce sont des *fractions composées*, il faut les réduire aux *fractions simples* ou pures par la *régle* de la section premiere. Si elles sont de différentes *dénominations*, il faut les changer par la *régle*, sect. 2, c'est-à-dire que toutes les *fractions* doivent se réduire à une même *dénomination*, avant qu'on puisse les *ajouter* ou les *soustraire*; ce qui étant fait, on en fera l'*addition* en cette maniere.

#### Regle.

*Ajoutez ensemble tous les* numérateurs, *& leur* somme *sera un nouveau* numérateur, *sous lequel vous écrirez le* dénominateur commun.

#### *Exemple des Fractions simples.*

Si l'on veut ajouter $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$. Premierement $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$, $\frac{2}{5} = \frac{24}{60}$, & $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$, par la *sect.* 2; ensuite $\frac{20}{60} + \frac{24}{60} + \frac{45}{60} = \frac{89}{60}$, *somme* requise, qui par la *sect.* 3. est $1\frac{29}{60}$, car $\frac{89}{60} = 1\frac{29}{60}$.

#### *Exemple des Fractions composées.*

S'il faut ajouter $\frac{3}{7}$ & $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ en une *somme*. 1°. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ deviennent $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$, par la *sect.* 1re, & par la *sect.* 2. $\frac{3}{7}$ & $\frac{1}{2}$ sont $\frac{6}{14}$ & $\frac{7}{14}$; car $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$, & $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$; mais $\frac{6}{14} + \frac{7}{14} = \frac{13}{14}$, *somme* requise, c'est-à-dire $\frac{3}{7} + \frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4} = \frac{13}{14}$.

#### *Exemple des nombres mixtes.*

On veut ajouter $5\frac{2}{3}$ avec $7\frac{3}{4}$, on aura par la *sect.* 3. $\frac{17}{3}$ & $\frac{31}{4}$; mais $\frac{17}{3}$ & $\frac{31}{4}$ deviennent $\frac{68}{12}$, & $\frac{93}{12}$ par la *sect.* 2,

& $\frac{68}{12} + \frac{93}{12} = \frac{161}{12}$, & $\frac{161}{12} = 13\frac{5}{12}$, *somme* requise.

Ou bien on peut ne réduire que les seules *fractions* à la même *dénomination*, en cette maniere, $5\frac{2}{3}$, & $7\frac{3}{4}$ deviendront $5\frac{8}{12}$, & $7\frac{9}{12}$: or $5\frac{8}{12} + 7\frac{9}{12} = 12\frac{17}{12}$, c'est-à-dire $13\frac{5}{12}$, comme ci-devant.

---

## SECTION VI.

### SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

#### REGLE.

*Otez le moindre* numérateur *du plus grand*, *& leur difference sera un nouveau* numérateur, *sous lequel vous écrirez le* dénominateur *commun*, *comme dans l'*Addition.

#### EXEMPLE I^er^.

S'il faut ôter $\frac{2}{9}$ de $\frac{3}{7}$. 1°. $\frac{2}{9}$ & $\frac{3}{7}$ sont par la *sect.* 2 $\frac{14}{63}$ & $\frac{27}{63}$ : or $\frac{27}{63} - \frac{14}{63} = \frac{13}{63}$, c'est-à-dire $\frac{3}{7} - \frac{2}{9} = \frac{13}{63}$, *reste* requis.

#### EXEMPLE II.

Il faut de $\frac{13}{14}$ ôter $\frac{2}{3}$ de $\frac{8}{9}$. 1°. $\frac{2}{3}$ de $\frac{8}{9} = \frac{16}{27}$, par la *sect.* 1^re^; de plus $\frac{16}{27}$ & $\frac{13}{14}$ sont $\frac{224}{378}$, & $\frac{351}{378}$ par la *sect.* 2 : or $\frac{351}{378} - \frac{224}{378} = \frac{127}{378}$.

#### EXEMPLE III.

De $6\frac{1}{8}$ ôter $3\frac{19}{48}$. 1°. $6\frac{1}{8} = \frac{49}{8}$, & $3\frac{19}{48} = \frac{163}{48}$ par la *régle* de la *sect.* 3. De plus $\frac{49}{8} = \frac{54}{48}$, & $\frac{163}{48} - \frac{54}{48} = \frac{131}{48} = 2\frac{35}{48}$; ou autrement $6\frac{1}{8} = 5\frac{9}{8}$, & réduisant $\frac{9}{8}$ & $\frac{19}{48}$ à une même *dénomination*, on trouve $5\frac{54}{48}$, & $3\frac{19}{48}$, ensuite $5\frac{54}{48} - 3\frac{19}{48} = 2\frac{35}{48}$.

#### EXEMPLE IV.

De 7 ôter $\frac{3}{9}$ de $\frac{5}{9}$ de $\frac{2}{3}$. 1°. $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{9}$ de $\frac{2}{3} = \frac{30}{189}$, & $7 = 6\frac{189}{189}$ : or $6\frac{189}{189} - \frac{30}{189} = 6\frac{159}{189} = 6\frac{53}{67} = 7 - \frac{3}{7}$ de $\frac{5}{9}$ de $\frac{2}{3}$ qu'on avoit demandé.

Si l'on comprend bien ce petit nombre d'*exemples*, on ne trouvera plus de difficulté dans l'*addition* & *soustraction* des *fractions ordinaires*, qui sont pourtant deux opérations beaucoup plus difficiles que la *multiplication* & la *division*, comme on verra dans les *sections* suivantes.

---

## SECTION VII.

### *Multiplication des Fractions.*

Pour faire la *Multiplication* ou la *Division*, il faut préparer les *termes* qui doivent être *multipliés* (ou *divisés*) en cette maniere : réduisez les *fractions composées* à des *fractions simples*, par la *sect.* 1re. Réduisez les *nombres mixtes* en *fractions impropres*, & exprimez tous les *nombres à la maniere des fractions*, par la *sect.* 3. Il convient aussi de les réduire à leurs moindres *termes*, lorsqu'il est possible; alors on pourra faire la *multiplication* en cette maniere.

### Regle.

*Multipliez les* numérateurs *les uns par les autres pour avoir un nouveau* numérateur ; *& de même les* dénominateurs *les uns par les autres pour avoir un nouveau* dénominateur.

### *Exemples.*

1°. Le *produit* de $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{7} = \frac{6}{35}$, c'est-à-dire $\frac{2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$.

2°. Le produit de $\frac{9}{16}$ par $\frac{20}{27} = \frac{180}{432}$, ou $\frac{5}{12}$.

3°. Le produit de $\frac{7}{11}$ par $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{7} = \frac{70}{385}$ ou $\frac{2}{11}$, car $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{7} = \frac{10}{35}$, & $\frac{7}{11} \times \frac{10}{35} = \frac{70}{385}$ ou $\frac{2}{11}$.

4°. S'il faut *multiplier* 6 par $3\frac{2}{5}$, la préparation donnera $\frac{6}{1} \times \frac{17}{5}$, car $6 = \frac{6}{1}$, & $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$ : or $\frac{6}{1} \times \frac{17}{5} = \frac{102}{5}$, ou $20\frac{2}{5}$ ; ou autrement, $6 \times 3 = 18$, & $\frac{2}{5} \times 6 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ : or $18 + 2\frac{2}{5} = 20\frac{2}{5}$, comme auparavant.

5°. Si l'on veut *multiplier* $7\frac{4}{9}$ par $5\frac{3}{7}$. 1°. $7\frac{4}{9} = \frac{67}{9}$, & $5\frac{3}{7} = \frac{38}{7}$ : or $\frac{67}{9} \times \frac{38}{7} = \frac{2546}{63} = 40\frac{26}{63}$.

La raison de cette *régle* de *Multiplication* des *fractions* paroîtra évidemment par ce qui suit. Si je multiplie $\frac{4}{2}$ par $\frac{12}{3}$, selon la *régle*, leur *produit* sera $\frac{48}{6}$; mais $\frac{48}{6} = 8$, d'un autre côté $\frac{4}{2} = 2$, & $\frac{12}{3} = 4$, par la *sect.* 3, mais $4 \times 2 = 8$; donc la régle est bonne.

---

## SECTION VIII.

### *DIVISION DES FRACTIONS.*

LES *fractions* étant préparées comme ci-devant, on pourra faire la *Division* en cette maniere.

#### REGLE.

*Multipliez le* numérateur *du* dividende *par le* dénominateur *de la* fraction, *qui est le* diviseur, *vous aurez le* numérateur *du* quotient; *& multipliez l'autre* numérateur *par l'autre* dénominateur *pour avoir un nouveau* dénominateur.

#### *EXEMPLES.*

1°. S'il faut *diviser* $\frac{6}{35}$ par $\frac{3}{7}$, on aura $\frac{3}{7}$ ) $\frac{6}{35}$ ( $\frac{42}{105} = \frac{2}{5}$ *quotient*, c'est-à-dire selon la *régle* $6 \times 7 = 42$, nouveau *numérateur*, $35 \times 3 = 105$, nouveau *dénominateur*, &c.

2°. On veut *diviser* $\frac{20}{27}$ par $\frac{5}{12}$, on a $\frac{5}{12}$ ) $\frac{20}{27}$ ( $\frac{240}{135} = 1\frac{7}{9}$, car $12 \times 20 = 240$, nouveau *numérateur*, & $27 \times 5 = 135$, nouveau *dénominateur*, &c.

3°. Si l'on veut *diviser* $\frac{2}{11}$ par $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{7}$. 1°. $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{7} = \frac{10}{35}$, & $\frac{10}{35}$ ) $\frac{2}{11}$ ( $\frac{70}{110} = \frac{7}{11}$.

4°. Pour *diviser* $20\frac{2}{5}$ par $3\frac{2}{5}$, c'est-à-dire $\frac{102}{5}$ par $\frac{17}{5}$, car $20\frac{2}{5} = \frac{102}{5}$, & $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$, on aura $\frac{17}{5}$ ) $\frac{102}{5}$ ( $= 6$, *quotient*.

5°. Pour *diviser* $40\frac{26}{63}$ par $5\frac{3}{7}$. 1°. $40\frac{26}{63} = \frac{2546}{63}$, & $5\frac{3}{7} = \frac{38}{7}$: or $\frac{38}{7}$ ) $\frac{2546}{63}$ ( $\frac{17822}{2394}$; mais $\frac{17822}{2394} = 7\frac{4}{9}$, vrai *quotient* requis.

6°. S'il faut *diviser* 13 par $\frac{5}{7}$; 1°. $13 = \frac{13}{1}$, & $\frac{5}{7}$ ) $\frac{13}{1}$ ( $\frac{91}{5} = 18\frac{1}{5}$, *quotient*.

7°. Si l'on veut *diviser* $\frac{5}{7}$ par 6, on aura $\frac{6}{1}$ ) $\frac{5}{7}$ ( $\frac{5}{42}$ pour le *quotient* requis.

Par là on voit que lorsqu'un *nombre entier* est divisé par une *fraction* moindre que l'*unité* ou 1, le *quotient* est plus grand que le *dividende*; mais si une *fraction* est divisée par un *nombre entier* plus grand que 1, le *quotient* est plus petit que le *dividende*, comme on voit dans les deux derniers exemples.

Pour ce qui est de la *raison* de cette *régle* de *division* des *fractions*, ce n'est que la *converse* de celle de la *multiplication*, & elle paroît évidemment par ce qui suit. Soit $\frac{48}{6}$ divisé par $\frac{4}{2}$; on a, selon la régle $\frac{4}{2}$ ) $\frac{48}{6}$ ( $\frac{96}{24} = 4$, vrai *quotient*; mais $\frac{48}{6} = 8$, & $\frac{4}{2} = 2$ par la *sect.* 3 : donc $\frac{48}{6}$ divisé par $\frac{4}{2}$ est le même que 8 divisé par 2, ou 2 ) 8 ( 4, même *quotient* qu'auparavant.

---

# CHAPITRE V.

## *DES FRACTIONS DECIMALES.*

ON ne sçait pas qui a introduit cette excellente invention de l'*Arithmétique décimale*, ni en quel tems elle a été imaginée; mais il est hors de doute que c'est dans ces dernieres années qu'elle a fait de grands progrès, & qu'elle est arrivée à la perfection où elle est aujourd'hui *.

---

## SECTION PREMIERE.

### *De la Notation ou Expression.*

DANS les *fractions décimales*, on suppose que l'*entier* ( soit que ce soit *monnoie*, *poids*, *mesure* ou *tems*, &c. ) est divisé en *dix parties égales*, & que chacune de ces *dix parties*

* Voyez le *Dictionnaire universel de Mathématiques* de M. Saverien, Articles *Arithmétique decimale*, & *Fract.*

est sous-divisée en *dix autres parties égales*, &c. à l'*infini*. L'*entier* étant ainsi *divisé* (*par la pensée*) en 10, 100, 1000, 10000, &c. *parties égales*, ces nombres deviennent les *dénominateurs* des *fractions décimales*; comme $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$, $\frac{53}{10000}$, $\frac{754}{100000}$, &c. Mais on n'écrit que très-rarement ou presque jamais ces *dénominateurs*, on se contente d'écrire les *numérateurs*, qui sont séparés des *nombres entiers* par un *point* ou une *virgule*. Ainsi 5, 4 signifie $5\frac{4}{10}$, 0, 7, signifie $\frac{7}{10}$, 35, 05 signifie $35\frac{5}{100}$, &c.

Mais avant que d'en venir à tout le détail de la *notation*, il est bon de considerer la *Table* suivante (tirée du Livre d'*Oughtred*, intitulé : *Clavis Mathematica*). Elle fait voir quel est le vrai principe des *fractions décimales*.

| *Nombres entiers.* | | | | | | *Parties décimales.* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0, | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *&c.* | *Dixaines de mille.* | *Mille.* | *Centaines.* | *Dixaines.* | *Place des unités.* | *Parties de dix.* | *Parties de cent.* | *Parties de mille.* | *Parties de dix mille.* | *Parties de cent mille.* | *Parties de million.* |

Il est évident par cette *Table*, que comme dans les *nombres entiers* chaque degré, depuis la place des *unités* vers la main gauche, croît en *proportion décuple*; ainsi dans les *parties décimales* chaque *degré* décroît vers la main droite dans la même *proportion décuple*, par conséquent ces *fractions* ou *parties décimalos*, sont réellement plus *homogenes*, ou semblables aux *nombres entiers* que les *fractions ordinaires*; car tous les *nombres* ne sont en effet que les *parties décimales* les uns des autres, c'est-à-dire qu'en supposant une suite de *nombres éganx*, comme 444, &c :

Le premier 4 à main gauche vaut dix fois autant que 4

du milieu, & le 4 du milieu dix fois autant que le dernier 4 à main droite, qui n'eſt que la dixiéme partie de 4 à main gauche, &c.

Donc on peut les prendre tous ou quelques-uns ſeulement pour des *nombres entiers*, ou pour des parties d'un *entier*. Si on les prend pour des *entiers*, il faut les écrire ſans aucune *virgule* ou *point* qui les ſépare, comme 444; mais ſi l'on prend les uns pour *entiers*, & un autre pour une *partie* ou *fraction*, il faut ſéparer les *entiers* de la *fraction* par une *virgule* en cette maniere, 44,4, ce qui ſignifie 44 nombres entiers, & quatre dixiémes d'une *unité*. Si l'on veut avoir deux places de fractions, on les ſépare par une virgule en cette maniere, 4,44, c'eſt-à-dire quatre *unités*, & 44 *centiémes* d'une *unité*, &c.

De là (en faiſant bien la comparaiſon avec la Table), on conçoit aiſément que les *parties décimales* prennent leur *dénomination* de la place où ſe trouve leur derniere *figure*,

c'eſt-à-dire $\left\{\begin{array}{l} ,5 = \frac{5}{10} \\ ,56 = \frac{56}{100} \\ ,056 = \frac{56}{1000} \end{array}\right\}$ *parties* de l'*unité*, &c.

Les *zero* que l'on joint aux *parties décimales*, ne changent pas leur valeur, comme 50 & 500, ou 5000, &c. ne ſont chacune que cinq dixiémes de l'*unité*, car $\frac{50}{100} = \frac{5}{10}$, & $\frac{500}{1000} = \frac{5}{10}$; ou $\frac{5000}{10000} = \frac{5}{10}$, par la ſect. IV. du dernier chapitre.

Mais les *zero* qui ſont avant les *parties décimales* à main gauche, diminuent leur valeur en les éloignant de la virgule.

Ainſi $\left\{\begin{array}{l} ,5 = 5 \textit{ dixiémes.} \\ ,05 = 5 \textit{ parties de cent.} \\ ,005 = 5 \textit{ parties de mille.} \\ ,0005 = 5 \textit{ parties de dix mille}, \text{\&c.} \end{array}\right.$

Par conſéquent la vraie *valeur* de toutes les *parties décimales* ſe trouve par leur diſtance à la place des *unités*, ce qui étant une fois bien compris, le reſte ſera aiſé.

## SECTION II.

### *Addition & Soustraction des nombres décimaux.*

En écrivant les *nombres* proposés que l'on doit *ajouter* ou *soustraire*, il faut avoir grand soin de placer chaque *figure* directement sous celles qui sont de même valeur, soit que ce soient des *nombres mixtes* ou des *fractions décimales* seulement ; & pour cela, il faut faire bien attention aux *virgules* ou aux *points* qui les séparent : ces virgules ou ces points doivent toujours être directement les uns sous les autres, & l'on doit placer exactement à leur droite les *fractions décimales*, selon leurs valeurs respectives, ou distances de l'*unité* ; ensuite on observera cette *régle*.

### REGLE.

*Ajoutez ou retranchez ces* nombres *comme s'ils étoient tous des* nombres entiers, *& de leur* somme *ou* différence, *coupez autant de figures décimales qu'il y en a dans celui des* nombres *donnés, où elles sont plus nombreuses.*

### *Exemples dans l'Addition.*

On demande la *somme* des *nombres* suivans, 34, 5 + 65, 3 + 128, 7 + 95 + 87, 8 + 7, 9 ; si on les place bien,

on aura
34, 5
65, 3
128, 7
95, 0
87, 8
7, 9
―――――
419, 2. Leur *somme* requise.

### EXEMPLE II.

Il faut trouver la somme de 25, 854 + 34, 578 + 9, 076 + 13, 907.

25, 854
34, 578
9, 076
13, 907

83, 415 *Somme* requise.

Lorsque les *fractions décimales* qu'il faut *ajouter* (ou *soustraire*) n'ont pas toutes le même *nombre* de places, il est bon d'y suppléer, & de remplir les places vuides par des *zero*, comme dans les *exemples* suivans.

| EXEMPLE III. | EXEMPLE IV. | EXEMPLE V. |
|---|---|---|
| 45, 0700 | 574, 678953 | 0, 975642 |
| 50, 7580 | 95, 796430 | , 745257 |
| 123, 0057 | 78, 054600 | , 000598 |
| 74, 7020 | 54, 789000 | , 800700 |
| 24, 8000 | 8, 900000 | , 640530 |
| 318, 3357 *Somme.* | 812, 218983 | 3, 162727 |

## *Exemples dans la Soustraction.*

Il faut trouver la différence entre 45, 375, & 74, 284;

| EXEMPLE I. | EXEMPLE II. | EXEMPLE III |
|---|---|---|
| c'est-à-dire de 74, 284 | De 437, 5 | De 75, 0034 |
| ôter 45, 375 | ôter 89, 657 | ôter 57, 875 |
| *reste* 28, 909 | 347, 843 *reste.* | 17, 1284 |

| EXEMPLE IV. | EXEMPLE V. |
|---|---|
| De 562, | De 345, 7578 |
| ôter 93, 5784 | ôter 157, |
| *excès* 468, 4216 | 188, 7578 |

*Nota.* On suppose dans ces deux derniers *exemples* les places vuides remplies de *zero*; si on l'avoit fait réellement,

| | | | |
|---|---|---|---|
| on auroit | 562, 0000 <br> 93, 5784 | & | 345, 7578 <br> 157, 0000 |
| *Reste* | 468, 4216 | *comme auparavant,* | 188, 7578 |

| EXEMPLE VI. | | EXEMPLE VII. | |
|---|---|---|---|
| De | 0, 547893 | De | 1, 000000 |
| ôter | 0, 439758 | ôter | 0, 997543 |
| | 0, 108135 | | 0, 002457 |

La *preuve* de l'*Addition* & *Soustraction* est la même dans les *nombres décimaux* que dans les *nombres entiers*.

---

## SECTION III.

### *MULTIPLICATION DES DÉCIMAUX.*

Soit que les *facteurs* ou *nombres à multiplier* soient de pures *fractions décimales*, ou des *nombres mixtes*, il faut les multiplier comme s'ils étoient tous des *nombres entiers*; & pour avoir la vraie valeur de leur *produit*, il faut observer cette *régle*.

### REGLE.

*Coupez (ou séparez par une* virgule *) autant de places de* fractions décimales *dans le* produit *qu'il y en a dans les deux* facteurs *pris ensemble.*

| EXEMPLE I. | EXEMPLE. II. |
|---|---|
| 3,024 | 32,12 |
| 2,23 | 24,3 |
| 9072 | 9636 |
| 6048 | 12848 |
| 6048 | 6424 |
| 6,74352 | 780,516 |

La raison pourquoi on doit couper dans le *produit* autant de places de *fractions décimales*, peut se tirer aisément de ces *exemples*, en cette maniere :

Dans l'*exemple I*, il est évident que 3, *nombre* entier dans

dans le *multiplicande*, étant multiplié par 2, *nombre* entier dans le *multiplicateur*, ne peut produire que 6 (car $3 \times 2 = 6$) : de ſorte que néceſſairement toutes les autres *figures* dans le *produit* ſeront des *fractions décimales*, conformément à la *régle*. D'ailleurs, la *régle* eſt évidente par la ſeule *multiplication* des *nombres entiers* ; car ſi l'on *multiplie* 3000 par 200, le *produit* ſera 600000, c'eſt-à-dire qu'il aura autant de *zero* qu'il y en a dans les deux facteurs (comme on l'a fait voir ci-devant dans la *multiplication* des *entiers*). Donc ſi au lieu de ces *zero* dans les *facteurs* on ſuppoſe le même *nombre* de *fractions décimales*, il ſuit que le *produit* doit avoir le même *nombre* de *fractions décimales* qu'il y auroit eu de *zero* dans les *facteurs*.

De plus, on peut encore rendre cette *régle* évidente par les *fractions ordinaires* en cette maniere : ſoit à *multiplier* 32, 12 par 24, 3 leur *produit* ſera comme dans l'*exemple II*, 780, 516 ; mais $32, 12 = 32 \frac{12}{100}$, & $24, 3 = 24 \frac{3}{10}$, ce qui étant réduit en *fractions impropres* donne $32 \frac{12}{100} = \frac{3212}{100}$, & $24 \frac{3}{10} = \frac{243}{10}$ : or $\frac{3212}{100} \times \frac{243}{10} = \frac{780516}{1000}$ ; mais $\frac{780516}{1000} = 780 \frac{516}{1000}$, c'eſt-à-dire 780, 516, comme ci-devant.

Je crois que chacune de ces trois méthodes prouve ſuffiſamment la vérité de la *régle* précédente.

| EXEMPLE III. | EXEMPLE IV. |
|---|---|
| 78,546 | 5745 |
| 43,6 | ,0675 |
| 471276 | 28725 |
| 235638 | 40215 |
| 314184 | 34470 |
| 34246,056 | 387,7875 |

*Remarque.* Il arrive ſouvent en multipliant les *fractions décimales* les unes par les autres, qu'il n'y a pas dans le *produit* autant de *figures* qu'il doit y avoir de places pour les *parties décimales* ſelon la *régle* : en ce cas, il faut

remplir ce vuide en joignant des *zero* au *produit* à main gauche, comme dans les exemples suivans.

| EXEMPLE V. | EXEMPLE VI. |
|---|---|
| ,2365 | ,0347 |
| ,2435 | ,0236 |
| 11825 | 2082 |
| 7095 | 1041 |
| 9460 | 694 |
| 4730 | ,00081892 |
| ,05758775 | |

Lorsqu'on veut multiplier les *nombres décimaux* par 10, 100, 1000, 10000, &c. on ne fait autre chose qu'éloigner le point de séparation dans le *multiplicande* d'autant de places à main droite qu'il y a de *zero* dans le *multiplicateur*.

Ainsi ,578 × 10 = 5, 78, & ,578 × 100 = 57,8 ,578 × 1000 = 578, & ,578 × 10000 = 5780.

Si l'on a bien fait toutes ces réflexions, on multipliera aisément les *nombres décimaux*, & l'on déterminera leurs vrais *produits*, comme dans les exemples suivans.

57,056 *multiplié* par 0,578 doit *produire* 32,978368.
7,6543 par 5,4246 *produira* 41,52151578.

0,56879 × 0,05674 = 0,0322731446
0,03246 × 0,02364 = 0,0007672544
87649 × 0,03687 = 3231,61863
94,35786 × 6,57869 = 620,751110034
3,141592 × 52,7438 = 165,6995001296

Il arrive souvent qu'on n'a pas besoin d'exprimer au long toutes les *figures* du *produit* (sur-tout lorsque les *facteurs* ont chacun un grand nombre de places de *parties décimales*, comme dans les deux derniers *exemples*), on veut seulement en garder un certain nombre, selon le dessein que l'on a, & abréger tellement la *multiplication*,

que le *produit* ſoit auſſi vrai pour les *figures* que l'on retient qu'il l'auroit été ſi les *facteurs* avoient été *multipliés* au long. Ces ſortes d'abrégés ne ſont pas de ſimple curioſité, mais ils ſont d'un grand uſage dans la pratique, ſur-tout pour *réſoudre les équations affectées*, ou pour calculer les *problêmes trigonométriques* par les *ſinus naturels*, *tangentes*, &c. ce qui ſe fait ainſi.

### REGLE.

*Ecrivez les* unités *du* multiplicateur, *ou le* zero *qui tient leurs places directement ſous la* figure *du* multiplicande, *dont vous voulez conſerver la place dans le* produit, *&* *écrivez toutes les autres* figures *du* multiplicateur *dans un ordre entierement contraire à l'ordre ordinaire ; enſuite en* multipliant, *commencez toujours par la* figure *du* multiplicande, *qui eſt au deſſus de celle par laquelle vous* multipliez, *en écrivant toutes les premieres* figures *de chaque* produit *particulier, directement les unes ſous les autres ; mais il faut avoir égard à l'augmentation qui réſulteroit des deux* figures *ſuivantes à main droite de celle du* multiplicande, *par où vous commencez à* multiplier.

### EXEMPLE.

On veut multiplier 3, 141592 par 52, 7438, & ne retenir dans le *produit* que quatre places de *parties décimales*.

Si l'on vouloit multiplier ces *nombres* au long, on les écriroit directement à la maniere ordinaire, comme on voit ici : $\left\{\begin{array}{r} 3{,}14\,1592 \\ 52{,}7438 \end{array}\right\}$ & ils produiroient dix places de *décimales*, comme dans le dernier *exemple*.

Mais comme on ne veut avoir que quatre places de ces *parties décimales* dans le *produit*, il faut écrire ces *nombres* ſelon la *régle* précédente, en cette maniere :

| | |
|---|---|
| 3,141 592. | *Multiplicande* placé à l'ordinaire. |
| 8 347,25 | *Multiplicateur* dans un ordre renversé, & sa quatriéme décimale sous les *unités*. |
| 1 570 796 | *Produit* par 5, eu égard à cinq fois 2. |
| 62 832 | *Produit* par 2, augmenté par 9 × 2. |
| 21 991 | *Produit* par 7, augmenté par 5 × 7 + 9 × 7. |
| 1 256 | *Produit* par 4, augmenté par 1 × 4 + 5 × 4. |
| 94 | *Produit* par 3, augmenté par 4 × 3. |
| 25 | *Produit* par 8, augmenté par 4 × 8 + 1 × 8. |
| 165,6995 | Vrai *produit* requis. |

La raison de cette contraction se tire fort aisément de toute l'opération faite au long en cette maniere :

| | |
|---|---|
| 3,141592 | |
| 52,7438 | |
| 25 | 132736 |
| 94 | 24776 |
| 1256 | 6368 |
| 21991 | 144 |
| 62831 | 84 |
| 1570796 | 0 |
| 165,6995 | 001296 |

*Par où l'on voit évidemment que toutes les figures qui sont à main droite dans le quarré, ont été négligées dans le premier calcul abrégé, & que tous les produits particuliers qu'on y avoit trouvé sont ici renversés, ensorte que le premier est le dernier hors du quarré à main gauche ; ce qui fait voir clairement la raison qu'on a eu de placer le multiplicateur dans un ordre renversé.*

## EXEMPLE II.

Il faut multiplier 257, 356 par 76, 48, & avoir seulement le *produit* des *entiers*.

| |
|---|
| 257,356 |
| 84,67 |
| 180,15 |
| 1544 |
| 103 |
| 20 |
| 19682 |

La même *Multiplication* étendue.

| | |
|---|---|
| 257,356 | |
| 76,48 | |
| 20 | 58848 |
| 102 | 9424 |
| 1544 | 136 |
| 18014 | 92 |
| 19682 | 58688 |

La plus grande difficulté de ce calcul abrégé consiste à bien placer les *unités* du *multiplicateur* sous la *figure* convenable du *multiplicande*, selon le *produit* que l'on veut avoir.

Dans l'*exemple I.* on vouloit avoir quatre places de *parties décimales* dans le *produit*, c'est pour cela que la place des *unités* du *multiplicateur* a été écrite sous la quatriéme place des *décimales* du *multiplicande*; & dans l'*exemple II*, parce qu'on ne vouloit avoir que le *produit* des *entiers*, on a écrit les *unités* du *multiplicateur* sous les *unités* du *multiplicande*; ce qui étant bien entendu, la méthode deviendra aisée dans la pratique.

---

## SECTION IV.

### *DIVISION DES DÉCIMALES.*

On regarde la *Division* comme la partie la plus difficile de l'*Arithmétique décimale*; ainsi pour la rendre claire & aisée, il est à propos de rappeller ici ce que nous avons dit au commencement de la *section* sur la *division* des nombres entiers; sçavoir : Que la *figure du quotient* est toujours de même valeur ou de même degré que celle du *dividende*, sous laquelle on place les *unités* du produit du *diviseur* par le *quotient*.

Par exemple, si l'on *divise* 294 par 4, on aura

4) 294 ( 7 { Cette *figure* n'est pas 7, mais 70, parce que les *unités* du *produit* de 4 par 7 sont sous les *dixaines* du *dividende*.
28
———
44 ( 3. Celle-ci n'est que 3.
12
———
*Reste* (2). Ainsi $73\frac{2}{4}$ est le *quotient*.

Maintenant si l'on ajoutoit au *reste* 2 un *zero*, comme 2, 0, & si l'on continuoit la *division* par 4, il suit nécessaire-

sairement que les *unités* du *produit* qui résulteroit du *diviseur* par le *quotient*, seroient placées sous ce *zero*, & que par conséquent la figure du *quotient* seroit de même valeur ou de même degré que la place de ce *zero*; mais cette place est immédiatement au dessous de celle des *unités*; donc la *figure* du *quotient* est du degré inférieur immédiatement à l'*unité*, c'est-à-dire dans la premiere place des *décimales*, en cette maniere : 4 ) 2 , 0 ( , 5

Ensorte que 4 ) 294 , 0 ( 73 , 5 vrai *quotient* requis.

Ce qui étant bien compris, la *Division* des *nombres décimaux* se fera aisément ( dans tous les différens cas ). Néanmoins pour la rendre plus claire & plus facile, même à la portée de la moindre capacité, s'il est possible, je vais rappeller l'idée que j'ai donné de la *Division* dans la même *section*; sçavoir, que si le *nombre* qui en divise un autre est multiplié par le *nombre* qui en résulte, leur *produit* sera le *nombre divisé*.

Cette définition seule ( étant comparée avec la *régle* de la section précédente sur la *Multiplication* des *nombres décimaux* ) nous fournira une *régle générale* pour trouver la vraie valeur des *figures* du *quotient* dans la division des *nombres décimaux*.

REGLE.

*Les places des* parties décimales *du* diviseur *& du* quotient *étant jointes ensemble, seront toujours égales en* nombre *à celles du* dividende, *& cette* régle générale *fournit quatre cas particuliers.*

*Premier cas.* Lorsque les places des *parties décimales* du *diviseur* & du *dividende* sont égales en *nombre*, le *quotient* n'a que des *nombres* entiers, comme dans ces *exemples*.

| | |
|---|---|
| 8 , 45 ) 295 , 75 ( 35 | 0 , 0078 ) , 4368 ( 56 |
| 2535 | 390 |
| 4225 | 468 |
| 4225 | 468 |
| (0) | (0) |

*Second cas.* Lorſque les places des *parties décimales* du *dividende* ſurpaſſent celles du *diviſeur*, il faut couper dans le *quotient* l'excès des *décimales*, comme dans ces *exemples.*

```
24,3) 780,516 (32,12
      729
      ---
       515
       486
       ---
        291
        243
        ---
         486
         486
         ---
         (0)
```

```
436) 34246,056 (78,546
     3052
     ----
      3726
      3488
      ----
       2380
       2180
       ----
        2005
        1744
        ----
         2616
         2616
         ----
         (0)
```

```
,534) ,30438 (,57
       2670
       ----
        3738
        3738
        ----
        (0)
```

*Troiſiéme cas.* Lorſqu'il n'y a pas autant de places de *parties décimales* dans le *dividende* que dans le *diviſeur*, il faut joindre au *dividende* autant de *zero* qu'il eſt néceſſaire, pour rendre égal le nombre des places, & le *quotient* ne ſera compoſé que de *nombres entiers*, comme dans le *premier cas.*

*Quatriéme cas.* Si après que la *Diviſion* eſt finie, il n'y

a pas autant de *figures* dans le *quotient* qu'il doit y avoir de places de *parties décimales* par la régle générale, il faut remplir ce vuide par autant de *zero* à main gauche.

EXEMPLES.

On veut diviser 7,25406 par 957.

```
957 ) 7,25406 ( ,00758
      6 699
      -----
       5550
       4785
       -----
        7656
        7656
        ----
         (0)
```

```
De même, 575 ) ,0007475 ( ,0013
                 575
                 ----
                 1725
                 1725
                 ----
                  (0)
```

*Nota.* Lorsque les *nombres décimaux* doivent être divisés par 10, 100, 1000, 10000, &c. c'est-à-dire lorsque le *diviseur* est l'*unité* jointe aux *zero*, la *Division* se fait en éloignant ou plaçant le point de séparation dans le *dividende*, à la distance d'autant de places à la main gauche qu'il y a de *zero* dans le *diviseur*.

EXEMPLES.

10 ) 5784 ( 578,4. 100 ) 5784 ( 57,84

1000 ) 5784 ( 5,784. 10000 ) 578,4 ( ,05784.

*Ces opérations sont contraires à celles de la section précédente.*

Je crois qu'il n'est pas nécessaire de donner un plus grand nombre d'*exemples* au long, il suffit d'indiquer

quelques *dividendes* & *diviseurs* avec leurs *quotients*, où l'on trouvera toutes les variétés qui peuvent arriver dans la Division des *nombres décimaux*.

| | |
|---|---|
| 574 ) 493066 ( 859 . | 5,74 ) 493066 ( 8,59 |
| 574 ) 493,066 ( ,859 | 5,74 ) 493066,00 ( 85900 |
| 574 ) 49,3066 ( ,0859 | ,0574 ) 493,0660 ( 8590 |
| 5,74 ) 4930,66 ( 859 | ,0574 ) ,493066 ( 8,59 |

Il y a aussi une maniere abrégée de *Division*, semblable à celle de la *Multiplication*, laquelle épargne beaucoup de travail, sur-tout lorsque le *diviseur* a beaucoup de *fractions décimales* : en voici la *régle*.

Lorsqu'on a déterminé combien on doit avoir de places de *nombres entiers* dans le *quotient*; si l'on doit en avoir quelqu'une, ou de quelle valeur où doit être la premiere *figure* du *quotient*, il faut omettre ou couper une *figure* du *diviseur* à chaque opération, c'est-à-dire que pour chaque *figure* que l'on place dans le *quotient*, on en coupera une du *diviseur*, ayant égard à l'augmentation qui résulte de la *figure* ainsi omise, & l'on finira la *Division* lorsqu'on aura le nombre requis des *figures*.

EXEMPLE.

On veut diviser 70, 23 par 7, 9863.

*Opération abrégée.*

```
7,9863 ) 70,2300 ( 8,7938
  ....
         63 8904
         -------
          6 3396
          5 5904
          ------
            7492
            7187
            ----
             305
             239
             ---
              66
              64
             ---
             (2)
```

*La même opération au long.*

```
7,9863 ) 70,2300 ( 8,7938
         63 8904
         ----------
          6 3396 | 0
          5 5904 | 1
         ------- -----
            7491 | 90
            7187 | 67
            ---- -----
             304 | 230
             239 | 589
             --- -----
              64 | 6410
              63 | 8904
              -- -----
               0 | 7506
```

Je crois que l'opération est si facile ( étant comparée avec la même faite au long ), qu'il est inutile d'en donner une plus grande explication.

---

## SECTION V.

### *Réduire les Fractions ordinaires en décimales, & au contraire.*

Toute *fraction ordinaire* étant donnée, on peut la réduire, ou plutôt la changer en *parties décimales* équivalentes, en cette maniere.

### REGLE.

*Joignez des* zero *au* numérateur, *& divisez-le ensuite par le* dénominateur, *le* quotient *donnera les* parties décimales *équivalentes à la* fraction *donnée, ou au moins elles en approcheront autant qu'on le jugera nécessaire.*

EXEMPLES.

On veut changer ou réduire $\frac{3}{4}$ en *décimales.*

4 ) 3,00 ( ,75 , *parties décimales* requiſes, c'eſt-à-dire $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} =$ ,75.

De même $\frac{1}{2} =$ ,5 en cette maniere : 2 ) 1,0 ( ,5 & $\frac{1}{4} =$ ,25 . 4 ) 1,00 ( ,25.

Si l'on veut changer $\frac{4}{7}$ en *décimales*, on aura

7 ) 4,0000000000 ( ,5714285714, &c. $= \frac{4}{7}$.

*Nota.* Lorſqu'il arrive que la derniere *figure* du *diviſeur* ( c'eſt-à-dire du *dénominateur* de la *fraction* propoſée ) eſt une de ces *figures*, 1, 3, 7 ou 9 ( comme dans le dernier *exemple* ), on ne peut pas trouver des *parties décimales* qui ſoient préciſément égales à la *fraction* donnée ; mais en continuant la *Diviſion*, elles approchent beaucoup de la vérité, comme dans cet *exemple* : Changer $\frac{1}{13}$ en *parties décimales.*

13 ) 1,0000 ( ,076923076923 07, &c. *à l'infini.*

```
91..
----
 90
 78
----
 120
 117
----
  30
  26
----
   40
   39
----
```

C'eſt-à-dire 0,07692307692307 $= \frac{1}{13}$ *preſque* ; & à cette occaſion on peut encore remarquer que dans ces *quotients* imparfaits, les *figures* reviennent & circulent dans le même ordre qu'auparavant, comme on peut aiſément s'appercevoir qu'elles le font à la ſeptiéme place de ces deux derniers *exemples.*

10, &c. comme au commencement.

Ce qui étant bien compris, on trouvera aiſément les *parties décimales* équivalentes à une partie, ou à des parties connues de *monnoies*, *poids*, *meſures*, *tems*, &c. ſi l'on réduit d'abord les *parties* données de monnoies, &c.

en *fraction ordinaire*, dont le *dénominateur* eſt le nombre de ces *parties* connues qui ſont contenues dans l'*entier*, & dont les *parties* données ſont le *numérateur*.

*Exemples ſur les Monnoies, &c.*

1°. On veut trouver les décimales de 16 *ſols* 6 *deniers*.

Premierement, 16 *ſols* $= \frac{16}{20}$ d'une *livre*, & 6 *dén.* $= \frac{1}{40}$ d'une *livre*; mais $\frac{16}{20} + \frac{1}{40} = \frac{33}{40}$, & 40 ) 33,000 ( ,825 *parties décimales* requiſes, c'eſt-à-dire ,825 = 16 *ſ.* 6 *d.*

De même ſi l'on veut avoir des *décimales* égales à 3 *liv.* 13 *ſols* 4 *den.* Ici 3 *liv.* ſont trois *entiers*, & 13 *ſ.* $= \frac{13}{20}$ d'une *livre*, 4 *den.* $= \frac{4}{240}$; mais $\frac{13}{20} + \frac{4}{240} = \frac{160}{240}$, & 240 ) 160,000 ( ,666666, &c. Donc 3 *liv.* 13 *ſ.* 4 *d.* = 3,666666, &c.

2°. Quelles ſont les *décimales* égales à $7\frac{3}{4}$ *pouces*, en prenant un *pied* pour l'*entier*. 1°. 7 pouces ſont $\frac{7}{12}$ d'un pied, & $\frac{3}{4}$ d'un pouce en ſont $\frac{3}{48}$; mais $\frac{7}{12} + \frac{3}{48} = \frac{31}{48}$, & 48 ) 31,000 ( ,64583, &c. = $7\frac{3}{4}$ pouces.

C'eſt ainſi qu'on peut réduire toutes les *parties* propoſées de *monnoies*, *meſures*, *poids*, &c. en *parties décimales*; ce qui paroît d'abord un peu ennuyeux dans la pratique; mais lorſqu'on y eſt exercé, on le trouve fort aiſé, & un bon Praticien (avec un peu de réflexion) trouve le moyen de réduire preſque tout par la *penſée*, ou par le moyen de fort peu de *figures*, ſans le ſecours de ces grandes *Tables* que l'on trouve dans les Livres de l'*Arithmétique décimale*: au moins peut-on beaucoup abréger ces tables comme on voit ici, & les rendre fort utiles.

PETITES TABLES DÉCIMALES.

| *Pour les Monnoies.* | *Pour le Tems.* | |
|---|---|---|
| 0,05 . . . . . = 1 *ſol.* | 0,04166667 = 1 *heure.* | *& ainſi des autres.* |
| 0,00416667 = 1 *den.* | 0,00069444 = 1 *min.* | |
| 0,00104167 = 1 *fard.* | 0,00001157 = 1 *ſecon.* | |
| une *livre* étant l'*entier.* | 1 *jour* ou 24 *h.* étant l'*ent.* | |

EXEMPLE.

On veut trouver les *parties décimales* équivalentes à 17 *sols* 9 *den.* ½.

1°. 0,05 = 1 *s* { donc 17 × ,05 = ,85 .. = 17 *s.*
& ,004166 = 1 *d.* { donc,004166×9 = ,03494 = 9 *d.*
{ (& 2) ,004166 (= ,002083 = ½ *d.*

Par conséquent leur *somme* 0,887577 = 17 *sols* 9 ½ *d.*

Maintenant pour trouver la valeur des *décimales* en parties connues de *monnoies*, *poids*, &c. ce n'est que la converse de l'opération précédente : en voici la méthode.

*Multipliez les* décimales *données par le* dénominateur *de la* fraction ordinaire *requise, c'est-à-dire multipliez les* décimales *par le* nombre *des* unités *contenues dans la* dénomination *immédiatement inférieure à l'espece, dont vos* décimales *sont les* parties, *& le* produit *sera le nombre requis.*

EXEMPLE.

Quelle est la valeur de 0,825, *parties décimales* d'une *livre*, c'est-à-dire combien de *sols* & de *deniers*, &c. sont = ,825 ? La *dénomination* immédiatement inférieure à une *livre* est 20, parce que 20 *sols* font une *livre*.

Donc 0,825
20
*sols* 16,500, & *parties* d'un *sol*
12
*deniers* 6,000. *Réponse.* 0,825 = 16 *sols* 6 *den.*

De même, quelles sont les parties ordinaires de *monnoie* égales à 3.666666 *décimales* ? Ici trois *entiers* sont 3 *livres*, & ,666666
20
13,333320
12. *Rép.* 3,666666 = 3 *l.* 13 *s.* 4 *d.*
666640
33332
*Deniers* 3.999840

Je me borne à ce petit nombre d'*exemples* de cette espece, parce que le principal usage des *fractions décimales* ne consiste pas tant dans les calculs ordinaires & pratiques de l'*Arithmétique*, que dans les *calculs geométriques*, quoiqu'elles soient fort utiles à l'*Arithmétique* ordinaire en certaines occasions, & sur-tout dans les *calculs d'intérêts* & d'*annuités*, &c. ( mais nous en parlerons dans la suite ).

Je vais donc conclure ce chapitre par une ou deux remarques sur la *nature* & les *propriétés* des *fractions* en général.

Si un nombre donné ( *entier* ou *mixte* ) est multiplié par une *fraction ordinaire* ou *décimale*, le *produit* sera moindre que le *multiplicande*, à proportion que la *fraction* est moindre que l'*unité* ; c'est-à-dire comme le *dénominateur* de la *fraction* est à son *numérateur*, ainsi le *nombre* donné est au *produit*.

Donc toutes les fois qu'un *nombre* doit être multiplié par une *fraction* dont le *numérateur* est l'*unité*, il faut diviser ce *nombre* par le *dénominateur* de la *fraction*, & le *quotient* sera le *produit* requis. Ainsi $12 \times \frac{1}{4} = 3$, & $12 \div 4 = 3$; de même $12 \times \frac{1}{2} = 6$, & $12 \div 2 = 6$, &c.

De là il suit que si un *nombre* est *divisé* par une *fraction*, le *quotient* sera plus grand que le *dividende*, à proportion que l'*unité* est plus grande que la *fraction*. Ainsi $12 \div \frac{1}{4} = 48$, ou $\frac{1}{4} : 1 :: 12 : 48$, &c. ; mais on comprendra la vérité de ces remarques à la fin du *chapitre* suivant.

# CHAPITRE VI.

## *Des Proportions continues, & des Combinaisons.*

### SECTION PREMIERE.

*De la progression arithmétique, ou proportion continue arithmétique.*

Lorsqu'une suite de *nombres* croît ou décroît d'une *quantité* ou commune *difference* égale, ces *nombres* sont en *progression arithmétique*,

| | | |
|---|---|---|
| comme | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.<br>7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 | Ici la commune *difference* est 1, |
| ou | 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, &c.<br>1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. | Ici la commune *difference* est 2, |

& ainsi de toutes les autres *suites*, dont la commune *difference* est 3, 4, 5, &c.

*LEMME I.*

Si trois *nombres* sont en *progression arithmétique*, la *somme* des deux *extrêmes* (c'est-à dire du premier & du dernier) sera égale au double du *moyen*, ou du *nombre* qui est au milieu.

Ainsi dans ces nombres 2, 4, 6, ou 3, 6, 9, ou 3, 7, 11, on voit que $2 + 6 = 4 + 4$, ou $3 + 9 = 6 + 6$, ou $3 + 11 = 7 + 7$, &c.

*LEMME II.*

Si quatre *nombres* sont en *progression arithmétique*, la *somme* des deux *extrêmes* sera égale à celle des deux *moyens*; comme dans ces *nombres* 2, 4, 6, 8, ou 3, 6,

9, 12, on voit que $2 + 8 = 4 + 6$, ou $3 + 12 = 6 + 9$, &c.

COROLLAIRE I.

On conçoit aisément par ces deux *lemmes* que dans toute *progression arithmétique*, quelque grand que soit le *nombre* des termes, la *somme* de deux *extrêmes* sera égale à la *somme* de deux *moyens* également éloignés de ces deux *extrêmes*; comme dans cette *progression*, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, on voit que $2 + 16 = 4 + 14 = 6 + 12 = 8 + 10$, ou si le *nombre* des *termes* est impair, comme dans celle-ci, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, &c. on a $2 + 18 = 4 + 16 = 6 + 14 = 8 + 12 = 10 + 10$.

LEMME III.

Chaque suite de nombres en *progression arithmétique* est composée de l'*intervalle* ou commune *difference* répétée autant de fois qu'il y a de *termes* dans la *progression*, excepté le premier.

Par exemple dans celle-ci, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, &c. l'*intervalle* ou commune *difference* étant 2, on aura $1 + 2 = 3$, $3 + 2 = 5$, $5 + 2 = 7$, $7 + 2 = 9$, $9 + 2 = 11$, $11 + 2 = 13$, $13 + 2 = 15$, $15 + 2 = 17$.

COROLLAIRE II.

De là il suit évidemment que la différence entre les deux extrêmes (comme ici 1 & 17) est composée de la *difference* commune, multipliée par le *nombre* de tous les *termes*, excepté le premier. Ainsi dans cette *progression* derniere, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, le *nombre* des *termes*, sans compter le *premier*, est 8 } Multipliés,
La *difference* commune est 2 }
La *difference* entre les deux *extrêmes* 16

PROPOSITION Ire.

Dans une suite de *nombres* en *progression arithmétique*, les

les deux *extrêmes* & le *nombre* des *termes* étant donnés, trouver la *somme* de toute la *suite*.

### THÉOREME.

Multipliez la *somme* des deux *extrêmes* par le *nombre* de tous les *termes*, & divisez le *produit* par 2; le *quotient* sera la *somme* de toute la *suite* par le *corollaire Ier*.

### EXEMPLE I.

On demande le nombre des *coups* qui sont frappés par une *horloge* dans une révolution entiere de l'aiguille, ou dans douze heures.

Ici 1 + 12 = 13, *somme* des deux *extrêmes*.
12, *nombre* de tous les *termes*.

26
13

Or 2 ) 156 ( 78, *nombre* des *coups* requis.

### EXEMPLE II.

On a placé cent *œufs* en ligne droite, éloignés l'un de l'autre d'une verge, & le premier est éloigné d'une verge du panier, où un homme doit venir porter ces cent *œufs* l'un après l'autre, revenant toujours après qu'il en a mis un dans le panier; & si un autre homme parcourt quatre *milles* ou 7040 *verges* d'Angleterre, on demande lequel des deux parcourt un plus grand *nombre* de *verges*?

Dans cette question 200 + 2 = 202, est la *somme* des deux *extrêmes*, & . . . . . . . 100, est le *nombre* de tous les *termes*; donc 2 ) . . . . 20200 ( 10100, *nombre* des *verges* parcourues.

Mais 10100 — 7040 = 3060, *nombre* des *verges* qu'il parcourt de plus que l'autre.

### PROPOSITION II.

Dans une *suite* de *nombres* en *progression arithmétique*,

les deux *extrêmes* & le *nombre* des *termes* étant donnés, trouver la *difference* commune des *termes*.

### THÉOREME II.

La différence entre les deux extrêmes étant divisée par le nombre des termes moins l'unité ou 1, le quotient sera la différence commune de la suite, par le *coroll.* 2.

### EXEMPLE I.

Un homme a douze enfans, dont les âges different également; le plus jeune a neuf ans, & le plus vieux en a trente-six & demi; quelle est la différence de leurs âges, & l'âge de chacun.

Ici 36, 5 — 9 = 27, 5, *différence* des deux *extrêmes*. Et 12 — 1 = 11, *nombres* des *termes* moins l'*unité*; donc 11 ) 27, 5 ( 2, 5, *difference* commune *requise*, par conséquent 9 + 2, 5 = 11, 5; âge du pénultiéme; 11, 5 + 2, 5 = 14, âge de l'antépénultiéme, & ainsi des autres, par le *coroll.* 2.

### EXEMPLE II.

Une dette doit être payée en onze différens paiemens qui doivent se faire en *progression arithmétique*. Le premier doit être de 12 liv. 10 sols, & le dernier de 63 liv.; quelle est la dette totale & chacun des paiemens?

Par le *théorême I*[er]. vous trouverez ainsi la dette totale.

12, 5 + 63 = 75, 5, *somme* des *extrêmes*.
11, *nombres* des *termes*.

755
755

2 ) 830,5 ( 415,25 = 415 l. 5 f. *Dette totale.*

Ensuite par le *théor.* 2. vous trouverez la *difference* commune de chaque paiement en cette maniere:

63 — 12.5 = 50,5, *difference* des *extrêmes*.
Et 11 — 1 = 10, *nombre* des *termes* moins 1;
donc 10 ) 50,5 ( 5,05 = 5 liv. 1 sol, *difference* commune;

par conséquent 12 liv. 10 sols + 5 liv. 1 sol = 17 liv. 11 sols, second paiement; & 17 liv. 11 sols + 5 liv. 1 f. = 22 liv. 12 sols, troisiéme paiement, &c.

### EXEMPLE III.

Un homme va de *Londres* en un certain pays dans dix jours, & il ne fait que deux milles le premier jour, augmentant tous les jours également, ensorte qu'au dernier jour il a fait vingt-neuf milles : quel chemin a-t-il fait chaque jour, & de combien de milles ce pays est-il éloigné de *Londres* ?

Premierement 29 — 2 = 27, *difference* des *extrêmes*.

Et 10 — 1 = 9, *nombre* des *termes* moins 1.

Donc 9 ) 27 ( 3, *difference* commune.

Par conséquent 2 + 3 = 5, chemin du second jour, 5 + 3 = 8, troisiéme *journée*, &c.

De plus 29 + 2 = 31, *somme* des *extrêmes*.
10, *nombre* des *termes*.

2 ) 310 ( 155, *distance* requise.

Il y a dix-huit *théorêmes* qui ont plus de rapport aux questions de la *progression arithmétique*; mais parce qu'il faudroit un trop long discours pour en donner la raison, je renvoie le lecteur à la seconde partie, qui est celle de l'*Algebre*, où il en trouvera le *calcul analytique*.

---

## SECTION II.

### *Des Proportions géométriques continues, ou Progressions géométriques.*

Lorsqu'une suite de *nombres* croît par un *multiplicateur* commun, ou décroît par un *diviseur* commun, ces nombres sont en *proportion géométrique* continue, comme

{ 2. 4. 8. 16. 32, &c. Ici 2 est le *multiplicateur* commun.
{ 64. 32. 16. 8. 4, &c. Ici 2 est le *diviseur* commun.

Ou { 2. 6. 18. 54. 162, &c. Le *multip.* commun eſt ici 3.
162. 54. 18. 6. 2. Le *diviſeur* commun eſt ici 3.

*Nota.* Le *multiplicateur* ou *diviſeur* commun ſe nomme la *raiſon*, & fait voir la relation que les *nombres* ont les uns avec les autres ; ſçavoir, s'ils ſont doubles, triples, quadruples, &c.

La *proportion* ( ou *proportionalité* ) eſt une ſimilitude de *raiſons* ; enſorte qu'il faut au moins trois termes pour former une *proportionalité* ou *ſimilitude* de *raiſons* ; & s'il n'y a que trois termes, le ſecond doit tenir la place de deux, comme dans ceux-ci, 2, 4, 8, c'eſt-à-dire 2 : 4 : : 4 : 8. ( Voyez au premier chapitre l'explication de : : ).

Ici 4, *terme du milieu*, tient la place de deux termes, du ſecond & du troiſiéme, parce que 8 a même raiſon, reſſemblance, ou *proportion* avec 4, que 4 avec 2 ; ou 2 : eſt à 4 : : ainſi 4 : eſt à 8.

### LEMME I.

Si trois *nombres* ſont proportionnels, le *rectangle* ou *produit* des deux extrêmes, ou du premier & du dernier terme, ſera égal au *quarré* du terme moyen, comme dans ceux-ci, 2 : 4 : : 4 : 8 ; on voit que 8 × 2 = 16, *produit* des extrêmes, & 4 × 4 = 16, *quarré* du moyen ; donc 8 × 2 = 4 × 4.

### COROLLAIRE I.

De là il ſuit que ſi le produit de deux *nombres* eſt égal au *quarré* d'un troiſiéme *nombre*, ces trois *nombres* ſeront en proportion.

### LEMME II.

Si quatre *nombres* ſont proportionnels, le produit des deux extrêmes ſera égal au produit des deux moyens ; comme dans ceux-ci, 2 : 4 : : 8 : 16. Ici 16 × 2 = 32, & 8 × 4 = 32 ; par conſéquent 16 × 2 = 8 × 4.

### COROLLAIRE II.

De là il ſuit que ſi le *produit* de deux *nombres* eſt égal

au *produit* de deux autres *nombres*, ces quatre *nombres* seront proportionnels.

Et par ces deux *lemmes*, on conçoit aisément que si plusieurs *nombres* sont en proportion continue, le produit de deux *extrêmes* sera égal au produit de deux *moyens* également éloignés des *extrêmes*, comme dans ceux-ci, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. On voit que $64 \times 2 = 32 \times 4 = 16 \times 8$, &c.; & si le *nombre* des termes est impair, comme dans ceux-ci, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c. on aura $128 \times 2 = 64 \times 4 = 32 \times 8 = 16 \times 16$.

*Nota*. Le caractere dont on se sert pour marquer la proportion continue est $\div\!\!\div$. Dans chaque suite de $\div\!\!\div$ (ou de *quantités continuellement proportionnelles*) le *nombre* qui est comparé à un autre se nomme *antécédent* de la raison, & celui à qui il est comparé se nomme *conséquent*, comme dans ceux-ci, $2 : 4 :: 4 : 8$; 2 est l'*antécédent*, & 4 le *conséquent*; 4, terme moyen, est aussi *antécédent*, & 8 son *conséquent*; d'où il suit que dans chaque suite de $\div\!\!\div$ les termes du milieu entre le premier & le dernier sont tous *antécédens* & *conséquens*, comme dans ceux-ci, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. 4, 8, 16, 32 sont tous *conséquens* & *antécédens*; car $2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: 16 : 32 :: 32 : 64$, &c.; ensorte que tous les termes, excepté le dernier, sont *antécédens*, & tous, excepté le premier, sont *conséquens*.

### LEMME III.

Quelque grand que soit le nombre des termes qui sont en proportion, on aura toujours: comme chacun des *antécédens* est à son *conséquent*, ainsi la somme de tous les *antécédens* est à la somme de tous les *conséquens*, c'est-à-dire dans la *suite* précédente, $2 : 4 :: 2 + 4 + 8 + 16 + 32 : 4 + 8 + 16 + 32 + 64$; car il est évident que $4 + 8 + 16 + 32 + 64$, *somme* de tous les *conséquens*, est double de $2 + 4 + 8 + 16 + 32$, *somme* de tous les *antécédens*, comme 4 est à 2, & elle auroit

été triple ou quadruple, &c. si la *raison* avoit été 3 ou 4, &c.

*Nota*. Dans chaque suite de $\div\!\div$ on trouve la *raison* en divisant un des *conséquens* par son *antécédent*, comme dans celle-ci, 2 : 6 :: 6 : 18 :: 18 : 54 :: 54 : 162, faisant 2 ) 6 ( 3, *raison*, ou 6 ) 18 ( 3, &c.

On peut tirer des second & troisiéme *lemmes* deux *théorêmes* généraux ou régles, pour trouver la somme d'une suite $\div\!\div$, sans ajouter tous les termes l'un après l'autre. Soit la suite 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 donnée, il faut en trouver la *somme*. Supposons $z =$ à la somme de tous les termes, nous aurons $z - 128 =$ la somme de tous les *antécédens*, & $z - 2 =$ la somme de tous les *conséquens*. Mais $2 : 4 :: z - 128 : z - 2$, par le *lemme* 3; donc $4z - 512 = 2z - 4$, par le *lemme* 2; donc $4z - 2z = 512 - 4$.

THEOREME.

$z = \frac{512-4}{4-2}$, ce qui s'exprime au long en cette maniere.

THEOREME I.

Du produit du second par le dernier terme, ôtez le quarré du premier terme, divisez le reste par le second terme moins le premier, le quotient donnera la somme de toute la suite; ou si l'on ne connoît que le premier terme, la *raison* commune & le dernier terme, alors :

THEOREME II.

Multipliez le dernier terme par la raison, & ôtez de leur produit le premier terme; divisez ce reste par la raison moins l'unité ou 1, vous aurez la somme de toute la suite; car $4z - 2z = 512 - 4$, comme ci-devant; donc $2z - z = 256 - 2$, qui est la derniere valeur divisée par 2; donc $z = \frac{256-2}{2-1}$, *théor*. 2.

EXEMPLE.

Soit 2, 6, 18, 54, 162, 486, la suite donnée. Ici 2

eſt le premier *terme*, 3 la *raiſon*, & 486 le dernier *terme*; mais $486 \times 3 = 1458$, & $1458 - 2 = 1456$; donc $3 - 1 = 2$) 1456 (728, *ſomme* requiſe, c'eſt-à-dire que $728 = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486$.

Dans chacun de ces *théorêmes*, il faut connoître le dernier *terme* (ce qui dans une longue ſuite de $\div\div$ donneroit bien de l'embarras & de l'ennui pour y parvenir par une *multiplication* continuelle, &c.). Il eſt donc à propos de faire voir comment on peut trouver le dernier *terme*, ou tout autre *terme* dont la place eſt déterminée, ſans multiplier tous les *termes* : il faut pour cela néceſſairement faire remarquer le rapport ou reſſemblance qui ſe trouve entre les *nombres* en *progreſſion arithmétique*, & ceux qui ſont en *proportion géométrique*.

Si à une ſuite de *nombres* en $\div\div$, dont le premier terme n'eſt pas l'*unité* ou 1, on applique une ſuite de *nombres* en *progreſſion arithmétique* qui commence par l'*unité* ou 1, & dont la *différence* commune eſt 1, nous appellerons ces derniers nombres *expoſans*, comme on voit ici :

$$\begin{cases} 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7,\ \textit{expoſans}. \\ 2.\ 4.\ 8.\ 16.\ 32.\ 64.\ 128,\ \&c.\ \div\div \end{cases}$$

Alors l'*addition* ou la *ſouſtraction* de deux de ces *expoſans* quelconques (ou de ces *nombres* en *progreſſion arithmétique*) répondra directement au *produit*, ou au *quotient* de leurs *termes* reſpectifs dans la ſuite de $\div\div$, c'eſt-à-dire $\begin{cases} \text{comme } 3 + 4 = 7, \\ \text{ainſi } 8 \times 16 = 128, \text{ ſeptiéme } \textit{terme} \text{ dans } \div\div. \end{cases}$

De même $\begin{cases} \text{comme } 6 + 4 = 10, \\ \text{ainſi } 64 \times 16 = 1024, 10^e\ \textit{terme} \text{ dans } \div\div\,; \end{cases}$

ou $\begin{cases} \text{comme } 7 - 3 = 4, \\ \text{ainſi } 128 \div 8 = 16\,; \end{cases}$ ou $\begin{cases} \text{comme } 6 - 2 = 4, \\ \text{ainſi } 64 \div 4 = 16. \end{cases}$ &c.

Mais ſi la ſuite de $\div\div$ commence par l'*unité*, les *expoſans* doivent commencer par *zero*, comme dans ceux-ci :

$$\begin{cases} 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6,\ \&c. \\ 1.\ 2.\ 4.\ 8.\ 16.\ 32.\ 64. \end{cases}$$

Or par le moyen de ces *expoſans* & de quelques-uns des premiers *termes* d'une *ſuite* de ∺, il eſt clair qu'on peut trouver promptement, ſans prolonger toute la *ſuite*, chaque *terme* dont la place ou la diſtance au premier *terme* eſt déterminée.

EXEMPLE I.

Un homme a acheté un cheval, & s'eſt engagé de donner un *liard* pour le premier *clou*, deux pour le ſecond, quatre pour le troiſiéme, &c. en ∺. Le nombre des clous étoit 7 dans chaque fer, ou 28 en tout : que lui a couté le cheval ?

Premierement $\begin{cases} 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5, \textit{ expoſans.} \\ 1.\ 2.\ 4.\ 8.16.\ 32, \textit{ liards en ∺.} \end{cases}$

Or $\begin{cases} 5 + 5 = 10 \\ 32 \times 32 = 1024 \end{cases}$ & $\begin{cases} 10 + 10 = 20 \\ 1024 \times 1024 = 1048576. \end{cases}$

De plus $\begin{cases} 4 + 3 = 7 \\ 16 \times 8 = 128. \end{cases}$

Enfin $\begin{cases} 20 + 7 = 27 \\ 1048576 \times 128 = 134217728, \end{cases}$ qui eſt le 28 & dernier *terme*, parce que le premier terme dans la *ſuite* eſt 1, qui ne *multiplie* ni ne *diviſe*.

Or ce *nombre* 134217728 étant celui des *liards* qu'on doit payer pour le dernier *clou*, on doit par ſon moyen, par la *raiſon* commune qui eſt 2, & par le premier terme qui eſt 1, trouver la ſomme de toute la *ſuite* par le *théor.* 2.

$$\begin{array}{r} 134217728 \\ 2 \\ \hline 268435456. \end{array}$$

Otez 1 de ce *produit*, vous aurez 268435455 : le *diviſeur* 2 — 1 = 1 ; par conſéquent 268435455 eſt la ſomme de toute la *ſuite*, ou le prix du cheval en *liards* ; ce qui étant changé en livres ſterlings, donnera 279620 liv. 5 ſols 3 den. $\frac{3}{4}$.

## *Exemple II.*

Un domeſtique ruſé s'accorde avec ſon Maître ( peu verſé dans les *nombres* ) qu'il le ſervira pendant onze ans ſans autre récompenſe pour ſes ſervices que le produit d'un *grain de bled* la premiere année, ce qui viendra de ce produit ſemé la ſeconde année, & ainſi de ſuite d'une année à l'autre, juſqu'à la fin de ſon tems : en ſuppoſant que l'augmentation ne ſera qu'en proportion décuple, ou de dix pour un, on demande la ſomme que le tout *produira*.

1°. $\begin{cases} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \text{, } \textit{expoſans} \text{ ou } \textit{années.} \\ 10.\ 100.\ 1000.\ 10000.\ 100000\ \textit{gra. de bled} \text{ en } \div\!\div \end{cases}$

2°. $\begin{cases} \text{Comme } 4 + 2 = 6 ; \\ \text{ainſi } 10000 + 100 = 1000000, \textit{prod.} \text{ de la } 6^{e} \textit{ ann.} \end{cases}$

Et $\begin{cases} 6 + 5 = 11 \\ 1000000 \times 100000 = 10000000000 \text{, } \textit{produit} \text{ de} \end{cases}$ la onziéme ou derniere année.

Enſuite ( ſoit par le *théor.* 1^er^ ou 2^e^ ) la ſomme de toute la ſuite ſera 11111111110 grains : or on a trouvé que 7680 grains de bled, tirés du milieu de l'épi, rempliſſent une pinte d'Angleterre, & qu'ainſi 7680) 11111111110 ( 1446759 2 pintes ; mais 64 pintes font un boiſſeau ; donc 64 ) 1446759 2 ( 226056 $\frac{1}{8}$ boiſſeaux. Suppoſons que le boiſſeau de bled ſe vende 3 ſchelings, on aura

$$\begin{array}{r} 226056\ \frac{1}{8} \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

*Schelings* $678168\ \frac{3}{8} = 33908$ liv. 8 ſ. $4\ \frac{1}{2}$ den. fort grande récompenſe pour onze ans de ſervice.

Outre ces proportions géométriques & arithmétiques, qui ſont d'un grand uſage, il y a une troiſiéme ſorte de *proportion*, que l'on nomme *harmonique*, qui n'eſt pas d'un grand uſage. Ainſi je me bornerai à en donner ici une idée.

La *proportion harmonique* eſt celle où de trois *nombres*

le premier est au troisiéme, comme la différence entre le premier & le second est à la différence entre le second & le troisiéme, comme dans ceux-ci, 6, 8, 12; 6 : 12 :: 8 — 6 : 12 — 8.

S'il y a quatre *nombres* en *proportion harmonique*, le premier sera au quatriéme, comme la différence entre le premier & le second est à la différence entre le troisiéme & le quatriéme. Par exemple ceux-ci, 8, 14, 21, 84; car 8 : 84 :: 14 — 8 = 6 : 84 — 21 = 63, c'est-à-dire 8 : 84 :: 6 : 63.

La maniere de trouver les *nombres* en *proportion harmonique* s'exprime mieux par lettres, comme on le verra dans la partie *Algébrique*.

---

## SECTION III.

### *De la Combinaison ou changement d'ordre, &c.*

CECI n'étant pas traité dans aucun des Livres ordinaires d'*Arithmétique* (que j'ai eu occasion de voir), j'ai cru que les commençans seroient bien aise d'apprendre combien de fois il est possible de varier ou de changer l'*ordre* ou la *position* d'un *nombre* proposé de *choses* : par exemple, combien on peut faire de changemens sur un *nombre* proposé de *cloches*, ou combien de variations sur un *nombre* déterminé de *lettres*, ou d'autres choses exposées à la variation.

On trouve le nombre des changemens par une multiplication continuelle de tous les termes d'une suite en *progression arithmétique*, dont le premier *terme* & la *difference* commune est l'*unité* ou 1, & dont le dernier *terme* est le *nombre* proposé des choses qui doivent varier, c'est-à-dire 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7, &c. comme on verra par ce qui suit.

1°. Si les choses que l'on propose de varier ne sont que deux, elles ne souffrent que deux positions ou ordres de place; sçavoir, $\left\{ \begin{matrix} 1. & 2 \\ 2. & 1 \end{matrix} \right\} = 2 = 1 \times 2.$

2°. Si l'on propoſe de varier trois choſes, on ne peut les changer que de ſix façons différentes quant à l'ordre de leurs places; car en commençant par 1, on aura { 1. 2. 3 / 1. 3. 2 }

Enſuite commençant par 2, on aura { 2. 1. 3 / 2. 3. 1 }

Enfin commençant par 3, on aura { 3. 1. 2 / 3. 2. 1 }, ce qui en tout fait 6, ou trois fois 2, c'eſt-à-dire $1 \times 2 \times 3 = 6$.

3°. Si l'on propoſe quatre choſes, elles n'auront que vingt-quatre changemens quant à leur ordre & place; car en commençant l'ordre par 1, on aura { 1. 2. 3. 4 / 1. 2. 4. 3 / 1. 3. 2. 4 / 1. 3. 4. 2 / 1. 4. 2. 3 / 1. 4. 3. 2 }

& par la même raiſon il y aura ſix différens changemens, en commençant par 2, & autant par 3 & par 4, ce qui fait en tout $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$; & par cette méthode on verra clairement que cinq choſes ſouffrent 120 variations, que 6 en ſouffrent 720, &c. comme dans la Table ſuivante.

| *Nombre des choſes à varier.* | *Maniere dont leurs différentes variations ſe produiſent.* | *Différens changemens ou variations que chacun des nombres propoſés peut ſouffrir.* |
|---|---|---|
| 1 | 1 × 1 | = 1 |
| 2 | 1 × 2 | = 2 |
| 3 | 2 × 3 | = 6 |
| 4 | 6 × 4 | = 24 |
| 5 | 24 × 5 | = 120 |
| 6 | 120 × 6 | = 720 |
| 7 | 720 × 7 | = 5040 |
| 8 | 5040 × 8 | = 40320 |
| 9 | 40320 × 9 | = 362880 |
| 10 | 362880 × 10 | = 3628800 |
| 11 | 3628800 × 11 | = 39916800 |
| 12 | 39916800 × 12 | = 479001600 |

On peut continuer cette Table jusqu'à tout nombre déterminé. Si on la continue jusqu'à vingt-quatre, nombre des lettres de l'alphabet, on verra qu'il souffre 620448401733239439360000 variations différentes.

On peut par ces calculs résoudre plusieurs questions agréables, & même fort extraordinaires.

## *EXEMPLES.*

Six voyageurs se trouverent par hazard ensemble dans un certain logis sur leur route, où ils furent si contens de la compagnie les uns des autres, & de celle de leur hôte, qu'il leur prit fantaisie de s'engager à rester dans ce logis tous ensemble avec leur hôte, aussi long-tems qu'ils pourroient se trouver chaque jour à dîner dans un ordre ou position différente; ce qui par les calculs précédens se trouve monter à près de quatorze ans; car étant sept, avec leur hôte, il y a 5040 positions différentes; mais si l'on divise 5040 par $365 \frac{1}{4}$, nombre des jours contenus dans une année, on aura treize ans & 291 jours. Voilà certainement une fantaisie plaisante.

J'ai oui dire (qu'avant le grand embrasement de *Londres*, qui arriva l'an *666*) il y avoit douze cloches dans une Eglise de Londres en Cheapside. Supposons que l'on demande en combien de manieres différentes on auroit pû faire sonner ces douze cloches, & par un calcul moderé, combien de tems ces changemens auroient pû durer en ne les parcourant tous qu'une fois chacun.

1°. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 = 479001600$, nombre des changemens. Ensuite supposant qu'il y aura dix changemens dans chaque *minute*, c'est-à-dire $12 \times 10 = 120$ *coups* dans une minute, ou 2 par *seconde* Il faut donc 47900160 minutes pour faire tous les différens changemens; car 10 ) 479001600 ( 47900160. Il y a dans un an 365 jours, 5 heures & 49 minutes, qui étant réduits en minutes, font 525949: or 525949 ) 47900160 ( 91 ans & 26 jours. Ainsi ces douze cloches auroient continué de sonner aussi long-

tems ſans interruption, avant que de faire tous leurs changemens une fois chacun. Il paroît ſurprenant, & preſque incroyable, que ſi peu de choſe produiſe tant de variétés.

Mais ce qui paroîtra bien plus ſurprenant, & même impoſſible à ceux qui ne ſont pas un peu verſés dans la puiſſance des *nombres*, c'eſt que ſi l'on avoit ajouté ſeulement deux cloches aux douze précédentes, elles auroient augmenté le nombre des changemens (& par conſéquent le tems) au-delà de ce qu'on pourroit croire; car quatorze cloches exigeroient (en ſonnant de la même maniere que ci-devant) environ 16575 ans pour ſonner ſelon tous leurs différens changemens une fois chacune.

Et s'il étoit poſſible de faire eſſayer à 24 cloches tous leurs changemens à la même condition de dix par minute, ou de deux coups par ſeconde, il faudroit plus de 117000000000000000 années pour ſonner une fois ſeulement dans toutes leurs différentes variations, comme il eſt aiſé de le calculer par la Table précédente.

## CHAPITRE VII.

### *De la Proportion non continue, ou Régle d'Or.*

CETTE *proportion* eſt ou *directe* ou *réciproque* & *indirecte*, & ces deux ſont ou *ſimples* ou *composées*.

### SECTION PREMIERE.

LA *proportion directe* eſt celle où de quatre *nombres* le premier eſt en même *raiſon* ou *proportion* au ſecond que le troiſiéme au quatriéme, comme dans ceux-ci, 2 : 8 :: 6 : 24; par conſéquent plus le ſecond *terme* eſt grand, comparé au premier, plus auſſi le quatriéme eſt

grand, comparé au troisiéme *terme* ; c'est-à-dire comme 8, second *terme*, est quatre fois plus grand que 2, premier *terme*, ainsi 24, quatriéme *terme*, est quatre fois plus grand que 6, troisiéme *terme*.

D'où il suit que si quatre *nombres* sont en *proportion directe*, le *produit* des deux *extrêmes* sera toujours égal au produit des deux *moyens*, tant dans la proportion continue, que dans celle-ci, selon le *lem.* 2. *chap.* précédent; car comme $2 : 2 \times 4 :: 6 : 6 \times 4$, ou comme $3 : 3 \times 5 :: 6 : 6 \times 5$; mais $2 \times 6 \times 4 = 2 \times 4 \times 6$, ou $3 \times 6 \times 5 = 3 \times 5 \times 6$, c'est-à-dire que le *produit* des *extrêmes* est égal à celui des *moyens*.

De même plus le second *terme* est petit, comparé au premier, plus aussi le quatriéme *terme* est petit, comparé au troisiéme; comme dans ceux-ci, $18 : 6 :: 12 : 4$, c'est-à-dire $18 : 18 \div 3 :: 12 : 12 \div 3$; mais $18 \times 12 \div 3 = 18 \div 3 \times 12$, ou $18 \times 4 = 6 \times 12$; donc 2, 8, 6, 24, & 18, 6, 12, 4 sont de vrais *nombres proportionnels* par le *corol.* 2. du *chap.* précédent.

Ces considérations fournissent la maniere de trouver un quatriéme *nombre* proportionnel à trois autres *nombres* donnés; c'est pour cela que cette méthode se nomme *Régle de Trois* : car si l'on multiplie le second *nombre* par le troisiéme, on aura un *produit* égal à celui du premier par le quatriéme; donc si l'on divise le *produit* du second & du troisiéme *nombre* par le premier, le *quotient* sera nécessairement le quatriéme *nombre*; car si ce nombre, qui divise l'autre, est multiplié par le *quotient* de la *division*, leur *produit* sera le nombre *divisé*, comme on l'a fait voir ci-devant dans le chapitre de la *Division*.

Par exemple, si $2 : 8 :: 6 : 24$, on aura $8 \times 6 = 24 \times 2$; mais si $24 \times 2 = 48$, on aura $48 \div 2 = 24$, ou $48 \div 24 = 2$.

*Nota.* Quatre nombres qui sont en *proportion directe* peuvent se varier en différentes manieres, comme ceux-ci: si $2 : 8 :: 6 : 24$, on aura $2 : 6 :: 8 : 24$, & $6 : 24 :: 2 : 8$, ou $24 : 6 :: 8 : 2$, &c.

*Ces variations étant bien comprises, seront d'un grand usage pour bien établir l'état de la question dans cette* régle de Trois.

Lorsque trois *nombres* sont donnés, & qu'il faut en trouver un quatriéme *proportionnel*, la plus grande difficulté (s'il y en a quelqu'une) est de bien établir l'état de la question, ou de tirer les nombres des expressions dont on se sert dans la question proposée, & de les placer dans l'ordre qui leur convient.

Or cela n'est pas difficile, si l'on fait bien attention que des trois *termes* donnés il y en a deux qui sont supposés uniquement pour déterminer ou fixer la *raison* ou *proportion*: le troisiéme forme la *question*, & le quatriéme donne la *réponse*.

Par exemple, si 3 *aunes* d'un habit coûtent 9 *livres*; combien coûteront 6 aunes au même *prix* & *proportion*? Ici 3 aunes & 9 liv. sont deux *nombres* supposés pour fixer le prix, comme il paroît par le mot (*si*); sçavoir, si 3 aunes coûtent 9 liv. (la *question* vient ensuite); combien coûteront 6 aunes?

*Nota.* Le terme qui forme la question est ordinairement précédé de quelques-uns de ces mots, *combien? à quel prix? en quel tems*, &c?

Mais il faut bien observer que le premier *terme* dans la *supposition* doit toujours être de même espece & *dénomination* que celui qui forme la *question*; & le *terme* requis doit toujours être de même espece & dénomination que le second *terme* de la *supposition*, en cette maniere:

$$3^{\text{aun.}} : 9^{\text{liv.}} :: 6^{\text{aun.}} : {}^{\text{liv.}}$$

On peut résoudre toutes les questions dans la proportion directe, par ces trois théorêmes.

### THEOREME I.

Multipliez ensemble les second & troisiéme termes, & divisez leur produit par le premier, le quotient sera la solution requise.

Par exemple $3^{au.} : 9^{liv.} :: 6^{au.} : 18^{liv.}$. *Solution.*

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 3\ )\ 54\ (\ 18 \end{array}$$

*livres*, parce que le second terme étoit des livres.

### THÉOREME II.

Divisez le second terme par le premier, & multipliez le quotient par le troisiéme terme, leur produit sera la solution requise.

$3^{au.} : 9^{liv.} :: 6^{au.} : 18^{liv.}$

3 ) 9 ( = 3, & $3 \times 6 = 18$, comme auparavant.

### THÉOREME III.

Divisez le troisiéme terme par le premier, & multipliez le quotient par le second terme, leur produit sera la solution.

$3^{au.} : 9^{liv.} :: 6^{au.} : 18^{liv.}$

3 ) 6 ( = 2, & $9 \times 2 = 18$, comme auparavant.

On voit que ces trois théorêmes sont également vrais, mais le premier est le plus commun dans la pratique ordinaire; cependant les deux derniers peuvent être fort utiles, lorsque le second ou le troisiéme terme peuvent être divisés par le premier, & on le trouvera utile en particulier pour les *régles de Compagnie*, &c. comme on verra dans la suite.

*Quest.* 2. Si huit livres de *tabac* coûtent 14 francs, combien coûteront au même prix 56 livres?

Ainsi 8 liv. : 14 liv. :: 56 liv. : 98

$$\begin{array}{r} 14 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 8\ )\ 784\ (\ = 98 \text{ liv.} \end{array}$$

Ou bien ainsi : 8 ) 56 ( = 7 : or $14 \times 7 = 98$ livres.

*Quest.* 3.

*Quest.* 3. Si 14 livres produisent 8 liv. de *tabac*, combien en produiront 98 au même prix ?

Ainsi 14 liv. : 8 liv. : : 98 liv. :— ; or $98 \times 8 = 784$, & 14 ) 784 ( 56 liv. *Réponse.*

*Quest.* 4. Si 56 livres de *tabac* coûtent 98 livres, combien en achetera-t-on pour 14 livres ?

Ainsi 98 liv. : 56 liv. : : 14 liv. :— ; or $56 \times 14 = 784$, & 98 ) 784 ( 8 liv. *Réponse.*

*Quest.* 5. Si avec 98 liv. on achete 56 livres de *tabac*, combien en achetera-t-on avec 8 livres ?

L'état de la question est 56 liv. : 98 liv. : : 8 liv. : — ; or $98 \times 8 = 784$, & 56 ) 784 ( = 14 liv. *Solution.*

*Nota.* Les trois dernieres questions ne sont que la seconde variée, & proposée uniquement pour faire voir dans un exemple en combien de manieres on peut varier une question dans cette régle de Trois.

*Quest.* 6. Que coûteront trois quarts d'aune de *velours*, si le prix de 21 aunes & demie est de 22 liv. 10 sols 6 d. ?

L'état de la question doit se fixer en cette maniere ; $21\frac{1}{2}$ aunes : 22 livres 10 sols 6 den. : : $\frac{3}{4}$ : à la *réponse*, laquelle peut se trouver en trois façons différentes, par *réduction*, par les *fractions ordinaires*, & par les *décimales.*

1°. Par *réduction* ; réduisez les premier & troisiéme *termes* à la même *dénomination*, c'est-à-dire en *quarts*, & réduisez le second *terme* à la moindre *dénomination*, en cette maniere : $21\frac{1}{2} = 86$ quarts, & 22 liv. 10 sols 6 d. = 5406 den. ; donc 86 : 5406 : : 3 : 15 f. $8\frac{50}{86}$ d. ; car $5406 \times 3 = 16218$, & 86 ) 16218 ( = $188\frac{50}{86}$ : or $188\frac{50}{86}$ den. = 15 sols $8\frac{25}{43}$ den. *Réponse* requise.

2°. Par les *fractions ordinaires*, on aura $21\frac{1}{2} = \frac{43}{2}$ : $22\frac{21}{40} = \frac{901}{40}$ : : $\frac{3}{4}$ : — ; or $\frac{901}{40} \times \frac{3}{4} = \frac{2703}{160}$, & $\frac{43}{2}$ ) $\frac{2703}{160}$ ( = $\frac{5406}{6880}$. Ces $\frac{5406}{6880}$ parties d'une livre se réduisent en sols, en multipliant le *numérateur* par 20, & divisant le *produit* par son *dénominateur*, &c. Ainsi $5406 \times 20 = 108120$, & 6880 ) 108120 ( 15 sols, & il reste 4920. De plus $4920 \times 12 = 59040$, & 6880 ) 59040 ( 8 den. & $\frac{50}{86}$, comme ci-devant.

3°. Par les *fractions décimales*, on aura $21\frac{1}{2} = 21, 5$. 22 liv. 10 sols 6 den. $= 22, 525$, & $\frac{3}{4} = 0, 75$; donc $21, 5 : 22, 525 :: 0, 75$ : à la *solution*; mais $22, 525 \times 0, 75 = 16, 89375$, & $21, 5$ ) 16,89375 (0,7857 l. $= 15$ f. 8 d. $\frac{568}{1000}$.

*Quest.* 7. Si deux quintaux trois quarts 21 livres de *sucre* coûtent 6 liv. 1 f. 8 den., que coûteront douze quintaux deux quarts au même prix ?

C'est-à-dire 2 quint. $\frac{3}{4}$ 21 livres : 6l. 1f. 8d. :: 12q. $\frac{2}{4}$ : à—

*Le quintal en Angleterre est de 112 liv.*

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 20 | 4 |
| 11 *quarts.* | 121 *sols.* | 50 |
| 28 | 12 | 28 |
| 88 | 250 | 1400 *liv.* |
| 22 | 121 | |
| 308 + 21 = 329 *l.* | 1460 *d.* :: | 1400 *l.* : — |

Or $1460 \times 1400 = 2044000$, & 329 ) 2044000 ( $6212\frac{3}{4}$ *d.* $= 25$ *l.* 17 *f.* $8\frac{3}{4}$ *d.* *Solution* requise.

La même question en *nombres décimaux* se pose ainsi, $2,9375 : 6,0833 :: 12,5$ : à la *solution* : or $6,0833 \times 12,5 = 76,04125$; ce qui étant divisé par 2,9375, donnera 25,8863, &c. pour la *solution* en décimales, qui réduites en monnoies, donnent 25 liv. 17 sols $8\frac{3}{4}$ den. comme auparavant.

*Nota.* Lorsque le premier terme est l'*unité* ou 1, la question se résout par la seule *multiplication.*

### EXEMPLE.

Supposé que je donne 5 *schelings* 4 *sols* pour une *once d'argent*, combien dois-je donner pour $32\frac{1}{2}$ *onces* au même prix ? c'est-à-dire 1 *schel.* : 5 *f.* 4 *d.* :: $32\frac{1}{2}$ *schel.* : à, &c. ou pour mieux poser la question, 1 : 64 *d.* :: 32,5 : — Or $32,5 \times 64 = 2080$ *den.* $= 8$ *liv.* 13 *f.* 4 *d.* Solution requise, parce que 1 ne change rien en multipliant, ni en divisant.

Lorſque le ſecond ou le troiſiéme *terme* eſt l'*unité* ou 1, la queſtion ſe réſout par la ſeule *diviſion*, comme dans cet *exemple*.

Si un *pot d'argent* peſant 21 *onces* coûte 5 liv. 19 *ſols*, combien vaut une *once*? c'eſt-à-dire 21 *on.* : 5 liv. 19 ſols = 119 ſ. : : 1 : à la ſolution, qui eſt 5 ſ. 8 d., car 21 ) 119 ( = 5 ſ. $\frac{14}{21}$ = 5 ſ. 8 den.

La preuve de toutes les *queſtions*, dans la *régle de Trois directe*, ſe conçoit aiſément par ce qui a été dit; ſçavoir, que le *produit* des premier & quatriéme *termes* doit toujours être égal à celui du ſecond par le troiſiéme; ou autrement, en variant la queſtion, comme dans les ſeconde, troiſiéme, quatriéme, & cinquiéme *queſtion*.

Je vais finir cette *ſection* en y joignant quelques *queſtions* avec leurs *ſolutions*, abandonnant l'opération à la pratique des commençans.

*Queſtion* 1[re]. Que coûtera le tranſport de 17 quint. $\frac{1}{4}$ 11 livres à 7 ſols le cent, le quintal étant de 112 livres? *Réponſe*, 6 liv. 4 ſols 11 d. $\frac{1}{4}$.

*Queſtion* 2. S'il en coûte 6 liv. 4 ſols 11 den. $\frac{1}{4}$ pour le tranſport de 17 quintaux 3 quarts 11 livres, que coûtera le tranſport d'une livre? *Réponſe*, $\frac{3}{4}$ den.

*Queſtion* 3. Un Epicier a acheté trois quintaux $\frac{1}{4}$ 14 livres de clous de girofle à 2 ſols 4 den. la livre, & les a vendus 52 liv. 14 ſols; qu'a-t-il gagné ou perdu dans ce commerce? *Réponſe*, il a gagné 8 liv. 12 ſols.

*Queſtion* 4. Un Drapier a acheté huit balles de drap, chaque balle a quatre paquets, & chaque paquet contient dix pieces, chaque piece eſt de vingt-ſix aunes; il en a donné à raiſon de 4 liv. 16 ſols pour ſix aunes; à quoi monte le prix des huit ballots, & le prix d'une aune? *Réponſe*, ils montent à 6656 liv. & l'aune coûte 16 ſols.

*Queſtion* 5. Un Marchand a acheté 436 aunes d'un certain drap, à raiſon de 8 ſols 6 den. l'aune, & il les a vendues à raiſon de 10 ſols 4 den. l'aune; quel gain a-t-il fait ſur les 436 aunes? *Réponſe*, il a gagné 39 livres 19 ſols 4 den.

*Question* 6. Si un homme dépenſe en quatre ſemaines 13 ſols 4 den., en combien de tems dépenſera-t-il à proportion 53 liv. 6 ſols? *Rép.* en ſix ans 47 jours 2 heures 24 minutes.

*Queſt.* 7. Que vaudra la huitiéme partie d'un *navire*, ſi la moitié vaut 1015 liv. 10 ſols? *Réponſe*, 253 livres 17 ſols 6 den.

*Queſt.* 8. Le Soleil fait une révolution entiere (ou 360 degrés) dans l'eſpace de 365 jours 5 heures 48 min. & 57 ſecondes de tems, qui eſt l'année *tropique* ou *ſolaire*; combien fait-il dans un jour? *Rép.* 59′ 8″ 19‴, &c.

*Queſt.* 9. Si $\frac{5}{8}$ d'une aune de velours coûtent $\frac{2}{3}$ d'une livre, que coûtera $\frac{1}{16}$ d'une aune du même velours au même prix? *Rép.* $\frac{16}{240}$ = 1 ſol 4 den.

*Queſt.* 10. Si trois aunes & $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ d'une aune de drap coûtent 2 liv. & $\frac{3}{8}$ d'un tiers d'une livre, que coûteront à ce prix les $\frac{3}{4}$ d'une aune? *Rép.* $\frac{2295}{4896}$ liv. = 9 ſ. 4 d. $\frac{1}{2}$.

---

## SECTION II.

### *De la Proportion réciproque ou Régle de Trois indirecte.*

LA *proportion réciproque* eſt celle où de quatre *nombres* le troiſiéme (ou celui qui forme la *queſtion*) eſt en même *raiſon* au premier que le ſecond au quatriéme; par conſéquent plus le troiſiéme *terme* eſt petit, comparé au premier, plus le quatriéme ſera grand, comparé au ſecond.

*EXEMPLE I.*

Si ſeize hommes peuvent faire un ouvrage en ſix jours, en combien de jours huit hommes feront-ils le même ouvrage, en travaillant de la même maniere?

Il eſt évident qu'il faut plus de tems à huit hommes qu'à ſeize pour faire le même ouvrage; par conſéquent plus le troiſiéme *terme* eſt grand, comparé au premier,

plus le quatriéme *terme* eſt petit, comparé au ſecond.

### EXEMPLE II.

Si huit hommes peuvent faire un ouvrage en douze jours, combien de jours faut-il à ſeize hommes pour faire le même ouvrage ? Il eſt clair que le quatriéme *terme* doit être plus petit que le ſecond, parce que ſeize hommes indubitablement peuvent faire le même ouvrage en moins de tems que huit hommes ne le font.

En joignant ces réflexions avec celles de la ſection précédente, on pourra aiſément s'appercevoir ſi les termes d'une queſtion propoſée ſont en *proportion directe* ou *réciproque* ; car lorſque ſelon le véritable état de la queſtion, *plus* produit *plus*, ou que *moins* produit *moins*, les termes ſont en *proportion directe*, comme dans la derniere *ſection*.

Mais ſi *plus* produit *moins*, ou que *moins* produiſe *plus* ( comme dans les deux exemples précédens ) les *termes* ſont en *proportion réciproque*.

Les *termes propoſés* ſe placent de la même maniere dans les deux *régles*, c'eſt-à-dire que le premier *terme* en *ſuppoſition* doit être de la même eſpece & dénomination que le troiſiéme *terme* qui forme la *queſtion*, & le *terme* requis doit être de la même eſpece & dénomination que le ſecond *terme* en *ſuppoſition*, comme dans les deux derniers exemples.

| | hommes. | | jours. | | hommes. | | jours. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Exemple* 1. | 16 | : | 6 | :: | 8 | : | — |
| *Exemple* 2. | 8 | : | 12 | :: | 16 | : | — |

La queſtion étant bien établie, il faut ſuivre ce *théorême*.

### THÉOREME.

Multipliez le premier terme par le ſecond, & diviſez leur produit par le troiſiéme terme, le quotient ſera la ſolution requiſe.

Ainsi dans le second *exemple*, 12 × 8 = 96, & 16 ) 96 ( = 6 jours. *Solution* requise ; c'est-à-dire que seize hommes peuvent faire dans six jours le même ouvrage que huit hommes font en douze jours.

La raison de cette opération ( & par conséquent du *théorême* ) est appuyée sur cette réflexion : si huit hommes demandent douze jours pour faire un ouvrage, il est clair qu'un homme en demandera huit fois autant, ou huit fois 12 = 96 jours pour faire le même ouvrage ; mais si un homme le peut faire en 96 jours, il est clair que seize hommes le pourront faire dans la seiziéme partie de ce tems ; donc 96 divisé par 16 donnera la solution requise, ou 16 ) 96 ( 6 comme auparavant, &c.

*Quest.* 3. Si 800 soldats sont assiégés dans une Ville, & qu'ils ayent des vivres pour deux mois ( ou 56 jours ), combien faudra-t-il renvoyer de soldats de la garnison, afin que les mêmes vivres suffisent à entretenir pendant cinq mois les soldats qui resteront ? L'état de la question

|  | *Mois.* |  | *Soldats.* |  | *Mois.* |  | *Soldats.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| est | 2 | : | 800 | : : | 5 | : | — |
|  |  |  | 2 |  |  |  |  |

5 ) 1600 ( 320 soldats qui resteront en garnison ; par conséquent 800 — 320 = 480 soldats qu'il faut renvoyer, ce qui est la *solution* requise.

*Quest.* 4. Le Sieur A. emprunte de son ami B. 250 liv. pour six mois, lui promettant de lui rendre le même service lorsqu'il le demandera. Quelque tems après B. demande à A de lui prêter 400 livres ; on demande combien de tems B. peut garder les 400 liv. pour être pleinement compensé du premier service qu'il a rendu à A ?

Ainsi 250 liv. : 6 mois : : 400 liv. : —
6

400 ) 1500 ( 3 mois 21 jours. *Rép.* 3 mois 21 jours.

*Quest.* 5. Un pain d'un sol doit peser six onces, lorsque le froment se vend 6 liv. 6 sols la *mesure* ; combien

doit-il peser lorsque le froment se vend 4 liv. la *mesure* ? *Rép.* 12 onces $\frac{3}{5}$ ;

car 6 liv. 6 s. = 126 s. : 8 on. :: 4 liv. = 80 s. : —

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 80)\ 1008\ (\ 12\frac{3}{5} \\ 20 \\ \hline 48 \end{array}$$

La preuve de cette *régle inverse* se conclut aisément de l'opération, c'est-à-dire que le *produit* des premier & second *termes* doit être égal au *produit* des troisiéme & quatriéme *termes.*

*Nota.* Toute question qui tombe sous cette régle *indirecte*, *inverse*, ou *réciproque*, peut se placer ensorte que tous ses *termes* soient en *proportion directe*, en changeant seulement les places des premier & troisiéme *termes* de la *question*, en cette maniere :

*Question 6.* Si un champ peut nourrir dix-huit chevaux pendant sept semaines, en combien de tems pourra-t-il en entretenir quarante-deux avec la même proportion de pâturage ?

Premierement, 18 *chevaux* : 7 *semaines* : : 42 *chevaux* : 3 *semaines.* Ici les termes sont placés en proportion réciproque comme auparavant. On peut les placer autrement ainsi, 42 *chev.* : 7 *sem.* : : 18 *chev.* : 3 *semaines*, & dans cette proportion directe, 18 × 7 = 126, & 126 ÷ 42 = 3. *Réponse* requise.

---

## SECTION III.

### *De la Proportion composée, ou Régle de Trois double.*

On entend ici par *proportion composée* celle où cinq *nombres* étant donnés, on en cherche un sixiéme proportionnel ; ce qui se fait ordinairement par une *double position*, c'est-à-dire en réduisant la question à deux opé-

*rations*, soit en proportion directe ou réciproque, selon que le cas l'exige; c'est pour cela qu'on la nomme *double régle d'Or*, ou *régle de Trois double.*

La *double régle directe* est celle où l'on trouve le sixiéme *terme* ou *nombre* requis par deux opérations, qui sont toutes deux en *proportion directe.*

*EXEMPLE I.*

Si cent livres rendent six liv. d'intérêt en douze mois, combien en produiront trois cens liv. dans neuf mois au même intérêt?

1°. 100 liv. : 6 liv. :: 300 liv. : 18 liv.

6

100 ) 1800 ( 18 liv. *Intérêt* de 300 l. en douze mois.

Ensuite 12 *mois.* : 18 *liv.* :: 9 *mois.* : 13 *liv.* 10 *sols.*

9

12 ) 162 ( 13 liv. 10 s. *Réponse* requise.

Je suppose que les commençans comprendront aisément la raison de ces deux *opérations*; car d'abord il est clair par la proportion directe, que si 100 liv. produisent 6 liv. dans douze mois, 300 liv. en produiront 18 dans le même tems, & au même intérêt.

Il est aussi clair par la même *régle*, que si douze mois produisent ou donnent 18 liv. d'intérêt pour 300 livres, neuf mois en donneront 13 $\frac{1}{2}$ pour la même somme de 300 livres.

La *double régle de Trois inverse* est celle où l'on trouve le sixiéme *terme* ou *nombre* requis par deux *opérations*, comme auparavant, mais où l'une des deux est une *proportion réciproque.*

*Quest.* 2. Si six boisseaux d'avoine suffisent à quatre chevaux pendant huit jours, en combien de jours vingt-un boisseaux suffiront-ils pour 16 chevaux nourris de même?

Cette question étant réduite à deux *positions*, la pre-

miere ſera conçue en cette maniere : Si ſix boiſſeaux d'avoine ſuffiſent à quatre chevaux pendant huit jours, en combien de jours ces quatre chevaux conſommeront-ils vingt-un boiſſeaux ?

Il eſt évident que vingt-un boiſſeaux demandent plus de tems que ſix, & par conſéquent la premiere *poſition* eſt en *proportion directe*, en cette maniere :

6 *boiſ.* : 8 *jours.* : : 21 *boiſ.* : 28 *jours.*
8
6 ) 168 ( 28 *jours*,

c'eſt-à-dire ſi ſix boiſſeaux ſuffiſent à quatre chevaux pour huit jours, vingt-un leur ſuffiront pour 28 jours.

La *poſition* ſuivante conſiſte à trouver pendant combien de jours ces 21 boiſſeaux ſuffiront à ſeize chevaux nourris de même : il eſt évident que 21 boiſſeaux ne peuvent pas entretenir ſeize chevaux auſſi long-tems que quatre, par conſéquent la ſeconde *poſition* eſt en *proportion réciproque*, en cette maniere :

4 *chev.* : 28 *jours.* : : 16 *chev.* : 7 *jours.* *Réponſe* requiſe.

Mais toutes ces queſtions de la *double régle de Trois*, où l'on propoſe cinq *nombres* pour en trouver un ſixiéme, peuvent ſe réſoudre plus aiſément & plus promptement par un *théorême général* qui renferme les deux *régles de Trois directe* & *inverſe*, ſans les conſiderer chacune en particulier, & il ſe tire des opérations précédentes.

Mais il faut auparavant bien remarquer que dans toutes les *queſtions* de cette nature, trois des cinq *termes* propoſés ſont toujours conditionnels & ſuppoſés, & que les deux autres fixent la queſtion. Ainſi dans l'*exemple* 1$^{er}$, ſi 100 liv. rendent 6 liv. en douze mois, ces trois *termes* ſont ſeulement ſuppoſés ou conditionnels, & la queſtion ſe forme par ceux-ci : que rendront 300 liv. en neuf mois ? Or pour former un théorême général, nous ſuppoſerons au lieu de ces nombres les lettres ſuivantes.

Soit $\left\{\begin{array}{l} P = 100, \textit{ le principal.} \\ T = 12, \textit{ le tems.} \\ G = 7, \textit{ le gain.} \end{array}\right\}$ Dans la ſuppoſition de toutes les queſtions propoſées.

Et $\left\{\begin{array}{l} p = 300, \textit{ le principal.} \\ t = 9, \textit{ le tems.} \\ g = 13,5, \textit{ le gain.} \end{array}\right\}$ Les trois termes qui fixent la queſtion.

Or $P : G :: p : \frac{Gp}{P}$ = au *produit* des deux *moyens*, diviſé par le premier terme, c'eſt-à-dire $100 : 6 :: 300 : \frac{300 \times 6}{100} = 18$, ce qui eſt la premiere partie de la queſtion;

mais $T : \frac{Gp}{P} :: t : g$

ou $12 : 18 :: 9 : 13,5$ } ce qui eſt la ſeconde partie de la queſtion :

Donc $Tg = \frac{Gpt}{P}$, c'eſt-à-dire le produit des extrêmes égal à celui des moyens : donc $TgP = Gpt$; c'eſt le *théorême.*

Ce théorême fournit deux *régles*, par leſquelles on peut réſoudre toutes les queſtions de cette *double régle de Trois*, ou plutôt de cinq *nombres*, ayant égard à bien placer les *nombres* propoſés; ce qui doit ſe faire en cette maniere.

Placez toujours les trois *termes conditionnels* dans l'ordre ſuivant.

Le *nombre*, qui eſt la principale cauſe du *gain*, de la *perte*, ou de l'*action* ( qui eſt ici $P$ ) doit être mis à la premiere place; celui qui marque le tems, ou la diſtance, &c. ( qui eſt $T$ ) à la ſeconde place; & celui qui indique le *gain*, la *perte* ou l'*action*, &c. ( c'eſt-à-dire $G$ ) à la troiſiéme place, & ſelon cette régle, les *termes conditionnels* de la derniere queſtion ſeront placés en cette maniere : $P, T, G.$

Ce qui étant fait, les deux autres *termes* qui fixent la queſtion, doivent être placés ſous ceux de la même eſpece, en cette maniere : $\left\{\begin{array}{lll} P. & T. & G \\ p. & t. & g. \end{array}\right.$

Ensuite si le *terme* requis tombe sous la troisiéme place, comme dans cette question, on aura $\frac{Gpt}{PT} = z$; ce qui donne cette *régle*.

### REGLE I.

*Multipliez ensemble les trois derniers* termes, *& divisez leur* produit *par le* produit *des deux autres*, *le* quotient *de cette division sera le sixième* terme, *c'est-à-dire dans notre premier* exemple *proposé*,

$6 \times 300 \times 9 = 16200$, *dividende*,

& $100 \times 12 = 1200$, *diviseur*;

Donc 1200 ) 16200 ( $13\frac{1}{2}$. *Réponse* comme ci-devant.

Mais si le *terme* requis tombe sous la premiere place, on aura $\frac{TgP}{tG} = p$; ou s'il tombe sous la seconde, on aura $\frac{TgP}{Gp} = t$. Ces deux cas donnent cette *régle générale*.

### REGLE II.

*Multipliez ensemble les premier, second & dernier* termes, *& divisez leur* produit *par le* produit *des deux autres* : *le* quotient *sera le sixième* terme.

Et comme l'*exemple* 2. renferme les deux proportions *directe* & *réciproque*, nous allons le proposer une seconde fois.

Si six boisseaux d'avoine suffisent à quatre chevaux pour huit jours, combien de jours faut-il à seize chevaux pour vingt-un boisseaux?

Si l'on place bien les termes de cette question, on aura

4 chev. 8 jours. 6 boiss. *Termes en supposition.*
16 21

Ici le terme requis tombe sous la seconde place; il faut donc le trouver par la seconde régle.

$4 \times 8 \times 21 = 672$, *dividende*,

$16 \times 6 = 96$, *diviseur* :

Donc 96 ) 672 ( 7, *terme* requis comme auparavant.

*Question* 3. Quel fonds ou principal produira 20 liv. en huit mois à six pour cent par an ?

| *Principal.* | *Tems.* | *Gain.* | |
|---|---|---|---|
| 100. | 12. | 6, | *Termes en supposition.* |
| | 8. | 20 | |

Dans cette *question* le terme requis tombe sous la premiere place ; il faut donc le trouver par la seconde régle, en cette maniere :

$100 \times 12 \times 20 = 24000$, *dividende*,
$8 \times 6 = 48$, *diviseur* :

Or 48 ) 24000 ( 500 liv. *Réponse* requise.

La preuve de toutes les *questions* dans cette *régle double* de cinq *nombres*, se fait en variant la *question*, c'est-à-dire en lui donnant un autre ordre, comme dans le dernier *exemple*, en cette maniere :

Si 100 liv. produisent 6 liv. en douze mois, que produiront 500 liv. en huit mois ? La *réponse* à cette *question* doit être 20 liv. si l'on a bien operé dans le dernier *exemple* ; car

| *Principal.* | *Tems.* | *Gain.* |
|---|---|---|
| 100. | 12. | 6 |
| 500. | 8. | |

Or par la *régle premiere*, $500 \times 8 \times 6 = 24000$, & $100 \times 12 = 1200$ : 1200 ) 24000 ( 20 liv. *Réponse*.

*Quest.* 4. Si deux hommes peuvent faire douze toises d'un fossé en six jours, combien de toises pourront faire huit hommes en vingt-quatre jours avec le même travail ? *Réponse*, 192 toises.

*Quest.* 5. Si la voiture de cinq quintaux $\frac{3}{4}$ dans l'espace de 150 milles coûte 3 liv. 7 sols 4 deniers, combien coûtera la voiture de sept quintaux $\frac{2}{4}$ vingt-cinq livres dans l'espace de 64 milles au même prix, & le quintal étant de 112 livres ? *Rép.* 1 liv. 18 sols 7 den. $\frac{1}{2}$.

*Quest.* 6. Si huit hommes gagnent 2 liv. en cinq jours, combien gagneront trente-deux hommes en vingt-quatre jours au même prix ? *Rép.* 38 liv. 8 sols.

*Quest.* 7. Si 100 livres défrayent les dépenses de cinq

hommes en vingt-deux ſemaines & ſix jours, combien de tems faut-il à douze hommes pour dépenſer 150 liv. au même prix? *Rép.* quatorze ſemaines & deux jours.

# CHAPITRE VIII.

## *Des Régles de Compagnie, de Troc, de Change, &c.*

LA *régle de Compagnie* eſt celle qui régle tellement les comptes de ceux qui négocient dans une compagnie, que chaque particulier a la part du *gain* qui lui eſt dûe, ou connoît la *perte* qu'il doit ſupporter à proportion des ſommes qu'il a avancées. Il y a deux *régles de Compagnie*, l'une ſimple, & l'autre double.

## SECTION PREMIERE.

### *De la Régle de Compagnie ſimple, ou ſans avoir égard au tems.*

CEtte *régle* ſert à partager le gain que pluſieurs aſſociés ont fait dans un même tems, en plaçant chacun différens fonds dans un même commerce. Toutes les queſtions de cette nature ſe réduiſent à autant de régles de Trois directes qu'il y a d'aſſociés; car comme la ſomme totale, miſe en fonds, eſt au gain total ou à la perte totale, ainſi la miſe particuliere de chaque aſſocié eſt au gain ou à la perte particuliere.

*Queſtion* 1^re^. Trois aſſociés, *A*, *B* & *C* ont fait un fonds de 960 liv. en cette maniere : le premier *A* a mis 240 livres, le ſecond *B* 320 livres, & le troiſiéme *C* 400 liv. Ces 960 liv. ont produit un gain de 120 livres; on demande le gain de chaque aſſocié.

La premiere opération pour le gain de *A* ſe fait en cette maniere :

960 liv. : 120 liv. :: 240 l. : 30 liv. gain de *A*.
La 2^e. 960 liv. : 120 liv. :: 320 l. : 40 liv. gain de *B*.
La 3^e. 960 liv. : 120 liv. :: 400 l. : 50 liv. gain de *C*.
*Preuve*, 30 liv. + 40 liv. + 50 l. = 120 l. gain total. C'eſt-à-dire ſi la ſomme des gains particuliers eſt égale au gain total, la régle a été bien faite ; ſi elle n'eſt pas égale, il y a quelque erreur qu'il faut découvrir.

On peut beaucoup abréger ces opérations, ſi l'on ſe ſert du *théor.* 2. du *chapitre* précédent ; car 960 & 120 étant les deux mêmes termes dans les trois proportions, on dira, 960 : 120 :: 1 : 0, 125, qui ſera le *multiplicateur* commun.

Enſuite $240 \times 0{,}125 = 30$ l. pour *A*.
$320 \times 0{,}125 = 40$ l. pour *B*.
& $400 \times 0{,}125 = 50$ l. pour *C*.
} comme auparavant.

Cette méthode eſt plus prompte que la premiere, ſurtout lorſqu'il y a beaucoup d'aſſociés, parce qu'on ne fait qu'une ſeule diviſion.

*Queſt.* 2. Trois Marchands *A*, *B*, & *C* ont chargé un navire de 248 *tonneaux* de *vin*. L'un *A* en a fourni 98 ; *B*, 86, & *C* 64. La tempête a forcé le Pilote à en jetter 93 dans la mer : on demande la perte de chaque Marchand ?

1°. 248 : 93 :: 1 : 0,375, *multiplicateur commun.*

Or $98 \times 0{,}375 = 36{,}75$, perte de *A*.
, $86 \times 0{,}375 = 32{,}25$, perte de *B*.
& $64 \times 0{,}375 = 24$, perte de *C*.

*Preuve* 93,00, perte totale.

Si l'on vouloit trouver combien il reſte de tonneaux à chacun,

$98 - 36{,}75 = 61{,}25$ qui appartiennent à *A*.
$86 - 32{,}25 = 53{,}75$ qui appartiennent à *B*.
$64 - 24 = 40$ appartenant à *C*.

*Queſtion* 3. Six hommes *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, & *F* ont fait un fonds de 2558 liv. en cette maniere.

| | Livres. | Sols. | | Décimales. |
|---|---|---|---|---|
| *A* a mis | 654. | 10 | = | 654,5 |
| *B* . . . | 543. | 15 | = | 543,75 |
| *C* . . . | 480. | 0 | = | 480 |
| *D* . . . | 254. | 10 | = | 254,5 |
| *E* . . . | 365. | 5 | = | 365,25 |
| *F* . . . | 260. | 0 | = | 260. |
| *Fonds total* | 2558. | 0 | = | 2558,00 *selon la supposition.* |

Avec ce fonds ils ont négocié dix-huit mois, & ont gagné 831 liv. 7 sols; on demande la part que chacun doit avoir au gain?

*Nota*. Quoiqu'on fasse mention ici du tems, qui est de dix-huit mois, on ne doit pas y faire attention, parce qu'il est égal pour les six Associés.

1°. 2558 l. : 831,35 l. :: 1 l. : 0,325 *parties décimales*; par conséq. 1 l. : 0,325 :: 654,5 : 212,7125, c'est-à-dire Fonds de *A*, 654,5 × 0,325 = 212,7125 pour le gain de *A*.

de *B*. 543,75 × 0,325 = 176,71875 pour *B*.
*C*. 480, × 0,325 = 156,00000 pour *C*.
*D*. 254,5 × 0,325 = 82,7125 pour *D*.
*E*. 365,25 × 0,325 = 118,70625 pour *E*.
*F*. 260, × 0,325 = 84,5 pour *F*.

| | | Liv. Parties. | | Livres. | Sols. | De:. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| c'est-à-dire | gain de *A*. | 212,7125 | = | 212. | 14. | 3 |
| | de *B*. | 176,71875 | = | 176. | 14. | 4 ½ |
| | *C*. | 156,00000 | = | 156. | 0. | 0 |
| | *D*. | 82,7125 | = | 82. | 14. | 3 |
| | *E*. | 118,70625 | = | 118. | 14. | 1 ½ |
| | *F*. | 84,5 | = | 84. | 10. | 0 |
| *Preuve.* | *Somme* | 831,35 | = | 831. | 7. | 0, *gain.* |

Je n'ai pas voulu résoudre cette question par la méthode ordinaire, en cherchant par la *régle d'Or* le gain de chaque Associé, comme dans l'opération du premier *exemple*. Je laisse ce soin aux commençans pour les exercer.

## SECTION II.

*De la double Régle de Compagnie, ou de celle qui a rapport au tems.*

CEtte régle se nomme ainsi, parce qu'on y considere le fonds de chaque particulier, relativement au tems pendant lequel il a été employé.

*Question* 1re. *A* & *B* ont fait une société à ces conditions : *A* consent à fournir 100 liv. pour être employées au commerce pendant trois mois ; *B* fournit aussi 100 l., mais à la fin des trois mois, & le commerce étant continué encore trois mois, le gain total est de 21 livres : on demande quel est le gain de chacun, eu égard aux fonds & au tems ?

On voit que *A* doit gagner plus que *B*, quoique leurs mises soient égales, parce que le fonds de *A* a été employé plus long-tems que celui de *B*.

Pour résoudre cette question, supposons que les 100 l. de *A*, employées les trois premiers mois, ont gagné $z =$ à une somme inconnue ; elles auront donc gagné $2z$ en six mois ; & pour trouver ce que *B* doit avoir gagné, on fera $\left\{\begin{array}{lll} 100^{\text{liv.}} & 6^{\text{mois.}} & 2z, \text{ gain de } A. \\ 100 & 3, & \text{gain de } B. \end{array}\right\}$ par la premiere régle de la derniere du chapitre précédent.

Donc $\frac{100 \times 3 \times 2z}{100 \times 6} =$ gain de *B*.

Mais le gain de *A*, ajouté à celui de *B*, doit être de 21 livres, gain total par l'état de la *question*.

Donc $2z + \frac{100 \times 3 \times 2z}{100 \times 6} = 21$ livres, c'est-à-dire $100 \times 6 \times 2z + 100 \times 3 \times 2z = 21 \times 100 \times 6$ ; ce qui étant abrégé, donne $900 \times 2z = 21 \times 600$ : donc $2z = \frac{21 \times 600}{900}$, ce qui fournit l'analogie suivante.

$900 : 21 :: 600 : 2z = 14$ liv. pour le gain de *A*,

& $900 : 21 :: 100 \times 3 = 300 : 7$ liv. pour le gain de *B*.

Or

Or cette méthode n'est pas particuliere à la question présente, mais elle peut fournir & démontrer une régle générale pour résoudre toutes les questions de cette nature, quelque grand que soit le nombre des Associés.

## Regle.

*Multipliez le* fonds *de chaque* particulier *par le tems où il a été employé, & dites, comme la somme de tous ces* produits *est au gain total (ou à la perte), ainsi chacun de ces produits est à la partie proportionnelle du gain (ou de la perte).*

*Quest.* 2. Trois Marchands *A*, *B* & *C* sont entrés en société. La mise de *A* est de 65 liv. pour huit mois; celle de *B* de 78 pour douze mois, & celle de *C* de 84 pour six mois: ils ont gagné à la fin 166 liv. 12 sols; on demande le gain de chacun proportionnel au tems & à la mise?

1°. Fonds de *A* $65^{l.} \times 8^{mois}$, *tems où il a été employé* $= 520$
2°. Fonds de *B* $78 \times 12$ . . . . . . . . $= 936$
3°. Fonds de *C* $84 \times 6$ . . . . . . . . . $= 504$

La *somme* de tous ces *produits* est . . . . 1960

Ensuite on aura, selon la *régle*, toutes les proportions suivantes.

$1960 : 166{,}6 :: 520 : 44{,}2 = 44$ l. 4 s. 0 den. pour *A*.
$1960 : 166{,}6 :: 936 : 79{,}56 = 79$ l. 11 s. $2\frac{1}{2}$ d. pour *B*.
$1960 : 166{,}6 :: 504 : 42{,}84 = 42$ l. 16 s. $9\frac{1}{2}$ d. pour *C*.

*Gain total* = 166 l. 12 s. 0 den.

Ou bien on opérera comme dans quelques-uns des *exemples* précédens, en cherchant la partie proportionnelle du gain dû à une livre, &c. en cette maniere:

$1960 : 166{,}6 :: 1 : 0{,}85$, commun *multiplicateur*.

Ensuite $\begin{cases} 520 \times 0{,}085 = 44{,}2 \text{ pour } A. \\ 936 \times 0{,}085 = 79{,}56 \text{ pour } B. \\ 504 \times 0{,}085 = 42{,}84 \text{ pour } C. \end{cases}$ &c. comme ci-devant.

*Quest.* 3. Six Marchands *A*, *B*, *C*, *D*, *E* & *F* entrent en société, & font un fonds en cette maniere :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* met | 64 liv. | 10 sols. | pour | $4\frac{1}{2}$ | mois. |
| *B* . . . | 78 | 15 | | 6 | |
| *C* . . | 100 | 0 | | $8\frac{1}{4}$ | |
| *D* . . . | 80 | 10 | | 12 | |
| *E* . . . | 74 | 12 | | $9\frac{1}{2}$ | |
| *F* . . | 125 | 15 | | 7 | |

Ils ont gagné dans leur commerce 258 liv. 18 f. $4\frac{1}{2}$ d. on demande le gain de chacun à proportion du fonds & du tems ?

Il est bon de réduire d'abord en nombres décimaux les fonds & les tems respectifs de chacun pour les multiplier ensemble, ce qui donnera les produits suivans.

| | Liv. | Mois. | | |
|---|---|---|---|---|
| Fonds de *A* | 64,5 | × 4,5, | *tems où il a été employé* | =290,25 |
| Fonds de *B* | 78,75 | × 6, | . . . . . . . . . . . . . | =472,5 |
| Fonds de *C* | 100, | × 8,25 | . . . . . . . . . . . . . | =825,0 |
| Fonds de *D* | 80,5 | × 12, | . . . . . . . . . . . . . | =966,0 |
| Fonds de *E* | 74,6 | × 9,5 | . . . . . . . . . . . . . | =708,7 |
| Fonds de *F* | 125,75 | × 7, | . . . . . . . . . . . . . | =880,25 |
| | | | *Somme de ces produits* | 4142,7 |

Ensuite par la méthode ordinaire, on aura 4142,7 : 258,91875 : : 290,25 : 18,140625 = 18 liv. 2 f. $9\frac{1}{4}$ d. pour le gain de *A*, & ainsi des autres.

Mais par la seconde méthode plus aisée, en cherchant la partie proportionnelle du gain dû à une *livre*, on dira : 4142,7 : 258,91875 : : 1 : 0,0625. Ensuite

| | | | Liv. | Sols. | Den. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 290,25 × 0,0625 | = 18,140625 | = | 18. | 2. | $9\frac{1}{4}$ | pour *A*. |
| 472,5 × 0,0625 | = 29,53125 | = | 29. | 10. | $7\frac{1}{2}$ | pour *B*. |
| 825, × 0,0625 | = 51,5625 | = | 51. | 11. | 3 | pour *C*. |
| 966, × 0,0625 | = 60,375 | = | 60. | 7. | 6 | pour *D*. |
| 708,7 × 0,0625 | = 44,29375 | = | 44. | 5. | $10\frac{1}{2}$ | pour *E*. |
| 880,25 × 0,0625 | = 55,015625 | = | 55. | 0. | $3\frac{3}{4}$ | pour *F*. |
| | *Gain total* | | 258. | 18. | $4\frac{1}{2}$ | |

Ce petit nombre d'exemples bien compris, suffit pour toutes les opérations des régles de société, &c.

---

## SECTION III.

### *Du Troc.*

On appelle *troc*, l'échange d'une marchandise pour une autre : toute la difficulté consiste à bien proportionner les marchandises, ensorte qu'il n'y ait aucune perte de part ni d'autre.

*Question 1re.* Deux Marchands *A* & *B* font un troc. *A* veut changer cinq quintaux $\frac{3}{4}$ quatorze livres de poivre, qui vaut 3 liv. 10 sols le quintal, avec *B*, pour du coton qui vaut 10 den. la livre pesant ; combien de coton *B* doit il donner à *A* pour son poivre ?

*Nota.* Pour bien résoudre cette question ( & toutes les autres de cette nature ), il faut d'abord trouver par la *régle de Trois* ( ou autrement ) la vraie valeur de la marchandise, dont la quantité est donnée ( laquelle dans cette question est le *poivre* ) ; & ensuite trouver la quantité de l'autre marchandise, qui monte à cette somme, au prix proposé.

1°. 5 quint. 3 quarts 14 liv. = 5,875 }
& 3 liv. 10 sols 0 den. = 3,5 } en *nombres déc.*

Ensuite 1 : 3, 5 :: 5, 875 : 20, 5625 = 20 liv. 11 s. 3 d. vraie valeur du *poivre*.

Cela fait, il est aisé de concevoir que *A* doit avoir la quantité de coton à 10 d. la livre, qui monte à la somme de 20 liv. 11 sols 3 den. ; ce qui peut se trouver en cette maniere : 10 den. : 1 liv. :: 20 l. 11 s. 3 d. = 4235 d. : 493,5 liv. = 4 quint. 1 quart 17 $\frac{1}{2}$ liv. de coton que *B* doit donner à *A* en échange de ses cinq quintaux trois quarts quatorze livres de poivre.

*Question 2.* Deux Marchands *A* & *B* font un troc. *A* donne 86 aunes de drap, qui valent 9 sols 2 deniers

l'aune en argent comptant, mais en troc il veut en avoir 11 sols l'aune. *B* a un autre drap qui vaut 2 sols 1 den. l'aune en argent comptant : on demande combien d'aunes du drap de *B* équivalent à celles du drap de *A* pour rendre son gain égal dans le troc à celui de *A* ?

La maniere de résoudre cette question & les autres semblables, different un peu de celle du dernier cas ; car il faut premierement dans celle-ci trouver combien *B* doit augmenter le prix de son drap pour le proportionner à l'augmentation du prix de celui de *A*, en cette maniere : 9 sols 2 den. = 110 den. : 11 s. = 132 d. :: 2 s. 1 den. = 25 d. : 2 s. 6 d. = 30 d., prix de l'aune du drap de *B* en troc. Ensuite on dira comme dans le dernier *exemple*, une aune : 11 s. :: 86 aunes : 946 s. = 47 liv. 6 sols, valeur supposée de tout le premier *drap*.

Or si une aune du second drap vaut en troc 2 s. 6 d., combien d'aunes vaudront 47 liv. 6 sols, ou 2,5 : 1 :: 946 : 378,4 aunes ? c'est-à-dire que *B* doit donner 378 $\frac{2}{5}$ aunes de son drap à *A* pour ses 86 aunes de drap.

Ces deux exemples suffisent pour faire comprendre aux commençans la régle du *troc*, ou de l'échange des marchandises, qui dépend uniquement de l'intelligence de la *régle d'Or*, ainsi appellée à cause de son grand usage qui s'étend par-tout.

---

## SECTION IV.

### *Du Change des Monnoies.*

Le change des monnoies d'un pays en monnoies d'un autre, revient au *troc* des *marchandises*, c'est-à-dire qu'il consiste à trouver quelle somme de la monnoie d'un pays est égale en valeur à une somme proposée de monnoies d'un autre pays ; & pour en venir à bout, il faut nécessairement connoître dans tous les tems la valeur précise de toutes les monnoies étrangeres que l'on veut changer

& comparer avec une autre : je dis dans tous les tems, parce que le *pair* du *change* (comme tous les Marchands l'appellent) varie tous les jours, c'est-à-dire qu'il baisse ou monte selon que la monnoie est rare ou abondante, ou selon le terme fixé pour le paiement, &c.

*Quest.* 1. Combien aura-t-on de *rixdales* de l'Empire à 4 sols 6 den. par *rixdale* pour 162 liv. 18 s. d'*Angleterre*? *Réponse* 724; car 162 liv. 18 s. = 3258 s., & 4 s. 6 d. = 4,5 sols : or 4,5 : 1 :: 3258 : 724. *Réponse*.

*Quest.* 2. Combien aura-t-on de *ducats de Saragosse* à 5 s. 6 d. le *ducat* pour 275 *ducats de Bergame*, à 4 sols 4 den. chacun? *Réponse* 216, & 3 s. 8 d. de plus; car 5 s. 6 den. = 66 den., & 4 s. 4 den. = 52 den.; mais 275 × 52 = 14300 deniers = 275 *ducats*. Donc 66) 14300 ( $216 \frac{2}{3}$. *Réponse* requise.

*Quest.* 3. Un voyageur veut changer 233 liv. 16 s. 8 d. *sterlings* pour des *ducats de Venise* à 4 s. $9 \frac{1}{2}$ par *ducat*; combien doit-il avoir de *ducats*? *Réponse*, 976 *ducats*; car 4 s. $9 \frac{1}{2}$ d. = 57,5 d., & 233 l. 16 s. 8 d. = 56120 d. Or 57,5 den. ) 56120 d. ( 976. *Réponse* requise.

*Quest.* 4. Un Caissier a reçu 759 *ducats* à 7 s. 6 d. par *ducat*, & 579 *rixdales* à 4 s. 8 d. par *rixdale*, qu'il veut changer pour des *marcs de Flandres* à 14 s. 3 den. chacun; combien doit-il en recevoir? *Rép.* 589 *marcs*, & 15 den. de plus; car 7 s. 6 d. = 90 den., & 4 s. 8 d. = 56 d.

Or $\begin{cases} 759 \times 90 = 68310\, d., \text{ valeur des } ducats. \\ 579 \times 56 = 32424\, d., \text{ valeur des } rixdales. \end{cases}$

*Leur somme* 100734 *d.*

Et 14 sols 3 den. = 171 den., *marc de Flandres*; donc 171 ) 100734 ( 589, &c. *Réponse*.

*Quest.* 5. Une Lettre de change a été acceptée à *Londres* en paiement de 400 liv. *sterlings* pour même valeur livrée à *Amsterdam* à une liv. 13 s. 6 den. pour une liv. *sterling*; combien a-t'on livré de monnoie à *Amsterdam*? *Rép.* 670 liv. *Flamandes*; car 1 liv. = 240 den., & 1 l. 13 s. 6 d. = 402 d. Or 240 : 402 :: 400 : 670. *Rép.* requise.

*Queſt.* 6. Lorſque le Change d'*Anvers* à *Londres* étoit d'une liv. 14 ſ. 7 d. de *Flandres* pour une liv. *ſterling*; combien de *livres ſterlings* a-t-il fallu payer à *Londres* pour balancer 236 liv. de *Flandres* à *Anvers?* *Rép.* 192 l. *ſterl.* car une liv. 4 ſ. 7 d. = 295 d., & une liv. = 240 den. Or 295 : 240 :: 236 : 192. *Réponſe.*

*Queſt.* 7. Un Marchand a donné à *Londres* 120 livres ſterlings pour recevoir 147 liv. de *Flandres* à *Amſterdam*; combien valoit une livre ſterling en monnoie de *Flandres?* *Rép.* une liv. 4 ſols 6 den; car 120 : 147 :: 240 den. : 294 den. = une liv. 4 ſ. 6 den., &c.

*Queſt.* 8. Un Commis a vendu des marchandiſes à *Cadix* pour 1468 pieces de huit, évaluées 4 ſols 6 $\frac{1}{2}$ den. ſterlings chaque piece; à combien de livres ſterlings montent ces pieces de huit? *Rép.* 333 liv. 7 ſ. 2 den.; car ſi 1 = 54,5 den., 1468 × 54, 5 = 80006 den., &c.

*Queſt.* 9. Un Voyageur veut avoir un nombre égal d'*écus* à 5 ſ. 6 den. l'*écu*, & de *rixdales* à 4 ſ. 5 den. chacune; combien en aura-t-il de chaque eſpece pour 309 l. 8 ſols? *Rép.* 624 de chacun; car 309 liv. 8 ſ. = 74256, & 5 ſols 6 den. + 4 ſols 5 den. = 119 den. : or 119 ) 74256 ( 624. *Réponſe* requiſe.

*Queſt.* 10. Suppoſons que je veuille changer 527 liv. 17 ſols 6 den. pour des *rixdales* à 4 ſols 6 den. la piece, pour des *ducats* à 5 ſols 8 den., & des *écus* à 6 ſols 1 d., & que je veuille avoir deux *rixdales* pour un *ducat*, & trois *rixdales* pour deux *écus*; combien en aurai-je de chacun? *Rép.* 927 *rixdales*, 463 $\frac{1}{2}$ *ducats*, & 618 *écus*;

car $\left\{\begin{array}{l} 54\,d. = 1 \textit{ rixdale} \\ 68\,d. = 1 \textit{ ducat} \\ 73\,d. = 1 \textit{ écu} \end{array}\right\}$ par la queſtion, & 126690 d. = 527 liv. 17 ſols 6 den.

Si le nombre des écus, rixdales & ducats devoit être le même, on diviſeroit 126690 par 73 + 54 + 68, & le *quotient* ſeroit la réponſe à la queſtion, comme dans le dernier *exemple* : mais ici au lieu de leur ſomme, on veut en prendre des parties déterminées, ou limitées par

la question, pour pouvoir trouver le nombre de quelqu'une de ces monnoies; & parce qu'il doit y avoir deux rixdales pour un ducat, & trois pour deux écus, on aura la moitié d'un ducat pour une rixdale, & deux tiers d'un écu pour une rixdale; donc $54 + \frac{68}{2} : + \frac{2}{3}$ de $73 = 136\frac{1}{3}$, ou $\frac{410}{3}$ doit être le *diviseur* nécessaire pour trouver le nombre des *rixdales*, en cette maniere :

$\frac{410}{3}$) 126690 (927, nombre des *rixdales*,
& $\frac{1}{2}$ de $927 = 463\frac{1}{2}$, nombre des *ducats*,
$\frac{2}{3}$ de $927 = 618$, nombre des *écus*.

Ou si l'on veut, on peut former les *diviseurs* pour trouver d'abord les *ducats*, ou les *écus*; car si l'on prend deux *rixdales* pour un *ducat*, & trois pour deux *écus*, comme ci-devant, on aura six *rixdales* pour trois *ducats*, & autant pour quatre *écus* :

Donc on aura $\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}\text{ d'une } rixdale\\ \frac{3}{4}\text{ d'un } ducat\end{array}\right\}$ pour un *écu*;

par conséquent $\frac{3}{2}$ de $54 + \frac{3}{4}$ de $68 + 73 = 205$ sera le *diviseur* pour trouver d'abord les *écus*, &c.

*Quest.* 11. Un Caissier doit recevoir 500 livres; on lui offre des *écus* à 6 sols $1\frac{1}{2}$ den. par *écu*, qui ne vaut que 6 sols, ou bien des *rixdales* à 4 s. 5 den. chacune, qui ne valent que 4 sols 4 deniers : quelle est la monnoie qu'il doit préférer pour avoir moins de perte, & combien perdra-t-il dans ce payement ?

1°. $\left\{\begin{array}{l}\text{un } écu = 72\ d.\\ \text{une } rixd. = 52\ d.\end{array}\right\}$ selon leurs vraies valeurs.

2°. $\left\{\begin{array}{l}\text{un } écu = 73,5\ d.\\ \text{une } rixd. = 53\ d.\end{array}\right\}$ selon leurs valeurs fausses.

Pour trouver où est la moindre perte, il faut voir ce que doit être la valeur supposée d'une *rixdale* à proportion de celle d'un *écu*, en cette maniere : 72 : 73,5 :: 52 : 53,22, &c : mais il doit recevoir les *rixdales* à 53 d. Donc ce paiement est la moindre perte, 53 étant moindre que 53,22, &c.

Ensuite pour trouver à quoi monte toute la perte, il faut diviser 120000 d. = 500 liv. par 52 & 53 : la différence de leurs *quotients* sera la perte.

Ainsi 52 ) 120000 ( $2307\frac{9}{13}$, & 53 ) 120000 ( $2264\frac{8}{53}$, & $2307\frac{9}{13} - 2264\frac{8}{53} = 43\frac{573}{639}$ *rixdales* à 4 s. 4 den., c'est la perte = 9 liv. 8 s. $10\frac{226}{639}$ den.

Il y a d'autres moyens de résoudre cette derniere question ; mais cette méthode me paroît la plus aisée.

*Quest.* 12. J'ai changé 4 liv. 10 s. 10 den. pour 11 *écus* & 7 *rixdales*, & dans un autre tems j'ai 4 *écus* & 3 *rixdales* pour une liv. 15 sols, les valeurs étant les mêmes qu'auparavant : quelle est la valeur d'un *écu* & d'une *rixdale* ?

1°. 11 *écus* + 7 *rixdales* = 1090 d. } par l'état de la
2°. 4 *écus* + 3 *rixdales* = 420 d. }
question.

Pour trouver la valeur d'un *écu*, je n'ai qu'à chasser les *rixdales*, en les faisant de même nombre dans les deux cas, en cette maniere :

33 *écus* + 21 *rixd.* = 3270 d. en *multipl.* le premier par 3.
28 *écus* + 21 *rixd.* = 2940 d. en *multip.* le second par 7.
Donc 5 *écus* leur différence = 330 d. Donc 5 ) 330 ( 66 = 5 sols 6 den, valeur d'un *écu*, & 4 *écus* = 264 den. Ensuite 3 *rixdales* = 420 den. — 264 d. = 156 den., par conséquent 3 ) 156 ( 52 den. = 4 sols 4 den., valeur d'une *rixdale*.

---

# CHAPITRE IX.

## DE L'ALLIAGE.

LORSQU'ON veut mêler ensemble plusieurs sortes d'ingrédiens, comme différentes sortes de *grains*, de *vins*, de *draps*, d'*épiceries* ou de *métaux*, ou composer des *médecines*, &c. on appelle *régle d'Alliage* la maniere de proportionner ces mêlanges, & on la divise en deux especes, l'une *moyenne*, & l'autre *alternative*.

# SECTION PREMIERE.

## *De l'Alliage moyen.*

L'*Alliage moyen* eſt celui par lequel on trouve le prix moyen de chaque mêlange, lorſque les prix & les quantités particulieres des choſes mêlées ſont donnés; & l'on obſerve cette régle.

On prend d'abord la ſomme de toutes les quantités que l'on veut mêler, & celle de leurs prix particuliers; après quoi on fait cette régle de proportion.

### Regle.

*Comme la ſomme de toutes les quantités eſt à la ſomme de tous leurs prix, ainſi chaque partie du mêlange eſt au prix moyen de cette partie.*

*Queſtion* 1[re]. On veut mêler 15 *boiſſeaux* de *froment* à 5 ſols le boiſſeau, avec douze boiſſeaux de *ſeigle* à 3 ſ. 6 d. le boiſſeau : quel en eſt le prix moyen, ou à quel prix peut-on vendre, ſans perte & ſans gain, le boiſſeau de ce mêlange?

On prépare la ſolution de cette queſtion en cette maniere :

15 *boiſ.* de *froment* à 5 ſols le *boiſſeau*, montent à 900 d.
12 *boiſ.* de *ſeigle* à 3 ſols 6 den. montent à . . . 504 d.

27, leur ſomme & leur valeur totale 1404 d.

Enſuite on dira, 27 *boiſſeaux* : 1404 d. : : un *boiſſeau* : 52 den. = 4 ſols 4 den. *Solution* requiſe.

*Queſt.* 2. Un Epicier a mêlé trente-ſix livres de *tabac*, qui vaut 1 ſols 6 den. la livre, avec douze livres d'un autre qui vaut 2 ſols la livre, & douze livres d'une troiſiéme eſpece, qui vaut 1 ſol 10 den. la livre; à quel prix peut-il vendre ce mêlange?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1°. | 36 liv. à | 1 sols | 6 d. | la livre, montent à | 648 den. | |
| | 12 à | 2 | 0 | | 288 | |
| | 12 à | 1 | 10 | | 264 | |

60 = *nombre* des *livres* : Leur *valeur* 1200.

Or 60 liv. : 1200 den. : : 1 liv. : 20 den. = 1 s. 8 den. *Réponse* requise.

*Quest.* 3. Un Cabaretier a mêlé trente-une mesures & demie d'un vin sec de *Malaga*, qui vaut 7 sols 6 den. la mesure, avec dix-huit mesures de vin de *Canaries* à 6 sols 9 den. ; treize mesures & demie de vin d'*Espagne* à 5 s. la mesure, & vingt-sept mesures de vin *blanc* à 4 s. 3 den. ; on demande combien vaut une mesure de ce mêlange ?

| | Mesures. | sols. | den. | | Deniers. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1°. | $31\frac{1}{2}$ à | 7. | 6 | la mesure, montent à | 2835 |
| | 18 à | 6. | 9 | | 1458 |
| | $13\frac{1}{2}$ à | 5. | 0 | | 810 |
| | 27 à | 4. | 3 | | 1377 |

90 = *nombre* des *mes.* Leur *valeur* = 6480

Ensuite 90 : 6480 : : 1 : 72 den. = 6 sols, *prix* requis d'une *mesure*.

La preuve de toutes les opérations, dans ces sortes de *mêlanges*, se fait en comparant la valeur de tous les mêlanges, vendus au prix moyen, avec la valeur totale de toutes les quantités particulieres, supposé qu'on les eût toutes vendues à leurs prix respectifs sans les mêler ; si ces sommes sont égales, l'opération a été bien faite.

---

## SECTION II.

### *DE L'ALLIAGE ALTERNATIF.*

L'*Alliage alternatif* est celui par lequel on trouve les quantités particulieres de chaque ingrédient qui composent un *mêlange*, lorsque les prix particuliers de chacun

de ces ingrédiens, & leur prix moyen sont donnés, c'est comme la converse de l'*alliage moyen*, ainsi qu'on le verra par les opérations suivantes, où il y a trois *cas*.

*Premier cas.* Les prix particuliers de chacun des ingrédiens que l'on veut mêler, & le prix moyen de tout le mêlange étant donnés, trouver combien il faut de chaque ingrédient pour composer le *mêlange*, lorsqu'on ne limite ni la quantité entiere, ni aucune de ses parties.

*Question* 1re. Combien faut-il de *froment* à 5 sols le *boisseau*, & de *seigle* à 3 sols 6 den. pour composer un *mêlange*, que l'on puisse vendre 4 sols 4 den. le boisseau ?

*Nota.* Dans toutes les questions de cette nature, il est à propos de placer le *prix moyen*, de maniere qu'on puisse aisément le comparer avec les *prix particuliers*, pour trouver d'un seul coup d'œil leurs différences au *prix moyen*, en cette maniere : *Prix moyen* = 52 den. $\begin{cases} \textit{Froment} & 60 \text{ d.} \\ \textit{Seigle} & 42 \text{ d.} \end{cases}$

Prenez ensuite toutes les différences entre le *prix moyen* & les *prix particuliers*, & marquez les alternativement, vous aurez les quantités requises, en cette maniere :

$$52 \begin{cases} 60 \\ 42 \end{cases} \quad \begin{cases} 10 = 52 - 42 \\ 8 = 60 - 52 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire}$$

52 — 42 = 10, quantité du *froment*,
& 60 — 52 = 8, quantité du *seigle* qui doit composer le *mêlange* requis.

On fait la preuve par l'*alliage moyen*.

Ajoutez
10 *boisseaux froment* à 60 *den.* = 600 *den.*
8 *boisseaux seigle* à 42 *den.* = 336 *den.*
18 = *nombre* des *boisseaux* = 936 *den.*

Ensuite 18 : 936 :: 1 : 52 den. = 4 s. 4 d. *prix moyen.*

*Nota.* Quoique 10 & 8 répondent à la question, comme il paroît clairement par la *preuve*, cependant ces deux *nombres* ne sont pas les seuls qui satisfont à cette question, & tous les autres de cette espece peuvent en

donner la *solution*, même en nombres entiers; car tous les nombres qui sont deux à deux en même proportion que 10 est à 8, résoudront de même cette question,

c'est-à-dire 10 : 8 : : $\left\{\begin{array}{c} 5 : 4 \\ 15 : 12 \\ 20 : 16 \\ 25 : 20 \end{array}\right\}$, &c. à l'infini.

*Quest.* 2. Un Epicier veut mêler trois sortes de *tabac*, l'une de 18 den. la livre, l'autre de 22 den. par livre, & la troisiéme sorte de 2 sols la livre; combien en doit-il prendre de chaque sorte pour pouvoir vendre tout le mêlange à 20 den. la livre ?

Ayant écrit les prix donnés comme ci-devant, vous chercherez les differences de chacun au *prix moyen* proposé, & vous les placerez alternativement, en cette maniere :

*Prix moyen* 20 $\left\{\begin{array}{c} 18 \\ 22 \\ 24 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{lll} 4 + 2 & = 24 - 20, \& \ 22 - 20 \\ 2 & = 20 - 18 \\ 2 & = 20 - 18. \end{array}\right.$

Ces différences, 6, 2, 2 sont les quantités requises.

| | | |
|---|---|---|
| *Preuve.* | 6 livres de *tabac* à 18 d. la livre, font | 108 den. |
| | 2 livres à 22 den. la livre, font . . . | 44 den. |
| | 2 livres à 24 den. la livre, font . . . | 48 den. |
| | 10 = *nombre* des *livres*. Leur valeur = | 200 den. |

Or 10 ) 200 ( 20, *prix moyen*. Et tous les trois *nombres* qui ont la même *raison* entr'eux que 6 & 2 peuvent résoudre la question, c'est-à-dire 6 : 2 : : $\left\{\begin{array}{c} 9 : 3 \\ 12 : 4 \\ 15 : 5 \end{array}\right\}$, &c.

Mais s'il n'y a qu'un seul des trois prix donnés qui soit plus grand que le prix moyen; par exemple, 14 den. la livre, 18 den. la livre, & 24 den. la livre, le *prix moyen* étant 20 den. comme auparavant, il faudroit placer leurs différences en cette maniere :

20 $\left\{\begin{array}{c} 14 \\ 18 \\ 24 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 6+2 \end{array}\right\}$, &c. comme auparavant.

*Quest.* 3. Un Cabaretier veut faire un mêlange de vin de *Malaga*, qui vaut 7 sols 6 den. la *mesure*, de vin de *Canaries* à 6 sols 9 den. la mesure, de vin d'*Espagne* à 5 sols, & de *vin blanc* à 4 sols 3 den.; combien en doit-il prendre de chaque espece afin que le mêlange puisse se vendre 6 sols la mesure ?

Dans toutes les *questions* de cette espece, où il est question de mêler quatre choses ensemble, dont deux ont leurs *prix* plus grands, & deux les ont plus petits que le *prix moyen*, il faut toujours allier ou comparer les plus grands & les moindres prix avec le prix moyen, & écrire leurs différences alternativement, comme dans le premier exemple de cette section, en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| *Prix moyen* = 72 *d.* | *Malaga* 90 den. | 21 = 72 — 51 |
| | *Blanc* 51 | 18 = 90 — 72 |
| | *d'Espagne* 60 | 9 = 81 — 72 |
| | *Canarie* 81 | 12 = 72 — 60 |

Ainsi 21 mesures de *Malaga*, 12 des *Canaries*, 9 d'*Espagne*, & 12 de *vin blanc*, formeront le mêlange requis;

| | | | |
|---|---|---|---|
| ou bien 72 | *Malaga* 90 *d.* | 12 *Malaga* | , &c. |
| | *Espagne* 60 *d.* | 18 *Espagne* | |
| | *Canaries* 81 *d.* | 21 *Canaries* | |
| | *Blanc* 51 *d.* | 9 *Blanc* | |

Chacun de ces mêlanges résout également la question, ce que l'on peut aisément prouver comme ci-devant.

*Second cas.* Les prix particuliers de tous les ingrédiens que l'on veut mêler, le prix moyen de tout le mêlange étant donnés avec la quantité de l'un des ingrédiens, il faut trouver la quantité des autres; c'est ce qu'on appelle *alliage partiel*.

*Quest.* 4. Combien peut-on mêler de *froment* à 5 sols le *boisseau*, avec douze boisseaux de *seigle* à 3 sols 6 den. le boisseau, pour pouvoir vendre tout le mêlange 4 s. 4 d. le boisseau ?

En ce cas il faut écrire tous les *prix particuliers* avec

le *prix moyen*, & trouver leurs différences, comme dans le premier cas, sans avoir égard à la quantité donnée, en cette maniere :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prix moyen* 52 *den.* | *Froment* | 60 *den.* | 10 |
| | *Seigle* | 42 *den.* | 8. |

Ensuite comme la quantité trouvée par les différences de même *nom* que la quantité donnée est à la quantité donnée, ainsi chacune des autres quantités trouvées par les différences est à la quantité de son nom : c'est-à-dire 8 : 12 :: 10 : 15, *quantité* ou *nombre* des *boisseaux* de *froment* requis.

*Quest.* 5. Combien faut-il mêler de *Malaga* à 7 sols 6 den. la *mesure*, de *vin d'Espagne* à 5 sols, de *vin blanc* à 4 sols 3 den., avec 18 mesures de *Canaries* à 6 sols 9 d. la *mesure*, pour vendre tout ce mêlange à 6 sols la *mesure*?

Les *termes* étant placés, &c. comme ci-devant, le seront en cette maniere :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prix moyen* 72 *den.* | *Malaga* | 90 *den.* | 21 |
| | *Blanc* | 51 *den.* | 18 |
| | *Espagne* | 60 *den.* | 9 |
| | *Canaries* | 81 *den.* | 12 |

Ensuite 12 : 18 :: { 21 : $31\frac{1}{2}$ *mesures* de *Malaga*. 18 : 27 *mes.* de *blanc*. 9 : $13\frac{1}{2}$ *mes.* d'*Espagne* ; }

c'est-à-dire que $31\frac{1}{2}$ *mesures* de *Malaga*, 27 de *vin blanc*, & $13\frac{1}{2}$ d'*Espagne*, mêlées avec 18 de *Canaries*, feront le mêlange requis, ou en cette maniere :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 72 | *Malaga* | 90 | 12 |
| | *Espagne* | 60 | 8 |
| | *Canaries* | 81 | 21 |
| | *Blanc* | 51 | 9 |

Or 21 : 18 :: { 12 : $10\frac{2}{7}$ de *Malaga* 18 : $15\frac{3}{7}$ d'*Espagne* 9 : $7\frac{5}{7}$ de *vin blanc* }, &c.

*Preuve.*
$$\left\{\begin{array}{llll} 10\frac{2}{7} & \text{à } 90 \textit{ den.} \text{ chacune} & = & 925\frac{5}{7} \textit{ den.} \\ 15\frac{3}{7} & \text{à } 60 \textit{ den.} \text{ chacune} & = & 925\frac{5}{7} \textit{ den.} \\ 7\frac{5}{7} & \text{à } 51 \textit{ den.} \text{ chacune} & = & 393\frac{3}{7} \textit{ den.} \\ 18 & \text{à } 81 \textit{ den.} \text{ chacune} & = & 1458 \textit{ den.} \end{array}\right.$$

*Somme* $51\frac{3}{7}$. *Valeur* = $3702\frac{6}{7}$ *den.*

Or $51\frac{3}{7}$) $3702\frac{6}{7}$ ( 72 *d.* = 6 *sols*, *prix moyen* : donc les quantités ont été bien trouvées.

*Troisiéme cas.* Les *prix particuliers* de tous les ingrédiens que l'on doit mêler étant donnés avec la somme de toutes leurs quantités & le *prix moyen* de cette somme, trouver les quantités particulieres du mêlange, c'est ce qu'on appelle *alliage total*, & s'exécute en cette maniere.

Ecrivez tous les *prix particuliers*, avec le *prix moyen*, & trouvez leurs différences comme ci-devant ; faites une somme de toutes ces différences, & dites :

Comme la somme de toutes les différences est à la somme de toutes les quantités données, ainsi chaque différence particuliere est à sa quantité particuliere.

*Quest.* 6. On veut mêler du *froment* à 5 *sols* le boisseau, avec du *seigle* à 3 *s.* 6 *den.*, ensorte que le tout soit de 27 boisseaux, & qu'on puisse le vendre 4 *s.* 4 *d.* le boisseau : quelle quantité faut-il prendre de chacun pour faire ce mêlange ?

*Prix moyen* 52 $\left\{\begin{array}{ll} \textit{Froment} & 60 \textit{ den.} \\ \textit{Seigle} & 42 \textit{ den.} \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} 10 \\ 8. \end{array}\right.$

18 leur *somme.*

Ensuite $18 : 27 :: \left\{\begin{array}{l} 10 : 15 \\ 8 : 12 \end{array}\right\}$ *quantités* requises.

*Quest.* 7. On veut mêler du *Malaga* à 7 *sols* 6 *den.* la *mesure*, avec du vin des *Canaries* à 6 *s.* 9 *d.*, d'*Espagne* à 5 *sols*, & du *blanc* à 4 *sols* 3 *den.*, ensorte que le tout soit de 90 *mesures* ; combien en faut-il de chaque espece pour ce mêlange ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prix moyen* = 72 *d.* | *Malaga* | 90 | 21 |
| | *Blanc* | 51 | 18 |
| | *Canaries* | 81 | 9 |
| | *Espagne* | 60 | 12 |
| | | | 60 = leur *somme.* |

Ensuite 60 : 90 ::
- 21 : 31 $\frac{1}{2}$ *mesures* de *Malaga.*
- 18 : 27 de *vin blanc*
- 9 : 12 $\frac{1}{2}$ de *vin d'Espagne*,
- 12 : 18 des *Canaries.*

Ou bien en cette maniere :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 72 | *Malaga* | 90 | 12 |
| | *Espagne* | 60 | 18 |
| | *Canaries* | 81 | 21 |
| | *Blanc* | 51 | 9 |
| | | | 60 leur *somme.* |

Ensuite 60 : 90 ::
- 12 : 18 *mesures de Malaga.*
- 18 : 27 *mes. de vin d'Espagne.*
- 21 : 31 $\frac{1}{2}$ des *Canaries.*
- 9 : 13 $\frac{1}{2}$ de *vin blanc.*

Chacune de ces deux méthodes répond également à la question, comme on peut aisément l'éprouver par l'*alliage moyen*, comme ci-devant, &c.

*Nota.* On peut abréger ces proportions (sur-tout lorsqu'il y a plusieurs ingrédiens) par la méthode proposée dans la régle de Compagnie.

Je me suis servi des mêmes exemples dans les deux régles d'alliage pour tous les cas, pour faire mieux sentir aux commençans, non seulement la différence entre les deux régles, mais encore celle des trois cas différens de la régle *alternative.*

J'aurois pû y ajouter plusieurs autres exemples que j'ai omis pour abréger ; ceux qui voudront les voir, peuvent consulter l'Arithmétique de *Jones More*, qui s'est fort étendu sur cette matiere.

Quoique cette régle d'alliage donne de vraies réponses aux

aux queſtions de cette eſpece, avec quelque petite variété, ſelon que les ingrédiens ſont en plus grand ou en plus petit nombre, comme on a vû dans les exemples précédens; cependant elle ne donne pas toutes les réponſes dont ces queſtions ſont ſuſceptibles, ni même ſouvent celles qui conviennent le mieux à l'occaſion préſente; & l'*Arithmétique* ordinaire ne peut pas corriger cette imperfection, il faut recourir à l'*Algebre*, qui découvre clairement & facilement toutes les réponſes poſſibles à une queſtion, comme on le fera voir plus au long dans la ſeconde partie.

# CHAPITRE X.

## *Des Métaux, & de leurs peſanteurs ſpécifiques.*

### SECTION PREMIERE.

#### *De l'Or & de l'Argent.*

L'OR *pur*, ſans aucun mêlange d'autres métaux, qu'on nomme ordinairement *or fin*, eſt d'une ſi grande pureté qu'il peut ſouffrir le feu ſans aucune diminution, quand même il reſteroit continuellement fondu; c'eſt pour cela que quelques *anciens Philoſophes* ont ſuppoſé que le Soleil étoit un *globe* d'*or* fondu.

L'*argent* n'ayant pas la pureté de l'*or*, ne peut pas ſouffrir le feu comme lui, cependant l'*argent fin* diminue fort peu lorſqu'il reſte dans le feu pendant un tems raiſonnable; au lieu que le *cuivre*, l'*étain*, le *plomb*, &c. non ſeulement diminuent, mais ſe calcinent ou ſe brûlent, & ſont réduits en poudre.

L'*or* & l'*argent*, dans leur pureté, ſont ſi flexibles ou doux (comme le plomb, &c.), qu'ils ne ſont pas auſſi

utiles dans les *monnoies* ou ailleurs ( excepté dans les *feuilles d'or* ou d'*argent* ) que lorſqu'ils ſont alliés ou mêlés & durcis par le cuivre. Quoique pluſieurs pays different plus ou moins dans la quantité de cet *alliage*, cependant en *Angleterre* on eſt convenu de la régle ſuivante.

*Titres des Monnoies d'or.*

Vingt-deux carats d'or fin & deux carats de cuivre mêlés enſemble, ſont regardés comme le vrai *titre* des *monnoies d'or*, &c. L'or de *France* & d'*Eſpagne* approche fort de ce titre; c'eſt-à-dire que ſi un poids ou quantité d'or fin eſt diviſé en vingt-quatre parties égales, & ſi vingt-deux de ces parties ſont mêlées avec deux ſemblables de cuivre, ce mêlange ſe nomme *titre de l'or*.

Il faut obſerver qu'un *carat* n'eſt pas un certain *poids* ou *quantité*, mais $\frac{1}{24}$ partie de chaque *quantité* ou *poids*. Les *Orfévres* & *Monnoyeurs* le diviſent en quatre parties égales, qu'ils appellent *grains* d'un carat, & les grains en *demi*, en *quarts*, &c.

*Titre de l'Argent.*

Onze onces & deux deniers d'*argent fin*, mêlés avec dix-huit deniers de cuivre ( l'once étant de vingt deniers en *Angleterre* ) forment le vrai *titre* de la *monnoie d'argent*, & on la nomme *argent de ſterling*; & ainſi à proportion d'une quantité plus grande ou plus petite, ce qui eſt une moindre proportion d'alliage pour l'argent que l'autre ne l'eſt pour l'or.

*Nota.* Lorſque l'argent ou l'or eſt plus fin que le *titre*, on le nomme *meilleur*, & cette bonté ſe connoît par les *carats* & *grains* de *carats* dans l'or, & par les *deniers* dans l'argent, en cette maniere. Les *Orfévres* ou *Raffineurs*, &c. prennent une petite quantité de l'or qu'ils veulent éprouver ( ce qu'ils appellent faire un *eſſai* ), & ils le peſent fort exactement, enſuite ils le mettent dans un creuſet, & le fondent par un feu violent, juſqu'à ce que tout le *cuivre* ou autre *alliage* qui peut s'y trouver,

ſoit entierement conſumé ou brûlé ; lorſqu'il eſt froid, ils le peſent encore fort exactement, & s'il n'a rien perdu de ſon premier poids, ils concluent que c'eſt de l'or fin ; mais s'il a perdu $\frac{1}{24}$, ils le nomment *or fin* de 23 carats, ou d'un carat meilleur que le titre ; s'il a perdu $\frac{2}{24}$, il eſt de 22 carats ou du titre ; ſi $\frac{3}{24}$ il eſt de 21 carats, ou plus foible que le titre d'un carat, & ainſi à proportion. On fait de la même maniere l'eſſai de l'*argent*, excepté qu'on le calcule par les *deniers*, &c.

On peut faire pluſieurs queſtions curieuſes ſur la fineſſe de l'or & de l'argent.

## EXEMPLE I.

Si un *lingot d'argent* peſant 787 onces 14 deniers 6 grains (le denier eſt de 24 grains) eſt fin de 11 onces 6 deniers, combien y a-t-il d'argent fin dans ce lingot, & à quoi monte-t-il à 5 ſchelings 1 $\frac{1}{2}$ den. l'once ?

Ce lingot eſt plus fin que le titre de 4 deniers ; car 11 onces 2 deniers = 222 deniers eſt le titre de l'argent, le fin étant de 12 onces, & celui-ci eſt 11 onces 6 deniers = 226.

1°. 787 onces 14 den. 6 grains = 378102 grains, & 12 onces = 240 deniers : donc comme 240 : 226 : : 378102 : 356046 = 741 onces 15 den. 6 $\frac{1}{20}$ grains, qui eſt tout l'*argent fin* de ce *lingot*, lequel à 5 ſols 1 $\frac{1}{2}$ denier l'once, monte à 190 liv. 1 ſol 6 den. & preſque $\frac{1}{2}$.

## EXEMPLE II.

Si un *lingot d'or* peſant 115 onces 13 deniers 18 grains eſt de $\frac{1}{4}$ de grain plus foible que le titre, combien contient-il d'or du titre, & à quel prix monte-t-il à 3 livres 11 ſols l'once ?

1°. 115 onces 13 den. 18 grains = 55530 gr. peſant.

2°. 24) 55530 (2313,75 = un carat de cette quantité.

3°. 4) 2313,75 (578,4375 = 1 grain de ce carat.

Par conſéquent 4) 578,4375 (144,609375 = $\frac{1}{4}$ d'un gr.

De plus 2313,75 × 22 = 50902,5 ſeroit l'or fin con-

tenu dans ce lingot s'il avoit été du titre; mais 50902,5 — 144,609375 = 50757,890625 est la quantité d'or fin, selon la question.

Donc 50902,5 : 50757,890625 :: 55530 : 55372,244, &c. grains = 115 onces 7 den. 4,244, &c. grains pesant; c'est la quantité d'or du titre contenu dans ce *lingot*.

Pour ce qui est de sa valeur à 3 liv. 11 s. l'once, 1 once = 480 grains, & 3 liv. 11 sols = 71 sols : donc 480 : 71 :: 55372,244, &c : 8190,4777, &c. = 409 liv. 10 sols $5\frac{3}{4}$ den. à fort peu près, valeur requise de ce *lingot*.

Cette derniere question peut se résoudre autrement, en cette maniere : 115 onces 13 deniers 18 grains = 115,6875, & $\frac{1}{4}$ d'un grain d'un carat est $\frac{1}{16}$ ( c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ ) : or $22 - \frac{1}{16} = 21\frac{15}{16}$ = 21,9375; donc 22 : 21,9375 :: 115,6875 : 115,358842, &c. = 115 onces 7 den. 4,244, &c. grains, comme auparavant.

Et pour la valeur, comme 1 : 3,55 :: 115,358842 : 409,523889 = 409 liv. 10 sols $5\frac{3}{4}$ den. à fort peu près, comme ci-devant.

---

## SECTION II.

### *De la gravité spécifique des métaux, &c.*

LA connoissance des différentes gravités ou pesanteurs des *métaux* & des autres corps, n'est pas de pure curiosité, mais d'un grand usage en plusieurs occasions, c'est pour cela que plusieurs Auteurs nous ont donné les *proportions* ou la différence de leurs *poids*, en les supposant tous de la même grandeur ou volume. Je vais en rapporter ici quelques-unes.

1°. Henri Van Etten, dans ses *Récréations Mathématiques*, imprimées en 1663, donne la proportion suivante de leurs poids. L'*or* 1875, le *plomb*, 1165, l'*argent* 1040, le *cuivre* 910, le *fer* 810, l'*étain fin* 750, l'*eau* 100.

2°. L'*Encyclopedie d'Alsted*, imprimée en 1649, donne ces proportions : l'*or* 1875, *mercure* 1500, *plomb* 1165, *argent* 1040, *cuivre* 910, *fer* 806, *étain* 750, *miel* 150, *eau* 100, *huile* 90. Il paroît qu'elles sont tirées de celles de *Van Etten*, avec quelques *additions* seulement.

3°. L'ingénieux M. *Oughtred* dans ses *Cercles de proportions* imprimés en 1660, donne les proportions de ces corps sur des *expériences* faites par *Marinus Ghetaldi* dans son Traité intitulé *Archimedes promotus*, en cette maniere : *Or* 3990, *mercure* 2850, *plomb* 2415, *argent* 2170, *cuivre* 1890, *fer* 1680, *étain* 1554.

4°. On trouve dans les Transactions philosophiques (*nomb.* 169 & 199.) un détail d'un grand nombre d'expériences de cette espece, d'où j'ai tiré les proportions suivantes : *Or* 18888, *mercure* 14019, *plomb* 11343, *argent* 11087, *cuivre* 8843, *airain battu* 8349, *airain fondu* 8100, *acier* 7852, *fer* 7643, *étain* 7321, *eau de puits* 1000.

Ces dernieres proportions étant approuvées & publiées par ordre de la *Société Royale*, paroissent être incontestablement vraies ; néanmoins comme elles different si fort des précédentes (& celles-ci les unes des autres), j'ai fait pour ma propre satisfaction plusieurs expériences de cette espece, & je me flate d'avoir trouvé les proportions des pesanteurs des corps les uns avec les autres, de même volume & grandeur, aussi exactement que la nature du sujet le peut porter, en les réduisant à un plus petit corps (soit en les séchant ou les battant, ou autrement), & ces proportions sont comme il suit.

Un pouce cubique de

| | Onces de Troy. | | Onces Averdupois. |
|---|---|---|---|
| *Or fin est de* . . . . . . . | 10,359273 | = | 11,365602 |
| *Or du titre de la monnoie* . | 9,962625 | = | 10,930422 |
| *Mercure* . . . . . . . . . . | 7,384411 | = | 8,101753 |
| *Plomb* . . . . . . . . . . | 5,984010 | = | 6,553885 |
| *Argent fin* . . . . . . . . | 5,850035 | = | 6,418324 |
| *Argent du titre des monnoies.* | 5,556769 | = | 6,096569 |
| *Cuivre rouge* . . . . . . . | 4,747121 | = | 5,208369 |
| *Cuivre en planche* . . . . . | 4,404273 | = | 4,832116 |
| *Cuivre fondu* . . . . . . . | 4,272409 | = | 4,630300 |
| *Acier* . . . . . . . . . . | 4,142127 | = | 4,544505 |
| *Fer commun* . . . . . . . | 4,031361 | = | 4,422979 |
| *Étain en bloc* . . . . . . | 3,861519 | = | 4,236638 |
| *Marbre fin* . . . . . . . . | 1,429411 | = | 1,568859 |
| *Verre ordinaire* . . . . . . | 1,360841 | = | 1,493037 |
| *Albâtre* . . . . . . . . . . | 0,988456 | = | 1,084477 |
| *Ivoire* . . . . . . . . . . | 0,962083 | = | 1,055542 |
| *Buis sec* . . . . . . . . . | 0,543282 | = | 0,596057 |
| *Eau de mer* . . . . . . . . | 0,542742 | = | 0,594894 |
| *Eau claire commune* . . . . | 0,527458 | = | 0,578697 |
| *Vin rouge* . . . . . . . . . | 0,523766 | = | 0,574646 |
| *Esprit de vin à l'épreuve* . . | 0,489268 | = | 0,536796 |
| *Chêne sec & bon* . . . . . . | 0,489008 | = | 0,536569 |
| *Huile de lin* . . . . . . . | 0,491591 | = | 0,539345 |
| *Huile d'olive* . . . . . . . | 0,481569 | = | 0,528350 |

Vous avez dans cette Table la *pesanteur spécifique*, ou le *poids* d'un *pouce cubique* de différentes sortes de corps, tant en *onces de Troy* qu'en *onces Averdupois*, & en *parties décimales* d'une *once*; ce qui m'a causé plus de peine & d'embarras pour le trouver exactement que je ne l'avois prévû.

La livre de Troy contient 12 onces, la livre Averdupois 16. L'once de Troy est à l'once Averdupois, comme 80 à 73.

Par ce moyen il sera aisé de déterminer le poids d'une

quantité proposée de même matiere & espece que celles qui sont dans la Table, sa solidité étant donnée en *pouces cubiques*; car il est clair que si les nombres des *pouces cubiques* contenus dans une quantité donnée, est multiplié par le poids d'un *pouce* (*de la même espece de matiere*) marqué dans la Table, le produit sera le poids, cette quantité en *onces*, &c.

*EXEMPLE.*

Il faut trouver le *poids* d'une piece de *marbre* de trois *pieds* & quarante *pouces cubiques*.

1°. $1728 \times 3 = 5184$ *pouces cubiques* dans trois *pieds*, & $5184 + 40 = 5224$, nombre des *pouces cubiques* contenus dans la piece de *marbre*.

2°. $5224 \times 1{,}429411 = 7410{,}066624$ *onces de Troy*, ou $5224 \times 1{,}568859 = 8195{,}719416$ *onces Averdupois*, pesanteur de la piece de *marbre* en *onces*, &c. laquelle se change facilement en *livres*, &c, & ainsi des autres.

La converse de cette opération n'est pas moins aisée, c'est-à-dire le poids d'une quantité proposée étant donné, trouver sa solidité en *pouces cubiques*, &c. en cette maniere.

Divisez le *poids* donné de la quantité proposée (*en le réduisant auparavant en onces*, &c.) par le *poids* marqué dans la Table pour un *pouce* (*de la même espece de matiere*), le quotient sera le nombre des *pouces cubiques* contenus dans cette quantité.

*Nota*. Si l'on veut connoître le *poids* qu'une quantité marquée dans la Table aura dans l'eau, il faut soustraire le poids d'une égale quantité d'eau (à celle du corps) du poids proposé (s'il est plus pesant que l'eau), & le restant sera le *poids* requis. Par exemple,

*Un pouce cubique de plomb* $= 5{,}984010$ } *onces de Troy*.
*Un pouce cubique d'eau* $= 0{,}542742$ }

Leur différence est $= 5{,}441268$ *poids* d'un *pouce cubique* de plomb dans l'eau, &c.

# CHAPITRE XI.

## *Evolution ou extraction des Racines de toutes les puissances, par une méthode générale.*

### SECTION PREMIERE.

L'*évolution* eſt comme la *diſſolution* ou *décompoſition* d'une *puiſſance* ou *nombre* propoſé, pour trouver les mêmes parties dont il eſt compoſé, ou dont on ſuppoſe qu'il eſt compoſé ; & pour en venir à bout, il eſt à propos d'examiner comment ſe forment ces *puiſſances*, &c.

Le *nombre quarré* eſt celui qui eſt compoſé de deux nombres égaux ; ainſi 4 eſt un *nombre quarré*, étant compoſé des deux nombres égaux 2 & 2 ; car $2 \times 2 = 4$. De même le *nombre quarré* 9 eſt compoſé des deux nombres égaux, 3 & 3 ; car $3 \times 3 = 9$, c'eſt-à-dire que ſi un *nombre* eſt multiplié par lui-même, ce produit ſe nommera *nombre quarré*.

Le *cube* eſt un nombre compoſé de trois nombres égaux ; ainſi 8 eſt un *cube*, étant compoſé des trois nombres égaux, 2, 2 & 2 ; car $2 \times 2 \times 2 = 8$, &c., c'eſt-à-dire que ſi un *nombre* eſt multiplié par lui-même, & ce *produit* par le même *nombre*, le ſecond produit ſera un *nombre cubique*.

Ces deux *nombres*, le *quarré* & le *cube*, tirent leurs noms des *étendues* ou *figures géométriques* & des trois *dimenſions*, c'eſt-à-dire que la *racine* eſt repréſentée par une *ligne* ou *côté* qui n'a qu'une *dimenſion*, c'eſt-à-dire la ſeule *longueur*.

Le *quarré* eſt un plan ou une figure de deux dimenſions égales, *longueur* & *largeur*. Le *cube* eſt un *ſolide* de trois dimenſions égales, *longueur*, *largeur*, & *épaiſſeur* ; mais

la nature ne va pas plus loin qu'à ces trois dimensions quant à l'*étendue locale*, c'est-à-dire que la nature de l'espace ne donne pas lieu à d'autres manieres de s'étendre qu'en *longueur*, *largeur* & *épaisseur*, & il n'est pas possible de former ou de composer une *figure* ou un *corps* au-delà du *solide*.

Par conséquent toutes les *puissances supérieures* au *cube*, ou à la 3e *puissance*, comme le *quarré-quarré* ou *quatriéme puissance*, le *sursolide* ou *cinquiéme puissance*, &c. s'entendront mieux par une suite de nombres en *proportion géométrique*.

Par exemple, supposons un rang de quantités *géométriquement proportionnelles*, dont la raison est la même que le *premier terme*, & donnons à ce rang une suite de *nombres* en *progression arithmétique* qui commencent par l'*unité* ou 1, & dont la différence commune soit aussi 1, en cette maniere :

$$\begin{cases} 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. \quad 6. \quad 7, \textit{ exposans.} \\ 2. \quad 4. \quad 8. \quad 16. \quad 32. \quad 64. \quad 128, \text{ \&c. en } \div\!\!\div \end{cases}$$

Ces *nombres* en $\div\!\!\div$ seront continués par la *multiplication* de la *racine* ou *premier terme*, & ceux en *progression arithmétique* en seront les *exposans*, & feront voir quel est le *degré* ou la *puissance* de chaque terme en *progression géométrique*. Par exemple, dans cette suite de $\div\!\!\div$ 2 est en même tems le *premier terme* ou la *racine* & la raison commune de la suite; $2 \times 2 = 4$, est le *second terme* ou le *quarré*; $2 \times 2 \times 2 = 8$, ou $4 \times 2 = 8$ est le *cube* ou *troisiéme terme*; $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, ou $8 \times 2 = 16$, le *quatriéme terme* ou le *quarré-quarré*, & ainsi des autres.

*Nota.* On appelle *involution*, cette multiplication continuelle d'un nombre par lui-même, & les *exposans* marquent les puissances, ou combien de fois ce nombre a été multiplié par lui-même.

C'est sur ces principes qu'on a formé la Table suivante des *puissances*, dont la *racine* n'est que d'une seule *figure*.

## TABLE DES NEUF PUISSANCES.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Racine, ou côté simple. | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Quarré, ou seconde puissance. | Exp. (2) | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| Cube, ou troisiéme puissance. | expos. (3) | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |
| Quarré quarré, ou 4e puissance. | expos. (4) | 1 | 16 | 81 | 256 | 625 | 1296 | 2401 | 4096 | 6561 |
| Sursolide, ou 5e puissance. | expos. (5) | 1 | 32 | 243 | 1024 | 3125 | 7776 | 16807 | 32768 | 59049 |
| Quarré-cube, ou cube-quarré, 6e puissance. | exposant (6) | 1 | 64 | 729 | 4096 | 15625 | 46656 | 117649 | 262144 | 531441 |
| Second sursolide ou septiéme puissance. | exposant. (7) | 1 | 128 | 2187 | 16384 | 78125 | 279936 | 823543 | 2097152 | 4782969 |
| Biquarré-quarré, ou huitiéme puissance. | exposant. (8) | 1 | 256 | 6561 | 65536 | 390625 | 1679616 | 5764801 | 16777216 | 43046721 |
| Cube-cube, ou neuviéme puissance, &c. | exposant. (9) | 1 | 512 | 19683 | 262144 | 1953125 | 10077696 | 40353607 | 134217728 | 387420489 |

On voit dans cette Table les neuf *puissances* de toutes les *figures simples*, & par leur moyen on peut prendre la *racine* la plus approchante de tout *quarré*, *cube*, *quarré-quarré*, &c. d'un nombre dont la *racine* ou *côté* n'est que d'une *figure simple*; mais si la *racine* est composée de deux, trois, ou plusieurs *figures*, il faut la trouver, une *figure* après l'autre, par différentes opérations.

L'*extraction* de toutes les *racines* au dessus du *quarré*, c'est-à-dire du *cube*, du *quarré-quarré*, du *sursolide*, &c.) étoit autrefois fort difficile & ennuyeuse; mais aujourd'hui on a trouvé le moyen de l'abréger, & de la rendre aisée, comme on verra dans la suite.

Lorsqu'on veut extraire la *racine* d'un nombre proposé, il faut commencer par le préparer, en ponctuant ses *figures* au dessus ou au dessous, selon que la *puissance* donnée dont on cherche la *racine*, l'exige, & cela se fait en considerant l'*exposant* de la *puissance* donnée, qui pour le *quarré* est 2, pour le *cube* 3, pour le *quarré-quarré* 4, &c. (comme dans la Table précédente). Ensuite on coupera autant de places de *figures* dans la *puissance* donnée (pour chaque *figure simple* de la *racine*) que l'*exposant* en marque, commençant toujours à marquer les points à la place des *unités*, & montant vers la main gauche si le *nombre* donné est un *entier*, & descendant vers la main droite dans les *parties décimales*, comme dans les exemples suivans.

Soit un *nombre donné*, comme 75640387246, que j'appellerai dans la suite le *nombre à résoudre*. S'il faut en extraire une des *racines* suivantes, on le pointera (selon les réflexions précédentes) en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| Pour | *la racine quarrée*, ainsi | 75640387246 |
| | *la racine cubique* . . . | 75640387246 |
| | *la racine quarré-quarrée* | 75640387246 |
| | *la racine sursolide* . . | 75640387246 |

Ou soit le *nombre décimal* 0,674035982, on le pointera

pour { *la racine quarrée*, ainsi 0,6740359820
*la racine cubique* . . . 0,674035982
*la racine quarré-quarrée* 0,674035982000 }

La raison pourquoi on pointe le nombre à résoudre de cette maniere, en donnant deux *figures* pour le *quarré*, trois pour le *cube*, quatre pour le *quarré-quarré*, &c. pour chaque *figure* de la *racine*, se conçoit aisément par la Table précédente des *puissances*, où l'on voit que toutes les *puissances* de la *figure* 9 (qui n'est qu'une simple *figure*) ont le même nombre de figures que l'*exposant* des *puissances* indique. Il faut donc prendre autant de places particulieres de *figures* pour chaque *figure simple* de la *racine*, par conséquent on voit par ces points combien il doit y avoir de figures dans la racine, c'est-à-dire qu'autant qu'il y a de points, autant doit-il y avoir de *figures* dans la *racine*, & l'on verra aisément par la situation de ces points, si ces *figures* doivent être des entiers, ou des parties décimales.

---

## SECTION II.

### *Extraire la Racine quarrée.*

Il faut premierement extraire cette *racine* selon la méthode ordinaire. Ayant pointé le nombre à résoudre donné de deux en deux figures, comme on l'a dit cidevant, on cherchera par la Table des puissances (ou autrement) le plus grand quarré contenu dans la premiere période vers la main gauche (écrivant sa racine comme le quotient d'une Division), & l'on ôtera ce quarré de ladite période du nombre à résoudre : joignez au reste la période suivante, ou les deux figures qui suivent, pour avoir un dividende : doublez la racine du premier quarré pour servir de diviseur, & voyez combien de fois il est contenu dans le dividende, mais ensorte que le quotient que vous trouverez étant joint au diviseur, & le diviseur ainsi augmenté étant multiplié par la

même figure du quotient, le produit soit le plus grand nombre qui puisse être soustrait de ce dividende; & la soustraction faite, vous joindrez au reste la période suivante des figures pour avoir un nouveau dividende: doublez de même tout le quotient trouvé pour avoir un diviseur, & voyez combien de fois il est contenu dans ce dividende, mais ensorte que la figure que vous trouverez pour quotient étant jointe au diviseur, & le diviseur ainsi accru étant multiplié par le quotient, comme auparavant, le produit soit le plus grand nombre qui puisse être soustrait de ce nouveau dividende, & ainsi de suite de période en période, c'est-à-dire d'un point à l'autre de la même maniere, jusqu'à la fin.

Un exemple ou deux bien observés, rendront cette opération de former de nouveaux diviseurs, &c. plus simple & plus aisée qu'on ne peut l'exprimer par de longs discours.

EXEMPLE I.

Il faut extraire la *racine quarrée* de 572199960721; ce nombre à résoudre étant préparé ou pointé, comme on l'a prescrit, sera placé de la maniere suivante.

| | | |
|---|---|---|
| | | 572199960721 ( 756439, *racine.* |
| | | 49 = plus grand *quarré* dans 57. |
| 1r. *diviseur* | 145) | 821 |
| | 5 | 725 = 145 × 5 |
| 2. *divis.* | 1506) | 9699 |
| | 6 | 9036 = 1506 × 6 |
| 3. *divis.* | 15124) | 66396 |
| | 4 | 60496 = 15124 × 4 |
| 4. *divis.* | 151283) | 590007 |
| | 3 | 453849 = 151283 × 3 |
| 5. *divis.* | 1512869) | 13615821 |
| | 9 | 13615821 = 1512869 × 9 |

*Preuve.* 756439 × 756439 = 572199960721, *nombre* à résoudre.

EXEMPLE II.

Quelle eſt la *racine quarrée* de 1850701,764025 ?

*Opération.* 1850701,764025 ( 1360,405

```
                1
              ---
      23 )     85
       3       69
     ---      ---
     266 )    1607
       6      1596
    ----      ----
   27204 )     1101,76
       4       1088 16
  ------      -------
 2720805 )      1360 4025
       5        1360 4025
 -------       ---------
                  (0)
```

Ainſi 1360,405 eſt la *racine* requiſe.

EXEMPLE III.

Quelle eſt la *racine quarrée* des parties décimales 0,06076225 ?

*Opération.* 0,06076225 ( 0,24

```
              ,04 =,2 x,2
              ----
     ,44       207
     , 4       176
    ----      ----
    ,486 )     3162
       6       2916
    ----      -----
   ,4925 )     24625
       5       24625
   -----      ------
                (0)
```

*Preuve.* 0,2465 × 0,2465 = 0,06076225, *nombre* à réſoudre.

Ce qu'on a fait ici dans les *nombres entiers*, *mixtes*, &

*décimaux*, peut se faire également dans les *fractions ordinaires*, si on les change en *fractions décimales*.

EXEMPLE IV.

Extraire la *racine quarrée* de $\frac{16}{25}$. 1°. $\frac{16}{25} = 0,64$ : or 0,64 ( ,8 , *racine* requise.

,64
(0).

Dans ces quatre exemples, le nombre à résoudre s'est trouvé être un *parfait quarré*, & ainsi sa *racine* a été extraite sans *reste*; mais il arrive souvent que le nombre à résoudre n'est pas un vrai nombre figuré selon la *puissance* proposée, c'est-à-dire que ce n'est pas un *parfait quarré*, *cube*, *quarré-quarré*, &c. & alors il reste quelque chose après qu'on a fait l'extraction par tous les points : ces sortes de nombres se nomment *nombres sourds*, & l'on ne peut pas trouver exactement leurs *racines*, qui deviennent une suite continuée à l'infini, si l'on joint toujours au *reste* autant de *zero* que la *puissance* proposée en exige, c'est-à-dire deux dans le *quarré*, trois dans le *cube*, quatre dans le *quarré-quarré*, &c. & si l'on continue les opérations comme auparavant.

EXEMPLE V.

On veut extraire la *racine quarrée* de 6968,

*Opération.* 6968 ( 83,4745, *&c.*

| | |
|---|---|
| | 64 |
| 163 ) | 568 |
| 3 | 489 |
| 1664 ) | 79,00 |
| 4 | 66 56 |
| 16687 ) | 12 4400 |
| 7 | 11 6809 |
| 166944 ) | 759100 |
| 4 | 667776 |
| 1669485 ) | 9132400 |
| 5 | 8347425 |
| 1669490 | 784975, *&c.* |

C'est ainsi que la *racine* d'un *nombre sourd* peut se continuer jusqu'au point d'exactitude que l'on souhaite, mais on ne peut jamais la trouver entierement.

Dans mon *Abrégé d'Algebre*, chap. 9. j'avois proposé une autre maniere d'extraire la *racine quarrée*, & j'en avois donné des exemples : la voici.

Ayant pointé le nombre à résoudre, & pris le plus grand quarré depuis le premier point, comme auparavant, vous diviserez le reste de tout le nombre à résoudre par 2 ( c'est-à-dire vous en prendrez la moitié ), & vous pointerez de nouveau cette moitié ( c'est ce que j'appelle *nouveau dividende*.).

Prenez ensuite pour *diviseur* la *racine du premier quarré*, en cherchant combien de fois elle se trouve dans le nouveau dividende, jusqu'à la *figure pointée* qui suit, en reservant cette figure pour la moitié du quarré de celle du *quotient*; ce qui étant trouvé, vous multiplierez le *diviseur* par le *quotient*, ajoutant à ce *produit* les dixiémes de la moitié du quarré, s'il y en a, comme dans la *division* simple. Joignez ensuite la figure du quotient au dernier diviseur pour en avoir un nouveau, avec lequel vous agirez de la même maniere jusqu'à la fin.

EXEMP. VI. Quelle est la *racine quarrée* de 2990667969?

*Opération.* 2990667969
—25 ( 5, *prémiere racine simple.*
2 ) 490667969, *reste* qu'il faut diviser par 2.

Ire *racine* 5 ) 245333984,5 ( 54687
+4 208 = 5×4 + ½ du *quarré* de 4, qui est $\frac{16}{2}$ = 8

*Diviseur* 54 3733
+6 ) 3258 = 54 × 6 + ½ du *quarré* de 6.

*Diviseur* 546 ) 47539
+8 ) 43712 = 546 × 8 + ½ du *quarré* de 8.

*Divis.* 5468 ) 382784,5
+7 382784,5 = 5468×7 + ½ du *qua.* de 7.
(0)

La *racine* requise est donc 54687.

Toute

Toute la difficulté de cette méthode consiste uniquement à bien placer le *demi-quarré* de la *figure* du *quotient*, lorsqu'il arrive que c'est un nombre impair ; en ce cas il faut prendre une *figure* de plus au *dividende*, & la tirer de la *période* suivante ; sous cette *figure* on placera le nombre impair 5, qui résulte toujours du *demi-quarré* d'un nombre impair : ainsi 7, dont le *quarré* est 49, & la moitié 24,5 : cette moitié doit être placée comme dans la derniere opération de cet exemple.

*Nota.* Lorsque le nombre des *figures* de la *racine* d'un *nombre sourd* est limité, il n'est pas nécessaire d'extraire toute la *racine* par les méthodes précédentes, mais seulement jusqu'à une figure de plus que la moitié du *nombre* déterminé de figures, car le reste se trouve aisément par la seule *division*.

### EXEMPLE VII.

On veut extraire la *racine quarrée* de 7 ( *nombre sourd* ) & avoir douze *figures*.

| | |
|---|---|
| | 7 ( 2,645751 |
| | 4 |
| *Reste* | 3 |
| 2 ) | 1,50 = *demi reste.* |
| + ,6 | 1,38 = $2 \times 6$ : + $\frac{1}{2}$ *quarré* de 0,6 = 0,18 |
| 2,6 ) | 1200 |
| + ,04 | 1048 |
| 2,64 ) | 152000 |
| + ,005 | 132125 |
| 2,645 ) | 1987500 |
| + ,0007 | 1851745 |
| 2,6457 ) | 13575500 |
| + ,00005 | 13228625 |
| 2,64575 ) | 34687500 |
| + ,000001 | 26457505 |
| 2,645751 | 8229995 |

Ayant ainsi trouvé sept des douzes *figures* requises dans la *racine*, on trouvera aisément le reste par la voie abrégée de la division des fractions décimales, en cette maniere :

```
2,645751 ) 8229995 | ( 2,64575131106
           7937253 |
           ------- |
            292742 |
            264575 |
            ------ |
             28167 |
             26457 |
             ----- |
              1710 |
              1697 |
              ---- |
                13 |
```

Ainsi vous aurez la *racine* requise de 7=2,6457131106.

Voilà donc deux manieres d'extraire la *racine quarrée*, chacun peut choisir dans la pratique celle qui lui paroîtra la meilleure.

---

## SECTION III.

### *Extraire la Racine cubique.*

La méthode que je vais donner a deux cas qu'il faut bien observer.

Ayant pointé le nombre à résoudre (comme on a dit ci-devant) en périodes de trois *figures*, on cherchera le *nombre cubique* dans la Table des puissances (ou autrement) qui approchera le plus de la premiere période du nombre à résoudre, soit qu'il soit plus grand ou plus petit que cette période.

*Premier cas.* Si ce *nombre cubique* est plus petit que la premiere période, on nommera sa racine moindre que la véritable, & on ôtera ce cube de la premiere période.

*Second cas.* Mais si ce *cube* est plus grand que la premiere

période du nombre à résoudre, on nommera sa racine plus grande que la véritable, & l'on ôtera de ce cube le nombre à résoudre, en joignant des *zero*, afin que la soustraction puisse se faire.

Joignez à la premiere *racine*, soit qu'elle soit moindre ou plus grande que la véritable, autant de *zero* qu'il reste de points au dessus des nombres entiers du nombre à résoudre, & multipliez-la par 3; le *produit* sera un *diviseur*, par lequel vous diviserez la différence entre le cube trouvé & le nombre à résoudre; le *quotient* sera le nombre à résoudre, réduit au quarré, & par conséquent il faudra le pointer comme tel, c'est-à-dire en périodes de deux en deux *figures*; ce qui étant fait, vous prendrez la premiere *racine* (sans les *zero* qu'on y a joints) pour *diviseur*, voyant combien de fois elle est contenue dans la premiere période du nouveau nombre à résoudre (comme auparavant dans l'extraction de la *racine quarrée*) avec cette attention que si cette *racine* (devenue *diviseur*) est plus petite que la vraie, comme dans le premier *cas*, vous lui joindrez la *figure* du *quotient*, & vous multiplierez la *racine* ainsi augmentée par la même *figure* du *quotient*, en plaçant les *unités* de leur *produit* sous la *figure pointée* de cette période, & faisant la soustraction comme dans la *division*, & ainsi de suite d'une période à l'autre, comme ci-devant.

Mais si ladite *racine* (devenue *diviseur*) est plus grande que la véritable, comme dans le second *cas*, il faut soustraire le *quotient* du *diviseur* joint à un *zero*, & multiplier la *racine* ainsi diminuée, par la *figure* du *quotient*, écrivant leur *produit* comme auparavant, &c.

Un exemple ou deux dans chaque cas rendront l'opération claire & aisée.

## EXEMPLE I.

Quelle est la *racine cubique* de 14636183, *nombre* à résoudre donné ?

Pointez ce nombre en cette maniere :

14636183 ( 5 { $1^{re}$ *racine*, moindre que la vraie.

125 = *cube* le plus approchant de 146.

500 × 3 = 1500 ) 21363183 ( 14242,12, { nouv. nombre à résoud.

*Premiere racine* 5 , 14242, 12 ( 527

\+ 2 ) 104

*Premier divis.* 52 ) 3842

\+ 7 3689

*Second divis.* 527 ( 153 ) *reste* qu'on doit rejetter.

Ici la *racine* 527 est la vraie *racine* dès la premiere opération, comme on peut aisément le voir en la cubant; car 527 × 527 × 527 = 146363183, nombre donné à résoudre ; mais si ce n'avoit pas été la vraie *racine*, il auroit fallu répéter tout ce qu'on a fait ici, excepté seulement qu'au lieu de la premiere racine simple (5) il auroit fallu prendre la racine augmentée ( 527 ), & c'est ce que j'appelle la *seconde opération*, qui auroit porté la derniere racine jusqu'à la neuviéme figure, parce que chaque opération triple le nombre des figures de la derniere racine, comme on le verra bientôt.

*Nota.* Il arrive souvent qu'on est obligé de prendre quatre ou cinq *figures* pour la *racine*, sur-tout lorsque la seconde *figure* se trouve être un *zero*, c'est-à-dire lorsque le premier *cube* approche fort de la premiere période du nombre à résoudre.

EXEMPLE II.

Quelle est la *racine cubique* de 67507824239 (4000. *raci.* moindre que la vraie.

*Premier cube le plus approchant* 64

3507824239(292318,68

*Racine* 4000 × 3 = 12000 )
+ 4   292318,68 ( 4071,8
+ 0

*Premier diviseur* 40 ) 2923
+ 7   2849

*Second diviseur* 407 )   7418
+ 1   4071

*Troisiéme diviseur* 4071 )   3347,68
+ ,8   3257,44, &c.

*Racine* = 4071,8

Dans cet exemple j'ai pris cinq *figures* pour la *racine*, parce que la seconde s'est trouvé être un *zero*, & dans ces cinq *figures* l'excès n'est pas une *unité* dans la derniere place; car si l'on faisoit une seconde opération, la *racine* se trouveroit être 4071,78, &c. comme il est aisé de l'éprouver.

EXEMPLE III.

Il faut extraire la *racine cubique* de ce nombre

976379602989073960279630298890

Le *cube* le plus approchant de 976 est 1000, dont la *racine* est 10, qui plus grande que la vraie.

Son *cube* est 1000000000000000000000000000000
*Nomb. à résoud.* 976379602989073960279630298890

*Reste* 23620397010926039720369701110

*Ire racine* 10000000000 × 3 = 30000000000, *Divis.*
Et 30000000000)2362039701092603972036970l110
(787346567030867990

*Ire racine* 10 ) 787346567030867990 = 0000000000
( 007929, *nouv. nomb. à résoudre.*

| | | |
|---|---|---|
| | —00 | |
| *Ier divis.* | 100 | 7873 |
| | — 7 | 6951 |
| *Sec. divi.* | 993 | 92246 |
| | — 9 | 89289 |
| *3e divis.* | 9921 | 295756 |
| | — 2 | 198416 |
| *4e div.* | 99208 | 9734070 |
| | — 9 | 8928639 |
| *5e div.* | 99071 | *&c.* |

*Premiere racine* = 10000000000
— 007929

9920710000

Dans cette premiere opération je ne prens que 99207, à quoi je joins cinq *zero* pour les points qui restent, & j'ai 9920700000, ce qui étant cubé pour la seconde opération donne 976398156022743000000000000000
— 976379602989073060279630298800 *à résoud.*

*Reste* 18553033669039720369701110

La derniere *racine* 9920700000 × 3 = 29762100000, *nouveau diviseur.*
Ensuite 29762100000)18553033669039720369701110 ( 623377841921091, *quotient* ou *nouv. nombre à résoudre.*

La derniere *racine* 99207 étant plus grande que la vraie, il faudra soustraire les nouveaux *quotiens* comme dans la derniere opération, en cette maniere :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 99207) | 623377841921091 | (62836,45 |
| | — 6 | 5952384 | |
| *Diviseur* | 992064) | 28139441 | |
| | — 2 | 19841276 | |
| *Diviseur* | 9920638 | 8298165 | 92 |
| | — 8 | 7936509 | 76 |
| (*) | 99206372 | 361656 | 1610 |
| | — 3 | 297619 | 1151 |
| | 992063717 | 64037 | 045991 |
| | — 6 | 59523 | 822984 |
| | 9920637164 | 4513 | 22300700 |
| | — ,4 | 3968 | 25486544 |
| | 99206371636 | 544 | 9688415600 |
| | — ,09 | 496 | 0318581775 |
| | 9920637163,55 | | *&c.* |

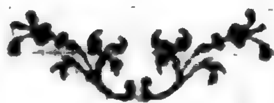
Nota. *Dans cette opération les figures qui sont de ce côté-ci, & les nouveaux diviseurs après cette marque* (*) *sont inutiles ; on auroit pû les négliger.*

*Derniere racine* 9920700000
— 62836,45, *&c.*

9920637163,55, *racine* requise.

Ainsi j'ai la *racine cubique* jusqu'à la douziéme *figure* ; sçavoir, 9920637163,55 en deux opérations, n'étant trop grande dans la derniere *figure* que d'une *unité*, comme on peut l'éprouver en la cubant, & comparant ce *cube* avec le *nombre à résoudre*.

On extrait de la même maniere les *racines cubiques* des *parties décimales* ou des *fractions ordinaires*, après qu'on les a changées en *décimales*.



## SECTION IV.

### *Extraire la Racine quarré - quarrée.*

Il y a quelques petites difficultés à extraire la *racine quarré-quarrée* ou de la quatriéme *puiſſance* ( & par conſéquent de toutes les *puiſſances paires.*) qu'il n'eſt pas aiſé d'exprimer auſſi briévement qu'on le fait par les *théorêmes algebriques* ( comme on le verra dans la ſuite ), c'eſt pourquoi j'ai préféré ici de réduire cette extraction à deux extractions différentes, d'autant plus que le lecteur doit être parfaitement au fait de l'extraction des racines quarrées qui ſuffit pour celle-ci, en cette maniere :

1°. Il faut extraire la *racine quarrée* du nombre propoſé à réſoudre.

2°. Il faut extraire celle de cette premiere *racine quarrée*, qui ſera la *racine quarré-quarrée* requiſe.

### EXEMPLE.

Quelle eſt la *racine quarré quarrée* de 4857532416 ?

Je commence par extraire ſa *racine quarrée* en cette maniere :

```
   4857532416
—  36 = plus grand quarré , dont la racine eſt 6.
   1257532416 , reſte qu'il faut diviſer par 2.

Premiere racine 6 )  628766208  ( 69696
            + 9      5805
            ———      ————
              69      4826
            + 6       4158
            ———       ————
             696      668620
            + 9       626805
            ————      ——————
            6969       418158
                       418158
                      ——————
                          0
```

Ensuite 69696, premiere *racine* dont il faut en-
— 4 core extraire la *racine quarrée*.

29692, *reste* à diviser par 2.

| | | |
|---|---|---|
| Ire *racine* 2) | 14848 | (264, *racine quarré-quarrée* req. |
| + 6 | 138 | |
| 26 | 1048 | |
| + 4 | 1048 | |
| 264 | 0 | |

Cela est si aisé, qu'il est inutile d'ajouter d'autres exemples.

---

## SECTION V.

### *Extraire la Racine sursolide.*

AYANT pointé le nombre à résoudre, selon l'indication de son exposant, c'est à dire en périodes de cinq *figures*, on cherchera dans la Table des puissances (ou autrement) un *nombre sursolide* qui approche le plus de la premiere période du nombre à résoudre, soit qu'il soit plus grand ou plus petit, & l'on appellera sa racine plus *grande* ou plus *petite* que la *vraie*, selon qu'il sera plus grand ou plus petit, en y joignant autant de *zero* qu'il reste de périodes en nombre entiers dans le nombre à résoudre, comme ci-devant, dans l'extraction de la *racine cubique*.

Ensuite on cherchera la différence entre le nombre à résoudre & le nombre sursolide qu'on a ainsi pris, en retranchant le moindre du plus grand (comme ci-devant dans le *cube*). Enfin on cherchera le cube de la susdite *racine sursolide* avec les *zero* qui lui sont joints (que l'on pourra trouver aussi par la Table des puissances); & multipliant ce *cube* par 5, *exposant* du *sursolide*, le produit sera un *diviseur*, par lequel on divisera la différence en-

tre le nombre à résoudre & le nombre sursolide, afin de le réduire au quarré (comme ci-devant dans le *cube*) ; ce quarré sera pointé en périodes de deux *figures*, & on l'appellera (comme ci-devant) *nouveau nombre à résoudre*. Prenez pour *diviseur* la premiere *racine* sans ses *zero*, & voyez combien de fois elle se trouve dans le nouveau nombre à résoudre, avec cette attention, que si la *racine* (devenue *diviseur*) est plus petite que la vraie, il faut y joindre le double du *quotient*, & si elle est plus grande, il faut soustraire ce double d'un *zero* joint ou supposé, joint à la *figure* du *diviseur* ou de la *racine*, en le multipliant ainsi augmenté ou diminué par le même *quotient*, & écrivant leur produit, &c. comme ci-devant.

Un exemple de chaque cas rendra le tout clair & aisé.

### EXEMPLE I.

On demande la *racine sursolide* de ce *nombre* 12309502009375.

12309502009375, nombre à résoudre pointé.

Le *nombre sursolide* le plus approchant de 1230, premiere période du nombre à résoudre, est 1024, dont la racine 4 est moindre que la vraie.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Donc} & 12309502009375 \\
- & 1024 \\
\hline
 & 2069502009375 \text{ leur différence.}
\end{array}
$$

Le *cube* de 400 est 64000000 par la Table, &c. & 64000000 × 5 = 320000000.

*Diviseur* 320000000 ) 2069502009375 ( 6467, &c.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Premiere racine* 4 ) | 6467 ( 15 | | |
| + 1 × 2 = 2 | 42 | *Ire racine* | 400 |
| | | + | 15 |
| *Diviseur* 42 | 2267 | | |
| + 5 × 2 = 10 | 2150 | *vraie rac.* | 415 *requise*. |

C'est-à-dire que 415 est la *racine surſolide* du nombre donné à réſoudre, comme on peut aiſément l'éprouver en l'élevant à la cinquiéme puiſſance ; car 415 × 415 × 415 × 415 × 415 = 12309502009375, *nombre donné.*

## EXEMPLE II.

Quelle est la *racine surſolide* de 2327834559873 ?

Le *nombre surſolide* le plus approchant de 232 est 243, dont la *racine* est plus grande que la vraie.

Donc 243000000000000
— 2327834559873
Reste 102165440127 pour *dividende.*

Le *cube* de 300 est 27000000, & 27000000 × 5 = 135000000, *diviſeur.*

Or 135000000 ) 102165440127 (756,7810, *nouveau nombre à réſoudre.*

| | | |
|---|---|---|
| *Premiere racine* 300 ) | 756,7810 | ( 2,558 |
| — 02 × 2 = 4 | 592 | |
| *Ier diviſeur* 296 ) | 164,78 | |
| —,5 × 2 = 1,0 | 147,50 | |
| *2e diviſeur* 295,0 | 17,2810 | |
| —,05 × 2 = ,10 | 14,7450 | |
| 294,90 | 2,53600, *&c.* | |

La *premiere racine* étoit 300 plus grande que la vraie.
Elle est donc — 02,558

*Nouvelle racine* 297,442, & fort approchante de la vraie *racine*, qui est 297,436, *&c.*

La raiſon pourquoi cette *racine* a tant de *figures* par la premiere opération, c'est que le premier *nombre surſolide* étoit fort approchant du nombre à réſoudre, &c. comme ci-devant.

## SECTION VI.

### *Extraire la racine du quarré-cube.*

CELA se fait aisément par deux *extractions*, comme le nom l'indique ; ainsi vous commencerez par extraire la *racine quarrée* du nombre donné à résoudre, & ensuite la *racine cubique* de cette *racine quarrée*, laquelle sera la racine requise, ou la racine de la sixiéme puissance ; ou bien il faut d'abord extraire la *racine cubique* du nombre à résoudre, & ensuite la *racine quarrée* de cette *racine cubique*, on aura la racine requise.

*EXEMPLE.* On veut extraire la *racine quarrée cube* de ce nombre 145220537353515625, nombre à résoudre. 1°. Tirez la *racine quarrée* de ce nombre, ce qui est, je pense, le moyen le plus court & le meilleur, en cette maniere :

```
    145220537353515625
  — 9
```

*Reste* 55220537353515625, dont il faut prendre la moitié.

```
Ensuite 3 )  27610268676757812,5 ( 381078125
     + 8     272
     38 )      4102
     + 10      3805
     3810 )     2976867
     + 7        2667245
     38107 )     3096226
     + 8         3048592
     381078 )     47634757
     + 1          38107805
     3810781 )     95269528
     + 2           76215622
     38107812 )    1905390612,5
     + 5           1905390612,5
     381078125         (0)
```

Ayant trouvé la *racine quarrée* du nombre à résoudre donné, je vais extraire la *racine cubique* de cette *racine quarrée*, c'est-à-dire de 381078125
— 343=cube approchant sa *rac.* 700.

700 × 3 = 2100 ) 38078125 ( 18161

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Premiere racine* 7 ) | 18161 ( 25 | | |
| + 2 | 144 | | |
| *Ier diviseur* 72 ) | 3761 | *Ire racine* | 700 |
| + 5 | 3625 | + | 25 |
| *Sec. diviseur* 725 | (136) | | 725 |

Ainsi je trouve que 725 est la *racine quarrée cubique* requise, comme on peut aisément le vérifier, en l'élevant à la sixiéme puissance, c'est-à-dire que 725 × 725 × 725 725 × 725 × 725 se trouvera = 145220537353515625, nombre à résoudre donné.

---

## SECTION VII.

### *Extraire la Racine de la septiéme puissance.*

AYANT pointé le nombre à résoudre donné selon que son exposant l'indique, ou en périodes de sept *figures*, on cherchera dans la Table des puissances le nombre de la septiéme puissance qui approche le plus de la premiere période du nombre à résoudre, soit qu'il soit plus grand ou plus petit, appellant sa racine respective plus grande ou plus petite que la vraie, joignant le nombre propre des *zero*, &c. comme dans le *cube* & *sursolide*.

Cherchez ensuite la différence entre le nombre à résoudre donné & ce nombre de la septiéme puissance (trouvé par la Table des puissances) en ôtant le plus petit du plus grand; après quoi vous chercherez le *sursolide* ou la cinquiéme *puissance* de cette *racine*, avec les *zero* qui

lui ſont joints ( ce que vous trouverez auſſi par la Table des puiſſances ), & multipliant ce *ſurſolide* par 7, expoſant du nombre à réſoudre donné, ce produit ſera un diviſeur, par lequel il faudra diviſer la différence précédente, pour l'abaiſſer au quarré, la pointer, &c. comme ci-devant dans le *cube*, &c. Enfin vous prendrez la premiere racine ſans ſes zero, pour diviſeur du nouveau nombre à réſoudre, comme auparavant, avec cette ſeule différence qu'il faut augmenter ou diminuer le diviſeur par le triple du quotient.

*EXEMPLE.*

Quelle eſt la *racine* du ſecond *ſurſolide* ou de la ſeptiéme *puiſſance* de

37323655395507812 5, *nombre à réſoudre pointé.*
— 2178, *nombre le plus approchant de la 7[e] puiſſance.*

155436553955078125 leur *difference.*

La premiere racine eſt 300, moindre que la vraie, & la cinquiéme puiſſance de 300 eſt 2430000000000, laquelle étant multipliée par 7 donne 17010000000000 pour *diviſeur*, par lequel on diviſera la différence trouvée, laquelle étant abrégée donne

. 1701 ) 15543655 ( 9137,95, &c.

*Premiere racine* 3 ) 9137 ( 25
$+ 2 \times 3 = 6$ 72

*I[r] diviſeur* 36 ) 1937
$+ 5 \times 3 = 15$ 1875

*2[e] diviſeur* 375 (62) *reſte* qu'il faut rejetter comme ci-devant.

*Premiere racine* = 300
+ 25

*Vraie racine* 325

J'ai donc trouvé par ce moyen que 325 est la vraie racine requise, c'est-à-dire la vraie racine de la septiéme puissance.

Je crois qu'il n'est pas nécessaire d'aller plus avant, c'est-à-dire de donner des exemples des puissances plus élevées; car si l'on a bien compris ce qu'on a fait jusqu'ici, on verra aisément comment il faut s'y prendre pour extraire la racine de chaque puissance, quelque élevée qu'elle soit (car la méthode est générale & la même pour toutes les puissances) ayant égard à leurs exposans & au premier côté ou racine, c'est-à-dire s'il est plus grand ou plus petit que le vrai, &c.

Les commençans me diront peut-être, comment peut-on suivre les régles & les exemples qu'on vient de donner, si on ne voit pas les raisons qui les appuient, & si l'on ne sçait pas pourquoi l'on doit négliger ce qui reste après qu'on a trouvé la vraie racine, lorsque le nombre à résoudre en a une vraie?

J'avoue que je n'ai pas encore donné les raisons de cette méthode, parce qu'il n'est pas aussi facile de les rendre sensibles & intelligibles par les démonstrations ordinaires que par le *calcul algebrique*, qui nous fait voir d'où sont dérivés les théorêmes & les régles que l'on donne ici. Je renvoie donc ces démonstrations à la seconde partie, où je parle de la maniere de résoudre les *équations composées* ou *affectées*, & dans laquelle on trouvera un détail court & général de cette méthode.

Cette méthode, & toutes les autres nouvelles méthodes des suites *convergentes* (comme on les appelle) sont fort différentes des anciennes & communes méthodes de l'extraction des *racines*, qui exigent que la premiere racine ou côté de la premiere période (dans un nombre à résoudre) soit exactement vraie, & ensuite par involution, ou par d'autres routes ennuyeuses, on forme un diviseur qui sert à trouver en tâtonnant une seconde figure dans la racine; & procédant ainsi d'un point à l'autre, on répéte toute l'opération pour chaque figure qui entre

dans la racine. De ſorte que ſi par hazard on commet quelque erreur dans une figure (comme il eſt très-poſſible) toute la ſuite des opérations eſt rompue, & il faut tout recommencer, ou du moins il faut reprendre le calcul depuis l'endroit où l'erreur a commencé de s'introduire.

Mais la nature de la méthode que j'ai expoſée eſt tout a-fait différente, on l'a tellement imaginée, qu'elle diminue continuellement & par degrés la différence entre la puiſſance propoſée & une puiſſance ſemblable d'un autre nombre qu'on a choiſi, c'eſt-à-dire qu'elle diminue cette différence juſqu'à ce qu'elle diſparoiſſe entierement, ou qu'elle devienne infiniment petite.

Par conſéquent lorſqu'on propoſe d'extraire la racine d'un nombre, il faut ici prendre la racine la plus approchante de la premiere période du nombre à réſoudre, afin que la différence entre ce nombre donné & la puiſſance homogene (ou ſemblable) de cette racine, ſoit plus petite par excès ou par défaut. Cette différence étant réduite ou abaiſſée à un degré plus bas, ſe trouve tellement préparée, que par une ſimple diviſion il en réſulte des figures au quotient, qui corrigent & augmentent la premiere racine juſqu'à trois figures au moins, quelquefois à quatre ou à cinq, ſelon que la premiere différence eſt plus ou moins grande (on en a vu ci-devant des exemples); cependant on doit ſouvent négliger le dernier *reſte*, qui eſt ou un excès ou un défaut dans la racine ainſi augmentée, c'eſt-à-dire dans ſa derniere figure.

Mais pour rectifier cet excès ou ce défaut dans la racine, & découvrir ſi le nombre à réſoudre eſt un vrai nombre figuré, ou s'il ne l'eſt pas, c'eſt-à-dire s'il a une vraie racine de cette eſpece, il faut néceſſairement en venir à une ſeconde opération, en prenant la racine ainſi augmentée, & faiſant les mêmes opérations avec elle & avec le nombre donné à réſoudre qu'on avoit fait dans la premiere opération (conformément au troiſiéme exemple de l'extraction de la racine cube); ſi le nombre

nombre à résoudre a une vraie racine, on le verra dans la seconde opération, & toutes les différences précédentes, &c. disparoîtront, pourvû que la racine requise ne doive pas avoir plus de trois ou quatre figures.

Que si la racine doit avoir plus de trois figures, ou si le nombre donné à résoudre est un nombre sourd, alors on trouvera une différence comme auparavant, laquelle donnera des figures au quotient pour rectifier & augmenter la racine déja trouvée, par trois fois autant de figures qu'elle en avoit au commencement de cette seconde opération, comme on peut le voir dans le troisiéme exemple de la racine cube, où l'on voit que cette racine croît de douze figures par les deux opérations; au lieu que si on l'avoit extraite par l'ancienne & commune méthode, il auroit fallu employer au moins quarante fois autant de figures que j'en ai employé.

De plus, si par hazard on se trompe dans quelque opération de notre méthode, cette erreur ne détruit pas l'opération précédente, mais elle se rectifie par l'opération suivante, quand on ne l'auroit pas trouvée plutôt; & l'on peut ainsi venir à une troisiéme opération, qui fournira vingt-sept figures dans la racine, &c. avec fort peu de peine, en comparaison des anciennes méthodes.

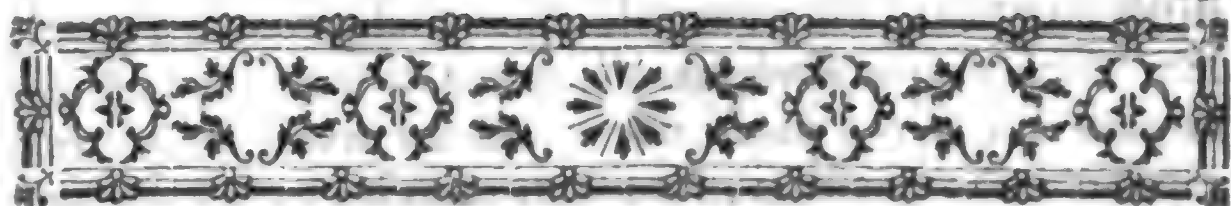
Ce court exposé que je viens de donner (en expliquant la nature de cette méthode d'extraire les racines) étant bien consideré, & comparé avec les diverses opérations des exemples précédens, doit aider les commençans à s'en former une idée si claire qu'ils pourront aisément comprendre comment il faut s'y prendre pour extraire la racine de toutes les puissances, quelque élevées qu'elles soient, sans le secours des théorêmes algebriques; ce n'est pas qu'ils n'en viennent plus aisément & plus promptement à bout lorsqu'ils auront bien compris ces théorêmes, comme on le verra dans la partie suivante.

J'avois intention de joindre ici toutes les opérations sur les *intérêts* & *annuités*; mais voyant qu'elles demanderoient un trop long discours pour faire voir les fonde-

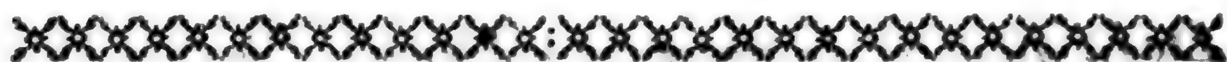
mens & les raisons des différens théorêmes destinés à cet usage, j'ai renvoyé ces opérations à la fin de la partie suivante. Il seroit beaucoup plus difficile de démontrer ces théorêmes à la façon ordinaire que par les expressions algebriques, qui non seulement rendront leur démonstration plus courte, mais encore plus simple & plus facile à concevoir.

J'ai aussi omis cette régle d'Arithmétique, qu'on nomme ordinairement *régle de position* ou *régle de faux*, parce que toutes les questions que l'on peut résoudre par cette *régle conjecturale*, le sont beaucoup mieux par les premiers principes de l'Algebre. Je finis donc ici cette partie de l'*Arithmétique numérique*, & je vais entrer dans l'*Arithmétique algebrique*, en prévenant le jeune lecteur qu'il ne doit pas se presser de passer d'une régle à l'autre, s'il veut les comprendre toutes aisément.

*Fin de la premiere Partie.*



# LE GUIDE DES JEUNES MATHEMATICIENS.



## SECONDE PARTIE.

## INTRODUCTION.

COMME j'ai écrit autrefois un petit Traité d'*Algebre*, on trouvera peut-être que j'aurois pû me passer d'écrire encore sur le même sujet, & que j'aurois dû (comme on le fait ordinairement) renvoyer mon lecteur à ce Traité. Néanmoins comme les parties 3e, 4e, & 5e de ce Livre sont traitées par voie d'Algebre, & qu'elles peuvent tomber entre les mains de quelque lecteur qui n'auroit pas vû ce Traité, ou aucun autre de cette espece, j'ai cru qu'il étoit à propos de donner au jeune Géometre les premiers élémens, ou les principales régles qui forment cette science, afin qu'il ne soit pas embarrassé lorsque je le conduirai plus loin, outre que ce que j'ai écrit autrefois sur ce sujet n'étoit qu'un abrégé de ce que je vais donner ici beaucoup plus au long.

Les principales régles de l'Algebre sont l'*Addition*, *Soustraction*, *Multiplication*, *Involution*, & *Evolution*, comme dans l'*Arithmétique* commune, mais on les fait

différemment ; c'eſt pour cela que quelques-uns l'appellent *Arithmétique algebrique* ; d'autres la nomment *Arithmétique en eſpeces*, parce que toutes les quantités qui ont rapport à une queſtion, ſubſiſtent dans les lettres qui leur ſont ſubſtituées (après l'*addition*, *ſouſtraction* ou *multiplication*, &c.) ſans être détruites ou changées en d'autres, comme le ſont les *figures* dans l'Arithmétique commune. M. Harriot l'appelle *logiſtique ſpécieuſe*, ou *calcul ſpécieux*.

# CHAPITRE PREMIER.

## *De la maniere de noter les quantités, & de tracer leurs pas, &c.*

## SECTION PREMIERE.

### DE LA NOTATION.

LA maniere de marquer les lettres à la place des quantités eſt différente, ſelon le goût de chacun ; je ſuivrai ici la méthode la plus commune, qui eſt de marquer la quantité que l'on cherche (comme une *ligne* ou un *nombre*, &c.) par la lettre $x$ ; & ſi l'on en cherche pluſieurs, je repréſenterai les autres par $y$, $z$, $u$, &c. ou par les dernieres lettres de l'*alphabet*.

Les quantités données ſeront repréſentées par les premieres lettres, $a$, $b$, $c$, $d$, &c., & pour éviter la confuſion, je marquerai les points ou extrémités des lignes dans toutes les *figures* par les lettres capitales $A$, $B$, $C$, $D$, &c.

Lorſqu'on prend une quantité (donnée ou cherchée) plus d'une fois, il faut la faire précéder d'un *nombre*, comme $3a$ pour ſignifier que l'on prend $a$ trois fois, ou trois fois $a$, & $7b$ pour marquer ſept fois $b$, &c.

Tous les nombres qui précédent ainsi une quantité se nomment *coefficients* ou *facteurs*, parce qu'ils multiplient la quantité ; & si une quantité est sans *coefficient*, on suppose toujours qu'elle est précédée de l'*unité* sous-entendue, comme $a$ est $1a$, ou $b$ est $1b$, &c.

Les principaux signes d'*Addition*, *Soustraction*, &c. sont les mêmes, & ont la même signification que ceux que nous avons donné au commencement de l'Arithmétique ; j'ai lieu de croire que le lecteur se les est rendus bien familiers. Il faut seulement ajouter les trois suivans.

| | | |
|---|---|---|
| ⊙ | Signe de | l'*Involution*. |
| ▱ | | L'*Évolution* ou *extraction des racines*. |
| $\surd$ | | L'*Irrationalité* ou *racine sourde*. |

Toutes les quantités exprimées par des nombres seuls ( comme dans l'Arithmétique ordinaire ) se nomment *nombres absolus*. Celles qui sont représentées par des lettres simples, comme $a$, $b$, $c$, $d$, &c. ou par plusieurs lettres jointes ensemble immédiatement, comme $ab$, $cd$, ou $7bd$, &c. se nomment *quantités simples* ou *incomplexes*. Mais lorsque différentes quantités sont représentées par des lettres différentes, jointes ensemble par les signes ( $+$ ou $-$ ) comme $a+b$, $a-b$, ou $ab-dc$, &c. on les nomme *complexes* ou *quantités composées*. Et lorsque les quantités sont exprimées à la façon des fractions ordinaires, comme $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a+b}{d}$, ou $\frac{ab+dc}{b-c}$, &c., on les nomme *fractionnelles* ou *quantités rompues*.

Le signe qui lie deux quantités appartient toujours à celle qui le suit immédiatement, & par conséquent toutes les quantités qui ont rapport à une question peuvent se ranger comme l'on veut, c'est-à-dire de la maniere que l'on jugera la plus convenable à l'opération que l'on veut faire. Ainsi $a+b-d$ peut s'écrire $b-d+a$ ou $a-d+b$, ou $-d+a+b$, &c. ces *quantités* étant toujours les mêmes, quoique différemment placées.

Dans la quantité qui n'est précédée d'aucun signe

(comme l'est ordinairement la premiere), on sous-entend toujours le signe $+$. Ainsi $a$ signifie $+a$, ou $b-d$ signifie $+b-d$, &c., car le signe $+$ est positif, & par conséquent la premiere ou principale quantité étant supposée positive, est supposée aussi avoir le signe $+$; mais le signe $-$ étant négatif, on ne peut pas le supposer, & il faut toujours l'exprimer.

---

## SECTION II.

### *Maniere de tracer les pas que l'on fait pour conduire les quantités à une équation.*

LA meilleure maniere est de désigner toutes les opérations que l'on fait par des *figures* & *signes* placés à la marge, selon que l'exigent les opérations différentes; ce qui est fort utile dans les opérations longues & ennuyeuses.

Par exemple, si l'on veut marquer la somme de deux quantités $a$ & $b$, l'opération s'arrangera en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $a$ |
| | 2 | $b$ |
| 1 + 2 | 3 | $a+b$ |

Ecrivez d'abord les *quantités* proposées, $a$ & $b$ à côté des *figures* 1, 2 de la petite colonne (qui seront nommées ici les *pas*), & écrivez à côté de 3 (*troisiéme pas*) leur somme $a+b$. Ecrivez ensuite à la marge à côté du troisiéme *pas* 1 + 2, pour marquer que les quantités qui sont à côté du premier & second *pas* doivent être ajoutées ensemble, & que celles du troisiéme *pas* en sont la *somme*.

Pour éclaircir ceci par les *nombres*; soit $a=9$, & $b=6$,

| | | |
|---|---|---|
| on aura | 1 | $a=9$ |
| | 2 | $b=6$ |
| 1 + 2 | 3 | $a+b=9+6=15$, *somme* de 9 & 6. |

De même s'il faut écrire la différence de ces deux mêmes quantités,

| | | |
|---|---|---|
| on aura | 1 | $a = 9$ |
| | 2 | $b = 6$ |
| 1 — 2 | 3 | $a - b = 9 - 6 = 3$, différence entre 9 & 6. |

Et s'il faut écrire leur produit,

| | | |
|---|---|---|
| on aura | 1 | $a = 9$ |
| | 2 | $b = 6$ |
| 1 × 2 | 3 | $a \times b = ab = 9 \times 6 = 54$, *prod.* de 9 par 6, &c. |

*Nota.* Les lettres écrites ou jointes immédiatement l'une à l'autre ( comme si c'étoit un mot ) signifient le *rectangle* ou le *produit* des quantités qu'elles représentent : ainsi dans le dernier exemple, $ab = 54$, est le produit de $a = 9$ par $b = 6$, &c.

*AXIOMES.*

1°. Si l'on ajoute des quantités égales à des quantités égales, les sommes de ces quantités seront égales.

2°. Si l'on retranche des quantités égales d'autres quantités égales, les restes seront égaux.

3°. Si l'on multiplie des quantités égales par des quantités égales, leurs produits seront égaux.

4°. Si l'on divise des quantités égales par des quantités égales, leurs quotients seront égaux.

5°. Les quantités qui sont égales à une même chose, sont égales entr'elles.

*Nota.* Les commençans doivent apprendre parfaitement par cœur ces cinq *axiomes*.

Tout cela étant supposé, & si l'on a une parfaite connoissance des *signes* & de ce qu'ils représentent, les jeunes *Algebristes* pourront en venir aux *régles* suivantes. Mais je dois leur répéter ici ce que j'ai dit au commencement, qu'ils doivent être bien exercés dans une *régle* avant que d'entreprendre la suivante, c'est-à-dire qu'ils doivent bien sçavoir l'*Addition* avant que de se mêler de la *Soustraction*, & qu'ils doivent être bien exercés dans la *Soustraction* avant que d'entreprendre la *Multiplication*, parce que ces *régles* dépendent les unes des autres.

# CHAPITRE II.

## *Des ſix principales Régles de l'Arithmétique algebrique ſur les quantités entieres.*

## SECTION PREMIERE.

### *De l'Addition des quantités entieres.*

L'*Addition* renferme trois cas.

*Premier cas.* Si les quantités ſont ſemblables, & ont des ſignes ſemblables, il faut ajouter enſemble leurs *coefficients* ou les nombres qui les précédent, & joindre à leur *ſomme* ces quantités avec le même *ſigne*.

| | | *Exem.* 1. | *Exem.* 2. | *Exemple* 3 | *Exemple* 4. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $a$ | $-a$ | $5b$ | $-7bc$ |
| | 2 | $a$ | $-a$ | $3b$ | $-8bc$ |
| 1+2 | 3 | $2a$ | $-2a$ | $8b$ | $-15bc$ |

| | | *Exemple* 5. | *Exemple* 6. | *Exemple* 7. |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $3a+5b$ | $3a-5b$ | $6ab+12$ |
| | 2 | $2a+7b$ | $2a-7b$ | $3ab+24$ |
| 1+2 | 3 | $5a+12b$ | $5a-12b$ | $9ab+36$ |

La raiſon de ces *Additions* eſt évidente par les *régles* de l'*Arithmétique* ordinaire ; car ſuppoſons que *a* repréſente un *écu*, ſi j'ajoute un autre *écu*, la *ſomme* ſera deux *écus* ou *2a* ; comme dans l'*exemple* 1.

Ou ſi nous ſuppoſons que — *a* repréſente le défaut ou la dette d'un écu, & qu'on y ajoute une autre dette ou défaut d'un écu, la ſomme ſera néceſſairement le défaut

ou la dette de deux écus, ou $-2a$, comme dans le second exemple, & ainsi de tous les autres.

*Second cas.* Si les quantités sont semblables & ont des signes différens, il faut soustraire leurs *coefficients*, & joindre les quantités à leur différence avec le signe de la plus grande.

| | | Exemple 8. | Exemple 9. | Exemp. 10. |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $+5a$ | $-5a$ | $7bc$ |
| | 2 | $-3a$ | $+3a$ | $-6bc$ |
| $1+2$ | 3 | $+2a$ | $-2a$ | $bc$ |

| | | Exemp. 11. | Exemple 12. | Exemple 13. |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-9abd$ | $7a-5b$ | $-8ab-7bc+15$ |
| | 2 | $+7abd$ | $-5a+7b$ | $+12ab+7bc-24$ |
| $1+2$ | 3 | $-2abd$ | $2a+2b$ | $4ab-9$ |

On comprendra aisément la raison des opérations que l'on fait dans ce cas, si l'on fait bien attention au fonds & aux dettes, ou si l'on balance bien les comptes entre le *débiteur* & le *créancier*, c'est-à-dire que les *quantités positives* représentent le *fonds* ou le *créancier*, & les *quantités négatives* les dettes; leur somme représente la *balance*, &c.

*Troisiéme cas.* Si les quantités sont différentes, il faut les écrire tout de suite sans changer leurs *signes*, & de là viennent les *quantités complexes* ou *composées*, que l'on ne peut ajouter ensemble que par leurs signes.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ainsi | 1 | $a$ | $a$ | $5b+7dc$ |
| | 2 | $b$ | $-b$ | $+4a-20$ |
| $1+2$ | 3 | $a+b$ | $a-b$ | $5b+7dc+4a-20.$ |

Voici quelques exemples où les trois *cas* sont mêlés ensemble indifféremment.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $aa+2ab+bb$ | $8ab+bc-37$ |
| | 2 | $-4ab$ | $-7ab-bc+42-6d$ |
| $1+2$ | 3 | $aa-2ab+bb$ | $ab+5-6d$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $aa-2ab+bb$ | $9bc+7ab-45$ |
| | 2 | $+4ab+bb$ | $4d-6bc-7ab+da$ |
| $1+2$ | 3 | $aa+2ab+2bb$ | $3bc+4d-45+da$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $5a$ | $a+b-ab$ |
| | 2 | $-7a$ | $7c-d$ |
| | 3 | $+3a$ | $4e+f$ |
| $1+2+3$ | 4 | $+a$ | $a+b-ab+7c+4e-d+f$ |

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $3aa+4abc-bb+30$ |
| | 2 | $2bb-3aa-2abc-25$ |
| | 3 | $dd+2aa-3abc-3$ |
| $1+2+3$ | 4 | $dd+2aa+bb-abc+2$ |

## SECTION II.

### *Soustraction des quantités entieres.*

CETTE Soustraction se fait par une seule régle générale.

REGLE.

*Changez tous les signes des quantités que vous voulez soustraire, ou supposez-les tous changés ; ensuite vous ajouterez toutes ces quantités ensemble, comme ci-devant dans l'Addition, & leur somme sera le vrai reste ou difference requise.*

Cette régle générale se tire de ces principes évidens.

Oter une quantité positive d'une quantité positive,

c'eſt la même choſe que d'ajouter le négatif au poſitif, c'eſt-à-dire $+2a$ ôté de $+3a$ eſt le même que $-2a$ ajouté à $+3a$.

Par conſéquent ôter une quantité négative d'une quantité poſitive, c'eſt le même que d'ajouter une quantité poſitive à une poſitive, c'eſt-à-dire que $-2a$ ôté de $+3a$ eſt le même que $+2a$ ajouté à $+3a$.

| | | *Ex.* 1. | *Ex.* 2. | *Ex.* 3 | *Exe.* 4. | *Exemp.* 5. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $2a$ | $-2a$ | $8b$ | $-15bc$ | $5a+12b$ |
| | 2 | $a$ | $-a$ | $3b$ | $-8bc$ | $2a+7b$ |
| 1—2 | 3 | $a$ | $-a$ | $5b$ | $-7bc$ | $3a+5b$ |

| | | *Exemp.* 6. | *Exemp.* 7. | *Exe.* 8. | *Exemp.* 9. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $5a-12b$ | $9ab+36$ | $+2a$ | $-2a$ |
| | 2 | $2a-7b$ | $3ab+24$ | $-3a$ | $+3a$ |
| 1—2 | 3 | $3a-5b$ | $6ab+12$ | $+5a$ | $-5a$ |

| | | *Ex.* 10. | *Ex.* 11. | *Exemp.* 12 | *Exemple* 13. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $bc$ | $-2abd$ | $2a+2b$ | $4ab-9$ |
| | 2 | $-6bc$ | $+7abd$ | $-5a+7b$ | $-8ab-7bc+15$ |
| 1—2 | 3 | $+7bc$ | $-9abd$ | $7a-5b$ | $12ab+7bc-24$ |

Si l'on compare ces treize exemples avec ceux de l'*addition*, l'opération ſera évidente, l'une étant la converſe ou la preuve de l'autre par la nature de l'*addition* & *ſouſtraction* dans l'Arithmétique ordinaire.

*Autres exemples de Souſtraction.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $a+b$ | $5bc+3da$ | $8a+5bd+25$ |
| | 2 | $a-b$ | $5bc-4da$ | $7a-3bd-12$ |
| 1—2 | 3 | $+2b$ | $+7da$ | $a+8bd+37$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $c+13$ | $a$ | $0$ |
| | 2 | $3a-b-2c$ | $b$ | $2a-4b$ |
| 1—2 | 3 | $3c+13-3a+b$ | $a-b$ | $-2a+4b$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $a+b-54$ | $76$ |
| | 2 | $d-3b-bc-75$ | $a-b-5d+7c$ |
| 1—2 | 3 | $a+4b+bc+21-d$ | $76-a+b+5d-7c$ |

La vérité de toutes les opérations de la *Souſtraction* ſe prouve lorſqu'il ſurvient quelque doute, en ajoutant au *reſte* la quantité qu'on a ſouſtrait, comme dans l'Arithmétique commune.

EXEMPLES.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| De | 1 | $+5a$ | $0$ | $-9bc$ | |
| ôtez | 2 | $-2a$ | $+3b$ | $-6da$ | $0$ |
| 1—2 | 3 | $+7a$ | $-3b$ | $+6da-9bc$ | *Reſte.* |
| 2+3 | 4 | $+5a$ | $0$ | $-9bc$ | *Preuve.* |

## SECTION III.

### *Multiplication des quantités entieres.*

La Multiplication a trois cas.

*Premier cas.* Lorſque les quantités ont les mêmes *ſignes* ſans aucun *coefficient*, il faut les joindre enſemble avec le ſigne +, & ce ſera leur *produit*, en cette maniere :

| | | *Ex. 1.* | *Ex. 2* | *Exem. 3.* | *Exemp. 4.* |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $a$ | $-a$ | $a+b$ | $-a-b$ |
| | 2 | $b$ | $-b$ | $d$ | $-d$ |
| 1 × 2 | 3 | $ab$ | $+ab$ | $ad+bd$ | $+ad+bd$ |

*Second cas.* S'il y a des coefficients, il faut les multiplier ensemble, & joindre à leur *produit* les quantités multipliées, comme auparavant.

| | | Ex. 5. | Exe. 6. | Exemp. 7. | Exemple 8. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $5a$ | $-6d$ | $3a+2b$ | $a+b$ |
| | 2 | $3b$ | $-7b$ | $6$ | $5b$ |
| $1\times2$ | 3 | $15ab$ | $+42db$ | $18a+12b$ | $5ab+5bb$ |

*Troisiéme cas.* Lorsque les quantités ont différens signes, il faut les joindre avec le produit de leurs coefficients comme auparavant, mais avec le signe —.

| | | Exe. 9. | Ex. 10. | Exemple 11. | Exemple 12. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $+a$ | $-6d$ | $4a-7b$ | $4a-7b$ |
| | 2 | $-b$ | $+7b$ | $3f$ | $-3f$ |
| $1\times2$ | 3 | $-ab$ | $-42db$ | $12af-21bf$ | $-12af+21bf$ |

C'est-à-dire que + par +, ou — par — produisent plus, & que + par — ou — par + produisent —. Que + par + produise +, cela est évident par l'Arithmétique ordinaire; car + 5 multiplié par + 7 produit + 35, &c. Mais que + par —, ou — par + produise le signe —, comme dans les quatre derniers exemples, & que — par — produise le signe +, comme dans les second, quatriéme & sixiéme exemples, la chose peut paroître un peu difficile à concevoir, & demande une démonstration.

Premierement pour prouver que $-7b$ par $+3f = -21bf$, comme dans l'exemple 11.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $4a-7b=0$, |
| on aura donc | 2 | $4a=7b$ par l'*axiome* 1. |
| Mais | 3 | $+3f=+3f$ |
| $2\times3$ | 4 | $12af=21bf$ par l'*axiome* 3. |
| $4-21bf$ | 5 | $12af-21bf=0$ par l'*axiome* 2. |

Par conséquent + par —, ou — par + produisent —, ce qu'il falloit prouver.

En second lieu, pour prouver que $-7b$ par $-3f$ produit $+21bf$, comme dans l'exemple 12.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $4a - 7b = 0$ : |
| donc | 2 | $4a = 7b$, comme ci-devant. |
| Mais | 3 | $-3f = -3f$. |
| $2 \times 3$ est | 4 | $-12af = -21bf$ par ce qui vient d'être pr. |
| $4 + 21bf$ | 5 | $-12af + 21bb = 0$, par l'*axiome* 1. |

Par conséquent — par — donne +, ce qu'il falloit prouver.

On peut prouver autrement tout cela par les *nombres*, en cette maniere :

Soit $\left\{ \begin{array}{l} a = 20 \\ b = 14 \end{array} \right\}$ & $\left\{ \begin{array}{l} c = 18 \\ d = 8 \end{array} \right.$ $\left\{ \text{ou autres } \textit{nombres} \text{ quelconques.} \right.$

Donc $a - b = 6$ $c - d = 4$ par l'*axiome* 2.

Par conséquent $\overline{a - b} \times \overline{c - d} = 6 \times 4 = 24$, par l'*axiome* 3 : mais $\overline{a - b} \times \overline{c - d}$, selon les *régles précédentes*, doit être $ac - cd + bd - da$ ; & si elles sont vraies, ce produit doit être égal à 24.

*Preuve.* $\left\{ \begin{array}{l} ac = 20 \times 12 = 240 \\ bd = 14 \times 8 = 112 \end{array} \right.$ | $\begin{array}{l} cb = 12 \times 14 = 168 \\ da = 8 \times 20 = 160. \end{array}$

Donc $ac + bd = 352$ par l'axiome 1.

& $cb + da = 328$ ; ce qui étant soustrait,

donne $ac + bd - cb - da = 352 - 328 = 24$, par où l'on voit clairement que + par — produit —, & que — par — produit +.

*Nota*. Si le *multiplicateur* est composé de plusieurs termes, chacun de ces termes doit être multiplié par tous les termes du *multiplicande*, & la somme de tous ces produits particuliers sera le produit requis, comme dans l'Arithmétique commune.

EXEMPLES.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $a+b-d$ | $7b+5d$ |
| | 2 | $a-b$ | $3a-5f$ |
| $1\times a$ | 3 | $aa+ba-da$ | $21ab+15ad$ |
| $1\times b$ | 4 | $-ba-bb+db$ | $-35bf-25df$ |
| $3+4$ | 5 | $aa-da-bb+db$ | $21ab+15ad-35bf-25df$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $aa-ba$ | $2c-3d$ |
| | 2 | $a+b$ | $3a-4b$ |
| $1\times 2$ | 3 | $aaa-abb$ | $6ca-9ad-8bc+12db$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $aa+2a+4$ | $aa-ab+bb$ |
| | 2 | $a-2$ | $a+b$ |
| | | $aaa+2aa+4a$ | $aaa-baa+bba$ |
| | | $-2aa-4a-8$ | $+baa-bba+bbb$ |
| $1\times 2$ | 3 | $aaa-8$ | $aaa+bbb$ |

## SECTION IV.

### *Division des Quantités entieres.*

La Division eſt la converſe, ou directement contraire à la Multiplication, & par conſéquent on la fait par des opérations converſes (comme dans l'Arithmétique commune). Elle a quatre cas.

*Premier cas.* Lorſque les quantités du *dividende* ont les mêmes *ſignes* que celles du *diviſeur* ſans aucun *coefficient*, il faut effacer toutes les quantités dans le *dividende*, qui ſeront les mêmes que celles du *diviſeur*, & écrire pour le *quotient* requis les autres quantités avec le ſigne $+$, en cette maniere :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $ab$ | $-ab$ | $ad+bd$ | $-ad-bd$ |
| | 2 | $b$ | $-b$ | $d$ | $-d$ |
| $1\div 2$ | 3 | $a$ | $+a$ | $a+b$ | $a+b$ |

*Second cas.* Lorſque les ſignes ſont différens, il faut opérer comme dans le premier cas, mais avec le ſigne —, en cette maniere :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $+ab$ | $-ab-bd$ | $abc+bcd+bcf$ |
| | 2 | $-b$ | $+b$ | $-bc$ |
| $1\div 2$ | 3 | $-a$ | $-a-d$ | $-a-d-f$ |

*Troiſiéme cas.* Si les quantités du *dividende* & du *diviſeur* ont des coefficients, il faut diviſer les nombres (comme dans l'Arithmétique ordinaire), & joindre à leurs quotients les quantités du quotient, en cette maniere :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $15ab$ | $42db$ | $12af-21bf$ |
| | 2 | $3b$ | $-7b$ | $3f$ |
| $1\div 2$ | 3 | $5a$ | $-6d$ | $4a-7b$ |

*Nota.* Lorſque les quantités & les coefficients dans le diviſeur & le dividende ſont les mêmes, le quotient eſt l'*unité*.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ainſi | 1 | $ab$ | $9bc$ | $7ab+5bc$ | $8ab+4d$ |
| | 2 | $ab$ | $-9bc$ | $7ab+5bc$ | $-8ab-4d$ |
| $1\div 2$ | 3 | $1$ | $-1$ | $1$ | $-1$ |

*Quatriéme cas.* Lorſque les quantités dans le diviſeur ne peuvent pas ſe trouver exactement dans le dividende, on les écrit en *fraction*, comme dans l'Arithmétique.

Ainſi

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ainsi | 1 | $a$ | $6bc$ | $5b+4a$ | $8adc$ |
| | 2 | $b$ | $3d$ | $5d+7d$ | $4abc$ |
| $1 \div 2$ | 3 | $\frac{a}{b}$ | $\frac{2bc}{d}$ | $\frac{5b+aa}{5d+7d}$ | $\frac{2d}{b}$ |

*Nota.* Il faut bien prendre garde dans la Division, que les mêmes signes donnent +, & que les signes différens donnent — dans le quotient; ce qui n'a pas besoin d'autre preuve que ce qui a été dit dans la derniere section, en le bien comparant avec ce que nous avons dit de la Multiplication & de la Division dans l'Arithmétique ordinaire.

*Exemple d'une Division étendue.*

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $21ba+15da-35bf-25df$ $(+3a$ |
| | 2 | $7b+5d$ |
| $2 \times 3a$ | 3 | $21ba+15da$ |
| $1-3$ | 4 | $0 \quad 0-35bf-25df$ $(-5f$ |
| $2 \times -5f$ | 5 | $-35bf-25df$ |
| $4-5$ | 6 | $0 \quad 0$ |
| $1 \div 2$ | 7 | $3a-5f$, *quotient tiré des pas* 3 & 5. |

Ou la Division des quantités peut se faire comme celle des *nombres* dans l'Arithmétique, en cette maniere :

$$3a-6)\ 6aaaa-96\ (2aaa+4aa+8a+16$$
$$6aaaa-12aaa$$
$$0\ +12aaa-96$$
$$+12aaa-24aa$$
$$0\ +24aa-96$$
$$+24aa-48a$$
$$0\ +48a-96$$
$$+48a-96$$
$$0\quad 0$$

C'est-à-dire que $6aaaa - 96 \div 3a - 6$ donne $2aaa + 4aa + 8a + 16$ pour *quotient*, comme on peut l'éprouver par la Multiplication ; car $2aaa+4aa+8a+16 \times 4a-6$ produit $6aaaa - 16$, & ainsi des autres exemples.

---

## SECTION V.

### *Involution des quantités entieres.*

L'*Involution* est l'élevation ou production des puissances d'une racine proposée, & se forme à tous égards comme la Multiplication, excepté seulement que les *facteurs* de la Multiplication sont différens, & que ceux de l'*involution* sont les mêmes.

*EXEMPLES.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $a$ | $-a$ | *Racine, ou premiere puissance.* |
| 1⊙2 | 2 | $aa$ | $+aa$ | *Quarré, ou seconde puissance.* |
| 1⊙3 | 3 | $aaa$ | $-aaa$ | *Cube, ou troisiéme puissance.* |
| 1⊙4 | 4 | $aaaa$ | $+aaaa$ | *Quarré-quarré, ou 4e puiss.* |
| 1⊙5 | 5 | $aaaaa$ | $-aaaaa$ | *Surfolide, ou 5e puissance, &c.* |

*Nota.* Les figures placées en marge, après le signe (⊙) d'involution, font voir à quel degré la racine est élevée, & se nomment *exposans* de la puissance : on les place ordinairement au dessus des quantités élevées pour abréger, sur-tout lorsque les puissances sont un peu hautes.

Ainsi $\left\{\begin{array}{l} a = a \\ a^2 = aa \\ a^3 = aaa \\ a^4 = aaaa \end{array}\right\}$ & $\left\{\begin{array}{l} a^5 = aaaaa \\ a^6 = aaaaaa \\ a^5b^5 = aaaaabbbbb \\ a^3b^3d^3 = aaabbbddd \end{array}\right.$

Si les quantités ont des *coefficiens*, il faut les élever aux mêmes puiſſances.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ainſi | 1 | $2a$ | $-3a$ | $5bc$ |
| $1 \odot 2$ | 2 | $4aa$ | $+9aa$ | $25bbcc$ |
| $1 \odot 3$ | 3 | $8aaa$ | $-27aaa$ | $125bbbccc$ |
| $1 \odot 4$ | 4 | $16aaaa$ | $+81aaaa$ | $625b^4c^4$ |
| $1 \odot 5$ | 5 | $32aaaaa$ | $-243a^5$ | $3125b^5c^5$, &c. |

L'involution des quantités compoſées ſe fait de la même maniere, en bien obſervant leurs *ſignes* & *coefficients*, ſi elles en ont.

Par exemple, on élevera $a+b$ à la cinquiéme puiſſance, en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $a+b$, qui ſe nomme *racine binome.* |
| | | $a+b$ |
| $1 \times a$ | 2 | $aa+ab$ |
| $1 \times b$ | 3 | $+ab+bb$ |
| $1 \odot 2$ | 4 | $aa+2ab+bb$, *quarré* de $a+b$. |
| | | $a+b$ |
| $4 \times a$ | 5 | $aaa+2aab+abb$ |
| $4 \times b$ | 6 | $+aab+2abb+bbb$ |
| $1 \odot 3$ | 7 | $aaa+3aab+abb+bbb$, *cube* de $a+b$. |
| | | $a+b$ |
| $7 \times a$ | 8 | $a^4+3a^3b+3a^2bb+abbb$ |
| $7 \times b$ | 9 | $+a^3b+3a^2bb+3abbb+b^4$ |
| $1 \odot 4$ | 10 | $a^4+4a^3b+6a^2bb+4abbb+b^4$ |
| | | $a+b$ |
| $10 \times a$ | 11 | $a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4$ |
| $10 \times b$ | 12 | $+a^4b+4a^3bb+6aab^3+4ab^4+b^5$ |
| $1 \odot 5$ | 13 | $a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5$ |
| | | &c. |

On élevera de même la racine $a-b$ à la cinquiéme puiſſance, en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $a - b$ |
| | | $a - b$ |
| $1 \times a$ | 2 | $aa - ab$ |
| $1 \times -b$ | 3 | $- ab + bb$ |
| $1 \odot 2$ | 4 | $aa - 2ab + bb$, *quarré* de $a - b$ |
| | | $a - b$ |
| $4 \times a$ | 5 | $aaa - 2aab + abb$ |
| $4 \times -b$ | 6 | $- aab + 2abb - bbb$ |
| $1 \odot 3$ | 7 | $aaa - 3aab + 3abb - bbb$, *cube* de $a - b$ |
| | | $a - b$ |
| $7 \times a$ | 8 | $aaaa - 3aaab + 3aabb - abbb$ |
| $7 \times -b$ | 9 | $- aaab + 3aabb - 3abbb + bbbb$ |
| $1 \odot 4$ | 10 | $aaaa - 4aaab + 6aabb - 4abbb + bbbb$ |
| | | $a - b$ |
| $10 \times a$ | 11 | $a^5 - 4a^4b + 6a^3bb - 4aab^3 + ab^4$ |
| $10 \times -b$ | 12 | $- a^4b + 4a^3bb - 6aab^3 + 4ab^4 - b^5$ |
| $1 \odot 5$ | 13 | $a - 5a^4b + 10a^3bb - 10aab^3 + 5ab^4 - b^5$ |
| | | &c. |

En comparant ces deux exemples, on peut faire les remarques suivantes.

1°. Les *puiſſances* de la différence de deux *quantités* ( comme $a - b$ ) ſont les mêmes que celles de la *racine binome* ( ou de la ſomme de deux *quantités* ), excepté pour leurs *ſignes* ; car les *puiſſances binomes* ont à chaque terme le ſigne $+$, & les autres ont alternativement d'un terme à l'autre les ſignes $+$ & $-$.

2°. Les *expoſans* des puiſſances de la principale quantité ( $a$ ) décroiſſent continuellement en *progreſſion arithmétique* ; ſçavoir, dans le quarré $aa$, $a$, dans le cube $aaa$, $aa$, $a$, dans le quarré-quarré $aaaa$, $aaa$, $aa$, $a$.

3°. Les expoſans de l'autre quantité ( $b$ ) croiſſent continuellement en progreſſion arithmétique ; ſçavoir, dans

le quarré *b*, *bb*, dans le cube *b*, *bb*, *bbb*, dans le quarré-quarré *b*, *bb*, *bbb*, *bbbb*, &c.

4°. Le premier & le dernier termes ſont toujours de pures puiſſances des deux quantités, & tous deux du même degré.

5°. La ſomme des expoſans de deux lettres jointes enſemble dans les termes moyens, eſt toujours égale à l'expoſant de la plus haute puiſſance, qui eſt celle du premier ou du dernier terme.

Si l'on fait bien attention à ces remarques, on comprendra aiſément comment ſont rangés les termes de la puiſſance quelconque propoſée d'un binome, ſans leurs figures numériques.

Par exemple, s'il faut élever le binome $a+b$ à la ſeptiéme puiſſance, les termes de cette puiſſance, ſans leurs figures numériques, ſeront ainſi rangés.

$$a^7+a^6b+a^5b^2+a^4b^3+a^3b^4+a^2b^5+ab^6+b^7.$$

Et comme les coefficiens ou figures numériques (non ſeulement de chaque lettre ſeule) mais encore de chaque puiſſance ſimple, quelque élevée qu'elle ſoit, eſt toujours l'*unité* ou 1 (qui ne change rien par la Multiplication, ni par la Diviſion, & que toutes les puiſſances d'un binome ſe forment naturellement, en multipliant la racine primitive par la puiſſance précédente, ou en joignant ſeulement chaque lettre de la racine à la puiſſance précédente, avec ſes coefficiens numériques, & enſuite éloignant cette puiſſance (lorſqu'elle eſt ainſi jointe à la ſeconde lettre) d'une place en avant (ſoit à main droite ou à main gauche), il ſuit néceſſairement,

Que les coefficiens des ſeconds termes (dans chacune de ces puiſſances) ſeront toujours la ſomme d'autant d'unités ajoutées enſemble, avec une de plus, qu'il y aura eu de multiplications de la premiere racine, & ils ſeront toujours déterminés par l'expoſant du premier terme de la puiſſance.

Et comme les coefficiens de tous les termes moyens

ſont ſeulement avancés d'un pas avec leurs lettres, il ſuit auſſi que ſi on les ajoute enſemble, leurs ſommes reſpectives produiront les vrais coefficiens des termes moyens dans la nouvelle puiſſance ; c'eſt ce que l'on verra clairement dans les nombres ſuivans, avancés de cette maniere ſans leurs lettres, & par là on démontrera une méthode aiſée pour trouver les coefficiens des puiſſances ordinaires ( c'eſt-à-dire de celles qui ne ſont pas trop élevées ) pour toutes les racines binomes.

Ajoutez { 1. 1. Les deux *coeffic. numer.* de la 1re *racine.*
  1. 1
___
Ajoutez { 1. 2. 1. *Coefficiens du quarré.*
  1. 2. 1
___
Ajoutez { 1. 3. 3. 1. *Coefficiens du cube.*
  1. 3. 3. 1.
___
Ajoutez { 1. 4. 6. 4. 1. *Coefficiens de la 4e puiſſance.*
  1. 4. 6. 4. 1
___
Ajoutez { 1. 5. 10. 10. 5. 1. *Coeffici. de la 5e puiſſ.*
  1. 5. 10. 10. 5. 1
___
Ajoutez { 1. 6. 15. 20. 15. 6. 1. *Coef. de la 6e puiſ.*
  1. 6. 15. 20. 15. 6. 1
___
1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1. *Coef. de la 7e p.*

Et ainſi de ſuite de la même maniere à l'infini.

Si maintenant on place ces nombres devant les lettres ci-devant trouvées, on aura tous les termes complets avec leurs coefficiens reſpectifs, en cette maniere :

$$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Mais pour rendre cette méthode de trouver les *coefficiens* encore plus aiſée pour la pratique, il eſt bon d'examiner quelle ſuite ou progreſſion les coefficiens de chaque terme forment entr'eux par les *additions* précédentes.

| Coeffi. du 1er terme. | Coeffi. du 2e terme. | Coeffi. du 3e terme. | Coeffi. du 4e terme. | Coeffi. du 5e terme. | Coeffi. du 6e terme. | Coeffi. du 7e terme. | Coefficient du 8e terme, &c. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | Coeffic. des deux quan. simples. |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | Coefficiens du quarré. |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | Coefficiens du cube. |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | Coefficians de la 4e puissance. |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | Coefficiens de la 5e puissance. |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | Coefficiens de la 6e puissance. |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | Coeffi. de la 7e puissance, &c. |

Les coefficiens du premier terme font seulement une suite d'*unités*, dont la somme forme toujours le coefficient du second terme.

Ceux du second terme forment une suite de nombres en progression arithmétique, dont la somme est toujours le coefficient du troisiéme terme de la puissance immédiatement supérieure, & on la trouvera par la *proposition* 1re du *chap.* 6. *Part.* 1re; c'est-à-dire que dans la septiéme puissance, on aura $\frac{6 + 1 \times 6}{2} = 21$, exposant du troisiéme terme.

Les autres coefficiens forment une suite composée, dont les sommes respectives peuvent se trouver par les coefficiens de leurs termes précédens.

Ainsi $\frac{21 \times 5}{3} = 35$, & $\frac{35 \times 4}{4} = 35$, $\frac{35 \times 3}{5} = 21$, & $\frac{21 \times 2}{6} = 7$, &c.

De là suit cette régle générale.

### Regle.

*Si l'exposant de la premiere lettre d'un terme est multiplié par son propre coefficient, & le produit divisé par le nombre des termes jusqu'à celui-là, le quotient sera le coefficient du terme qui suit immédiatement.*

C'eſt-à-dire que par le moyen des expoſans qui conviennent aux différentes puiſſances de la premiere ou principale lettre ſeulement ( comme $a$ ), on trouvera aiſément les coefficiens de chaque terme.

*EXEMPLES.*

On veut remplir tous les termes de la ſeptiéme puiſſance précédente du binome, & en trouver les coefficiens, $a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 + b^7$.

1°. L'expoſant de $a^7$, premier terme, ſera le coefficient du ſecond $a^7 + 7a^6b$.

2°. La moitié de l'expoſant du ſecond terme, multipliée par ſon coefficient, c'eſt-à-dire $\frac{7 \times 6}{2} = 21$, ſera l'expoſant du troiſiéme terme; on aura donc $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2$ pour les trois premiers termes.

3°. Le coefficient du quatriéme terme eſt $\frac{21 \times 5}{3} = 35$; on aura donc $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3$.

4°. Et $\frac{35 \times 4}{4} = 35$, ſera le coefficient du 5e terme.

Donc $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4$, &c. juſqu'à ce que tous les termes ſoient remplis avec leurs coefficiens reſpectifs, donneront $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

On doit encore remarquer ici de plus que les coefficiens ne croiſſent que juſqu'au point où les expoſans deviennent égaux ou changent de place, & qu'alors la ſuite des coefficiens revient & décroît dans le même ordre, c'eſt-à-dire que lorſque les expoſans des lettres deviennent ſemblables, leurs coefficiens le deviennent auſſi.

Et par conſéquent il ſuffit de trouver ( comme ci-devant ) les coefficiens de la moitié du nombre des termes dans chaque puiſſance.

Si l'on a compris ce que je viens de dire, avec l'opération des *exemples*, je crois qu'on trouvera qu'il eſt fort aiſé d'élever un binome à une puiſſance, quelque élevée

qu'elle ſoit, ſans ſe donner la peine d'une involution ou multiplication continuelle, & ſans le ſecours d'une Table des puiſſances, dans le goût de celle qui eſt propoſée par M. *Oughtred* dans ſa *Clef des Mathématiques*, page 40; & enſuite par pluſieurs autres.

J'avois autrefois propoſé cette méthode de former les puiſſances dans mon *Abrégé d'Algebre*, page 57, comme entierement nouvelle, n'ayant rien vû alors de ſemblable, ni oui dire que quelqu'autre y eût penſé. Mais depuis l'impreſſion de ce *Traité*, j'ai trouvé dans l'*Hiſtoire de l'Algebre* du Dr. *Wallis*, page 319 & 331, que le ſçavant *Iſaac Newton* l'avoit découverte long-tems auparavant, & le Dr. *Wallis* l'expoſe en cette maniere :

Soit $m$ l'expoſant de la *puiſſance* ;

on aura $\left\{ 1 \times \frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}, \text{\&c.} \right.$

pour la ſuite requiſe des coefficiens ; mais il ne nous apprend pas comment on a trouvé cette ſuite.

---

## SECTION VI.

### *Évolution des quantités entieres.*

L'Évolution eſt l'extraction des racines d'une puiſſance donnée, c'eſt-à-dire que c'eſt l'opération converſe de l'involution ; elle eſt fort aiſée dans les quantités ſimples, ſi la puiſſance donnée a la racine requiſe ; ce qui ſe connoît en cette maniere.

Si la puiſſance donnée n'a point de nombre qui la précéde, & ſi l'on peut diviſer ſon expoſant par celui de la racine requiſe, le quotient ſera l'expoſant de la racine.

Par exemple, ſi l'on demande la racine cubique de $aaaaaa$ ou $a^6$ (l'expoſant du cube eſt 3). Donc 3 ) 6 ( 2, c'eſt-à-dire que $a^2$ eſt la racine requiſe. Toutes ces opérations ſe font ordinairement en cette maniere :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $a^6$ | $a^6b^6$ | $a^6b^6d^6$ |
| 1 ▱ 2 | 2 | $a^3$ | $a^3b^3$ | $a^3b^3d^3$ |
| 1 ▱ 3 | 3 | $aa$ | $aabb$ | $aabbdd$ |
| 3 ▱ 2 | 4 | $a$ | $ab$ | $abd$ |

*Nota*. Les figures qui sont à la marge après le signe ( ▱ ) d'évolution, marquent l'exposant de la racine qu'il faut extraire.

Si les puissances données ont des coefficiens, c'est-à-dire des nombres qui les précédent) il faut extraire leurs racines respectives comme dans l'Arithmétique ordinaire.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ainsi | 1 | $81a^4$ | $1296a^8b^8$ | $20736a^4b^4c^4$ |
| 1 ▱ 2 | 2 | $9aa$ | $36a^4b^4$ | $144aabbcc$ |
| 1 ▱ 4 | 3 | $3a$ | $6aabb$ | $12abc$ |
| ou 2 ▱ 2 | 4 | $3a$ | $6aabb$ | $12abc$ |

Mais si l'on ne peut pas extraire exactement la racine requise, tant des coefficiens que des exposans de la puissance donnée, c'est une *racine sourde*, & l'on doit mettre au-devant le signe de la racine requise.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ainsi | 1 | $a^5$ | $67aaaa$ | $216bbbddd$ |
| 1 ▱ 2 | 2 | $\sqrt{a^5}$ | $\sqrt{67aaaa}$ | $\sqrt{216bbbddd}$ |
| 1 ▱ 3 | 3 | $\sqrt[3]{a^5}$ | $\sqrt[3]{67aaaa}$ | $6bd$ |

L'évolution des quantités ou puissances composées est un peu plus difficile que celle des puissances simples, & demande un long discours pour la bien expliquer, & pour faire voir la raison des différentes régles qu'on employe pour extraire les racines des quantités composées, surtout si les puissances sont élevées, &c. Ainsi pour abréger je les supprime, & à leur place je vais substituer une méthode aisée de découvrir les racines de toutes les puissances composées en général; il faut pour cela supposer, que si l'on éleve à une puissance quelconque la somme ou la différence de plusieurs quantités, il se formera au-

tant de puissances simples de la même élévation qu'il y a de quantités différentes.

Par exemple, si l'on quarre ou si l'on éleve à la seconde puissance $a + b + d$, on aura $aa + 2ab + 2ad + bb + 2bd + dd$, où se trouvent les quarrés $aa$, $bb$, & $dd$.

De même si l'on *cube*, ou si l'on éleve à la troisiéme puissance $a + b + d$, on aura $aaa$, $bbb$, $ddd$, &c.

D'où il suit que dans l'extraction des racines de toutes les quantités composées, on doit examiner, 1°. combien il y a de différentes lettres (ou quantités) dans la puissance donnée.

2°. Si les puissances simples de chacune de ces lettres sont d'un degré égal, & si elles renferment la racine simple qui est requise; si cela est, il faut l'extraire comme ci-devant.

3°. Joignez ensemble toutes ces racines simples avec le signe +, & élevez-les au même degré que la puissance donnée; ce qui étant fait, vous comparerez la nouvelle puissance avec celle qui est donnée; & si elles sont semblables dans tous leurs termes respectifs, vous avez la racine requise; ou si elles ne different que par leurs signes, vous corrigerez aisément cette racine par le signe —, selon l'occasion.

### *Exemple I.*

On veut extraire la racine quarrée de $cc + 2bc + bb - 2cd - 2bd + dd$.

Il y a dans ce quarré composé trois puissances séparées, $bb$, $cc$, $dd$, dont les racines simples sont $b$, $c$, $d$ : ainsi je suppose que la racine requ. est $b+c+d$, ou plutôt $b+c-d$, parce qu'il y a dans la puissance donnée $-2cd$ & $-2bd$, d'où je conclus qu'il faut prendre $-d$. Or $b+c-d$ étant quarré, donne $bb + 2bc - 2bd + cc - 2cd + dd$, qui est la même puissance dans tous ses termes que la puissance donnée, quoiqu'ils ayent une position différente. Donc $b + c - d$ est la vraie racine requise.

### EXEMPLE II.

On veut extraire la racine quarrée de $a^4 - 2aabb + b^4$. Il n'y a ici que deux puissances simples, $a^4$ & $b^4$, dont les racines quarrées sont $aa$ & $bb$; & parce que dans la puissance donnée il y a $- 2aabb$, je conclus que la racine est ou $aa - bb$, ou $bb - aa$; élevant l'une & l'autre, j'aurai $a^4 - 2aabb + b^4$; donc la racine requise est ou $aa - bb$, ou $bb - aa$, selon la nature ou le but de la question qui a produit la puissance donnée.

### EXEMPLE III.

Il faut extraire la racine quarrée $36aaaa + 108aa + 81$. Ici les deux puissances simples sont $36aaaa$ & $81$, dont les racines sont $6aa$ & $9$; & comme les signes sont tous $+$, je suppose que la racine est $6aa + 9$, laquelle étant élevée au quarré, produit $36a^4 + 108aa + 81$. Donc $6aa + 9$ est la vraie racine.

### EXEMPLE IV.

On veut extraire la racine cube de $125aaa + 300aae - 450aa + 250aee - 720ae + 64eee + 540a - 288ee + 432e - 216$.

Il y a dans cet exemple trois puissances distinctes, $125aaa$, $64eee$, & $- 216$. La racine cube de $125aaa$ est $5a$; celle de $64eee$ est $4e$, & celle de $- 216$ est $- 6$. Je suppose donc que la racine requise est $5a + 4e - 6$, laquelle étant élevée au cube, produit le même cube que la puissance donnée. Donc $5a + 4e - 6$ est la racine cube requise.

Mais si la nouvelle puissance formée par la racine supposée (qu'on a élevée au degré requis) ne se trouve pas la même que la puissance donnée, c'est-à-dire si elle a plus ou moins de termes, &c. vous pouvez conclure que la racine de la puissance donnée est sourde, qu'il faut l'exprimer par le signe radical convenable, & qu'on ne peut l'exprimer autrement, jusqu'à ce que cette puis-

ſance ſoit toute exprimée, & ſa racine extraite en nombres.

*EXEMPLE V.*

On demande la racine cube de $27aaa + 54baa + 8bbb$.

On a ici deux cubes diſtincts & parfaits, $27aaa$ & $8bbb$, dont les racines cubes ſont $3a$ & $2b$. On peut donc ſuppoſer que la racine requiſe eſt $3a + 2b$, laquelle étant élevée à la troiſiéme puiſſance, donne $27aaa + 54baa + 36bba + 8bbb$. Mais cette nouvelle puiſſance a un terme ($36bba$) de plus que la puiſſance donnée; & cette puiſſance étant un cube parfait, on doit conclure que la puiſſance donnée ne l'eſt pas, & que ſa racine eſt ſourde. Il faut donc l'exprimer en cette maniere :

$$\sqrt[3]{27aaa + 54baa + 8bbb}.$$

Si les commençans comprennent bien ces exemples, ils verront qu'il eſt fort aiſé par cette méthode de découvrir la vraie racine de toute puiſſance donnée quelconque.

# CHAPITRE III.

## *Des Fractions Algebriques, ou quantités rompues.*

### SECTION PREMIERE.

*Notation des quantités fractionnelles.*

Les quantités fractionnelles s'expriment comme les fractions ordinaires dans l'Arithmétique commune.

Ainſi $\left\{ \frac{a}{b}, \frac{2bc}{d}, \frac{5b-4a}{4d+7b} \right.$ *Numérateurs.* / *Dénominateurs.*

Vous verrez dans le quatriéme cas du dernier chapitre

de la Division comment ces quantités se forment ainsi ; on les traite à tous égards de la même maniere que les fractions ordinaires de l'Arithmétique.

---

## SECTION II.

*Réduire différentes fractions à la même dénomination, sans changer leur valeur.*

### REGLE.

*Multipliez tous les dénominateurs ensemble pour avoir un nouveau dénominateur, & chaque numérateur par tous les autres dénominateurs, excepté par le sien propre, pour avoir de nouveaux numérateurs.*

### EXEMPLES.

Il faut réduire $\frac{a}{b}$ & $\frac{d}{c}$ à la même dénomination.

1°. $a \times c$ & $d \times b$ seront les numérateurs, & $b \times c$ le commun dénominateur. Ainsi $\frac{ca}{bc}$ & $\frac{bd}{bc}$ seront les deux fractions requises, c'est-à-dire $\frac{ca}{bc} = \frac{a}{b}$, & $\frac{bd}{bc} = \frac{d}{c}$.

2°. Soient $\frac{b+c}{a+b}$ & $\frac{d-c}{b-d}$ qu'il faut réduire à même dénomination, on aura $\frac{bb+bc-bd-dc}{ab+bb-ad-bd}$, & $\frac{ad-ac+bd-bc}{ab+bb-ad-bd}$, &c.

---

## SECTION III.

*Changer les quantités entieres en fractions d'une dénomination donnée.*

### REGLE.

*Multipliez les quantités entieres par le dénominateur donné pour avoir un numérateur, sous lequel vous écrirez le dénominateur donné, & vous aurez la fraction requise.*

### EXEMPLES.

Soit à changer $a + b$ en fraction, dont le dénominateur doit être $d - a$.

1°. $a + b \times d - a$ est $da + bd - aa - ba$, & la fraction est $\frac{da + bd - aa - da}{d - a}$. De même $b + \frac{a}{d}$ sera $\frac{db + a}{d}$, & $\frac{aa}{d} - a$ sera $\frac{aa - da}{d}$, $a + b + \frac{aa + bb}{a - b}$ sera $\frac{2aa}{a - b}$.

On change les quantités entieres en fractions, en leur donnant l'*unité* pour dénominateur.

Ainsi $ab$ est $\frac{ab}{1}$, & $aa - bb$ est $\frac{aa - bb}{1}$, &c.

---

## SECTION IV.

### *Abréger ou réduire les fractions à leur plus basse dénomination.*

### REGLE.

*Divisez le numérateur & le dénominateur par leur plus grand diviseur commun, c'est-à-dire par les quantités qui sont communes à l'un & à l'autre, leurs quotiens seront la fraction abaissée à ses moindres termes.*

Ainsi $\frac{aac}{dc}$ est $\frac{aa}{d}$, $\frac{abbb}{abc}$ est $\frac{bb}{c}$, & $a + \frac{bdc}{bc}$ est $= a + d$.

Dans ces fractions simples, on voit d'abord quel est le diviseur commun (si elles en ont); mais la chose est souvent fort difficile dans les fractions composées, & on ne peut le trouver qu'en divisant le numérateur par le dénominateur, jusqu'à ce qu'il ne reste rien, lorsque la chose est possible, ou en divisant le dénominateur par le numérateur, & le numérateur par le reste, & ainsi de suite pour trouver leur mesure commune comme dans les fractions ordinaires (*Sect.* 4. *Chap.* 4. *Part.* 1re).

EXEMPLES.

On veut réduire aux moindres termes $\frac{aac - aad}{cd - dd}$.

$$\text{Soit } cd - dd\ )\ \begin{array}{l} aac - aad \\ \underline{aac - aad} \\ \quad 0 \quad 0 \end{array}\ \left(\frac{aa}{d}\right., \text{ fraction requise.}$$

Il arrive dans cet exemple que le numérateur est divisé exactement par le dénominateur ; mais dans le suivant c'est toute autre chose, & il faut une double division pour trouver la mesure commune.

Soit à réduire $\frac{aaa - abb}{aa + 2ab + bb}$ à ses moindres termes.

$$1^\circ.\ aa + 2ab + bb\ )\ \begin{array}{l} aaa - abb\ (a \\ \underline{aaa + 2aab + abb} \\ \quad -2aab - 2abb.\ \textit{Reste}\ ) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aa + 2ab + bb\ \left(-\frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}\right. * \\ \underline{aa + ab} \\ \quad ab + bb \\ \quad \underline{ab + bb} \\ \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Par où l'on voit que $-2aab - 2abb$ est la mesure commune, par laquelle on divisera $aaa - abb$, en cette maniere :

$$-2aab - 2abb\ )\ \begin{array}{l} aaa - abb\ \left(-\frac{a}{2b} + \frac{1}{2}\right. \\ \underline{aaa + aab} \\ \quad -aab - abb \\ \quad \underline{-aab - abb} \\ \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Ainsi $-\frac{a}{2b} + \frac{1}{2}$ est le nouveau *numérateur*.

Et * $-\frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$ le nouveau *dénominateur*.

Mais

Mais $-\frac{a}{2b}+\frac{1}{2a}=-\frac{2a+2b}{4b}=-\frac{a+b}{2b}$, *numérat.*

Et $-\frac{1}{2b}-\frac{1}{2a}=-\frac{2a-2b}{4ba}=-\frac{a-b}{2ba}$, *dénominateur.*

Multiplions l'un & l'autre par $2ba$,

nous aurons $\left\{\begin{array}{l}\overline{-aa+ab}, \text{ numérateur}\\ -a-b, \text{ dénominateur.}\end{array}\right.$

Ou, changeant les signes de toutes les quantités, on aura $\frac{aa-ab}{a+b}$, nouvelle *fraction* requise.

C'est-à-dire $\frac{aa-ab}{a+b}=\frac{aaa-abb}{aa+2ab+bb}$.

Soit encore à réduire la fraction $\frac{dd-bb}{ddd-bbb}$.

La mesure commune de cette fraction se trouvera plus aisément (comme on le voit par expérience) en divisant le *dénominateur* par le *numérateur*, &c. en cette maniere :

$$dd-bb\ )\ ddd-bbb\ (\ d$$
$$\underline{ddd-bbd}$$
$$+bbd-bbb\ )\ dd-bb\ (\ \frac{d}{bb}$$
$$\underline{dd-bd}$$
$$+bd-bb\ )\ bbd-b^3\ (\ b$$
$$\underline{bbd-b^3}$$
$$0 \quad 0$$

Par où l'on voit que $bd-bb$ est la mesure commune par où il faut diviser le *numérateur* & le *dénominateur*.

Donc $bd-bb\ )\ dd-bb\ \left(\frac{d}{b}+1\right.$, *nouv. numérateur.*

$$\underline{dd-db}$$
$$+db-bb$$
$$\underline{+db-bb}$$
$$0 \quad 0$$

Et $bd-bb$) $ddd-bbb$ ($\frac{dd}{b}+d+b$, *nouv. dénomin*

$ddd-ddb$

$+ddb-ddb$

$ddb-bbd$

$+bbd-bbb$

$bbd-bbb$

o o

Multiplions l'un & l'autre par $b$, & nous aurons $\left\{\begin{array}{l} \frac{d+b}{dd+bd+bb} \end{array}\right.$ $d+b$, *numérat.* / $dd+bd+bb$, *dénominat.* } de la *fract.* requise.

Mais si après toutes ces opérations on ne peut pas trouver une mesure commune au *numérateur* & au *dénominateur*, la fraction est déja réduite à ses moindres termes.

*Nota.* Les commençans comprendront ces opérations lorsqu'ils auront passé par la Multiplication & Division des Fractions.

---

## SECTION V.

### *Addition & Soustraction des quantités fractionnelles.*

Si les fractions données ne sont pas toutes d'une même dénomination, vous les réduirez par la *sect.* 4. Et ensuite

#### REGLE.

*Vous ajouterez ou soustrairez leurs numérateurs, selon que l'occasion l'exige, & vous écrirez sous leur somme ou sous leur difference le dénominateur commun, comme dans les fractions ordinaires.*

*Exemples de l'Addition.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $\frac{bb}{c}$ | $\frac{a+b}{d}$ | $\frac{2a-b}{d+c}$ | $\frac{a-b+d}{d+a}$ |
| | 2 | $\frac{aa}{c}$ | $\frac{2a+c}{d}$ | $\frac{2b-a}{d+c}$ | $\frac{a+b-d}{d+a}$ |
| 1 + 2 | 3 | $\frac{bb+aa}{c}$ | $\frac{3a+b+c}{d}$ | $\frac{a+b}{d+c}$ | $\frac{2a}{d+a}$ |

*Exemples de Soustraction.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $\frac{bb+aa}{c}$ | $\frac{a+b}{d+c}$ | $\frac{3a+b+c}{d}$ | $\frac{2b}{d+a}$ |
| | 2 | $\frac{bb}{c}$ | $\frac{2b-a}{d+c}$ | $\frac{2a+c}{d}$ | $\frac{a+b-d}{d+a}$ |
| 1 — 2 | 3 | $\frac{aa}{c}$ | $\frac{2a-b}{d+c}$ | $\frac{a+b}{d}$ | $\frac{b-a+d}{d+a}$ |

## SECTION VI.

### *Multiplication des quantités fractionnelles.*

1°. PRéparez les quantités mixtes ( s'il y en a ) les réduisant à des fractions impropres, & les quantités entieres, en écrivant au dessous l'*unité* comme dans la *sect.* 3. Ensuite

### REGLE.

*Multipliez les numérateurs ensemble pour avoir un nouveau numérateur, & les dénominateurs ensemble pour un nouveau dénominateur, comme dans les fractions ordinaires.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ainsi | 1 | $\frac{ab}{c}$ | $\frac{3a-2b}{2d+c}$ |
| | 2 | $\frac{d}{f}$ | $\frac{4a+2b}{d}$ |
| 1 × 2 | 3 | $\frac{abd}{cf}$ | $\frac{12aa-2ab-4bb}{2dd+dc}$ |

Suppoſons qu'on veuille multiplier $2a + \frac{b}{c} - 25$ par $3b + c$. Ces quantités étant préparées (par la *ſect.* 3.) on

| | | |
|---|---|---|
| aura | 1 | $\frac{2ac + b - 25c}{c}$ |
| | 2 | $\frac{3b + 4c}{1}$ |
| 1 × 2 | 3 | $\frac{6bac + 3bb - 75bc + 8acc + 4bc - 100cc}{c}$ |
| ou | 4 | $6ba + 8ac - 71b - 100c + \frac{3bb}{c}$, par la *ſect.* 4. |

*Nota.* On multiplie une fraction par ſon dénominateur, en effaçant ou détruiſant ce dénominateur.

Ainſi $\frac{b}{a} \times a$ donne $b$; car $\frac{b}{a} \times \frac{a}{1} = \frac{ba}{} = b$, &c.

## SECTION VII.

### *Diviſion des Quantités fractionnelles.*

Les quantités fractionnelles étant préparées, comme dans la derniere ſection, on obſervera cette régle.

### REGLE.

*Multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur pour avoir un nouveau numérateur, & les autres deux enſemble pour le nouveau dénominateur, commme dans les fractions ordinaires.*

### EXEMPLES.

On veut diviſer $\frac{abd}{cf}$ par $\frac{ab}{c}$, l'opération ſera $\frac{ab}{c}$ ) $\frac{abd}{cf}$ ( $\frac{abdc}{abcf} = \frac{d}{f}$, par la *ſect.* 4.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ou bien | 1 | $\frac{abd}{cf}$ | $\frac{a+b}{d}$ | $\frac{aaa-bbb}{a+b}$ |
| | 2 | $\frac{ab}{c}$ | $\frac{c-b}{a}$ | $\frac{aa-ab+bb}{c}$ |
| $1 \div 2$ | 3 | $\frac{d}{f}$ | $\frac{aa+ba}{dc-db}$ | $\frac{aaac-bbbc}{aaa+bbb}$ |

Il faut diviser $aa + \frac{3abb}{a+4b}$ par $a+b$.

L'opération préparée est ainsi : $\frac{a+b}{1}$ ) $\frac{aaa+4aab+3abb}{a+4b}$ ( $\frac{aaa+4aab+3abb}{aa+5ba+4bb} = \frac{aa+3b}{a+4b}$, par la *sect.* 4.

Lorsque les fractions sont de même dénomination, il faut effacer les dénominateurs, & diviser les numérateurs.

Par exemple, s'il faut diviser $\frac{ab^3}{c}$ par $\frac{bb}{c}$, on aura $bb$ ) $ab^3$ ( $ab$, *quotient* requis.

Car $\frac{bb}{c}$ ) $\frac{ab^3}{c}$ ( $\frac{ab^3c}{bbc}$; mais $\frac{ab^3c}{bbc} = ab$, par la *sect.* 4.

De même s'il faut diviser $\frac{a^3-abb}{c-d}$ par $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, en effaçant de part & d'autre $c-d$, on aura

$$aa+2ab+bb \;)\; a^3-abb \;(\; \frac{aa-ab}{a+b}, \&c.$$

## SECTION VIII.

*Involution des quantités fractionnelles.*

### REGLE.

*Multipliez le numérateur par lui-même pour avoir un nouveau numérateur, & le dénominateur de même pour avoir un nouveau dénominateur, & l'un & l'autre aussi souvent que la puissance l'exige.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ainsi | 1 | $\frac{b}{a}$ | $\frac{3bc}{2ad}$ | $\frac{b+d}{a-c}$ |
| 1 ⊙ 2 | 2 | $\frac{bb}{aa}$ | $\frac{9bbcc}{4aadd}$ | $\frac{bb+2bd+dd}{aa-2ac+cc}$ |
| 1 ⊙ 3 | 3 | $\frac{bbb}{aaa}$ | $\frac{27bbbccc}{8aaaddd}$ | $\frac{bbb+3bbd+3bdd+ddd}{aaa-3aac+3acc-ccc}$ |

## SECTION IX.

### *Evolution des quantités fractionnelles.*

Si le *numérateur* & le *dénominateur* de la fraction donnée ont chacun la racine requise ( ce qui arrive fort rarement ) il faut les extraire, & leurs racines respectives seront le *numérateur* & le *dénominateur* de la nouvelle fraction requise.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ainsi | 1 | $\frac{9aabb}{4dd}$ | $\frac{aa+2ab+bb}{aa-2ab+bb}$ |
| 1 ▭ 2 | 2 | $\frac{3ab}{2d}$ | $\frac{a+b}{a-b}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| De même | 1 | $\frac{27aaabbb}{8ddd}$ | $\frac{aaa+3aab+3abb+bbb}{aaa-3aab+3abb-bbb}$ |
| 1 ▭ 3 | 2 | $\frac{3ab}{2d}$ | $\frac{a+b}{a-b}$ |

Il arrive quelquefois que le *numérateur* se trouve avoir la racine requise, tandis que le *dénominateur* ne l'a pas, ou que le *dénominateur* a cette racine, tandis que le *numérateur* ne l'a pas; en ce cas on fait les opérations suivantes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $\frac{aabb}{ddd}$ | $\frac{aaa+4bb-dd}{aa+2ab+bb}$ |
| 1 ▭ 2 | 2 | $\frac{ab}{\sqrt{ddd}}$ | $\frac{\sqrt{aaa+4bb-dd}}{a+b}$ |

Mais lorsque ni le *numérateur*, ni le *dénominateur* n'ont pas la racine requise exacte, on met devant la fraction le signe radical de la racine, & elle devient racine sourde, comme dans le dernier *cas*; ce qui me conduit au calcul des racines sourdes.

# CHAPITRE IV.

## *DES QUANTITÉS SOURDES.*

SI l'on vouloit traiter à fond toute la théorie des *quantités sourdes*, il faudroit (pour la rendre passablement intelligible) une explication si longue, qu'il y auroit de quoi en remplir un Traité, en y insérant toutes les méthodes qu'on a trouvées pour en faciliter l'usage, sans quoi cette théorie seroit très embarrassée & pénible pour les commençans. Mais maintenant on abandonne entierement comme inutiles toutes ces réductions ennuyeuses des racines sourdes, dont on avoit besoin autrefois pour résoudre les équations, parce que les nouvelles méthodes de résoudre toutes sortes d'équations rendent leurs solutions également aisées, quelque élevées que soient leurs puissances.

Depuis qu'on a bien compris le vrai usage de l'*Arithmétique décimale*, on a opéré sur les *nombres sourds* par cette Arithmétique, comme on le voit par différens exemples de cette espece dans l'*Histoire de l'Algebre* du Docteur Wallis, depuis la page 23 jusqu'à la page 29.

Je supprimerai donc, pour abréger, toutes ces réductions ennuyeuses, & je me bornerai à apprendre au jeune

Algebriste comment il doit traiter les *quantités sourdes* qui se trouvent dans la solution des questions épineuses.

## SECTION PREMIERE.

### *Addition & Soustraction des quantités sourdes.*

PREMIER *cas.* Lorsque les quantités sourdes sont homogenes (ou semblables), il faut ajouter ou soustraire la partie rationnelle qui leur est jointe, & à leur somme ou différence, joindre la quantité sourde ou irrationnelle.

*Exemples de l'Addition.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $5\sqrt{bc}$ | $6b\sqrt{ac}$ | $b\sqrt{aa+cc}$ |
| | 2 | $7\sqrt{bc}$ | $4b\sqrt{ac}$ | $3b\sqrt{aa+cc}$ |
| 1+2 | 3 | $12\sqrt{bc}$ | $10b\sqrt{ac}$ | $4b\sqrt{aa+cc}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $4d^3\sqrt{aa}$ | $b+\sqrt[3]{aa-cc}$ | $bc^5\sqrt{aa+d}$ |
| | 2 | $d^3\sqrt{aa}$ | $c-\sqrt{aa-cc}$ | $3bc^5\sqrt{aa+d}$ |
| 1+2 | 3 | $5d^3\sqrt{aa}$ | $b+c$ | $4bc^5\sqrt{aa+d}$ |

*Exemples de la Soustraction.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $12\sqrt{bc}$ | $10b\sqrt{ac}$ | $4b\sqrt{aa+cc}$ |
| | 2 | $7\sqrt{bc}$ | $4b\sqrt{ac}$ | $3b\sqrt{aa+cc}$ |
| 1—2 | 3 | $5\sqrt{bc}$ | $6b\sqrt{ac}$ | $b\sqrt{aa+cc}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $5d^3\sqrt{aa}$ | $b+c$ | $4bc^5\sqrt{aa+d}$ |
| | 2 | $4d^3\sqrt{aa}$ | $c-\sqrt[3]{aa-cc}$ | $3bc^5\sqrt{aa+d}$ |
| 1—2 | 3 | $d^3\sqrt{aa}$ | $b+\sqrt{aa-cc}$ | $bc^5\sqrt{aa+d}$ |

*Second cas.* Lorsque les quantités sourdes sont hétérogenes (ou que leurs exposans sont différens), il faut seu-

lement les ajouter ou les soustraire par leurs signes + ou —.

*Exemples de l'Addition.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $\sqrt{bc}$ | $4d\sqrt{a}$ | $\sqrt[3]{ac-ba}$ |
| | 2 | $\sqrt{ba}$ | $3b\sqrt{ac}$ | $\sqrt{ac+ba}$ |
| 1+2 | 3 | $\sqrt{bc}+\sqrt{ba}$ | $4d\sqrt{a}+3b\sqrt{ac}$ | $\sqrt[3]{ac-ba}+\sqrt{ac+ba}$ |

*Exemples de la Soustraction.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | $\sqrt{bc}$ | $b-d\sqrt{aaa+ca}$ |
| | 2 | $\sqrt{ba}$ | $d-2a\sqrt{bd+dd}$ |
| 1—2 | 3 | $\sqrt{bc}-\sqrt{ba}$ | $b-d\sqrt{aaa+ca}-d+2a\sqrt{bd+dd}$ |

## SECTION II.

### *Multiplication des quantités sourdes.*

*Premier cas.* Lorsque ces quantités sont de pures sourdes de la même espece, il faut les multiplier ensemble, & mettre devant leur produit leur signe radical.

*Exemples.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $\sqrt{b}$ | $\sqrt{ba+da}$ | $\sqrt{aa+bb}$ |
| | 2 | $\sqrt{a}$ | $\sqrt{ca}$ | $\sqrt{aa-bb}$ |
| 1×2 | 3 | $\sqrt{ab}$ | $\sqrt{bcaa+dcaa}$ | $\sqrt{aaaa-bbbb}$ |

*Second cas.* Si les quantités sourdes de même espece, comme ci-devant, sont jointes à des quantités rationnelles, il faut multiplier les rationnelles par les rationnelles, & les sourdes par les sourdes, & joindre leurs produits ensemble.

EXEMPLES.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $d\sqrt{bc}$ | $5cd\sqrt{ba+da}$ | $15\sqrt{ab}$ |
| | 2 | $3b\sqrt{a}$ | $3a\sqrt{ca}$ | $5\sqrt{d}$ |
| $1\times 2$ | 3 | $3bd\sqrt{abc}$ | $15cda\sqrt{bcaa+cdaa}$ | $75\sqrt{abd}$ |

## SECTION III.

### *Division des quantités sourdes.*

*Premier cas.* Lorsque ces quantités sont de pures sourdes de même espece, & qu'on peut les diviser exactement (c'est-à-dire sans reste); vous les diviserez, & vous mettrez devant leur quotient leur signe radical.

EXEMPLES.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $\sqrt{ba}$ | $\sqrt{bcaa+dcaa}$ | $\sqrt{aaaa-bbbb}$ |
| | 2 | $\sqrt{b}$ | $\sqrt{ca}$ | $\sqrt{aa-bb}$ |
| $1\div 2$ | 3 | $\sqrt{a}$ | $\sqrt{ba+da}$ | $\sqrt{aa+bb}$ |

*Second cas.* Si les quantités sourdes de même espece sont jointes à des quantités rationnelles, il faut diviser les rationnelles par les rationnelles, & joindre à leur quotient celui des quantités sourdes, divisées par les sourdes avec leur signe radical.

EXEMPLES.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $3db\sqrt{bca}$ | $15cda\sqrt{bcaa+dcaa}$ | $75\sqrt{abd}$ |
| | 2 | $3d\sqrt{a}$ | $3a\sqrt{ca}$ | $5\sqrt{d}$ |
| $1\div 2$ | 3 | $b\sqrt{bc}$ | $5cd\sqrt{ba+da}$ | $15\sqrt{ab}$ |

*Nota.* Si l'on divise un quarré par sa racine, le quotient sera sa racine.

EXEMPLES.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $a$ | $bb+2bc+cc$ | $aaaa-2bbaa+bbbb$ |
| | 2 | $\sqrt{a}$ | $\sqrt{bb+2bc+cc}$ | $\sqrt{a^4-2bbaa+b^4}$ |
| $1 \div 2$ | 3 | $\sqrt{a}$ | $\sqrt{bb+2bc+cc}$ | $\sqrt{a^4-2bbaa+b^4}$ |

# SECTION IV.

## *Involution des quantités sourdes.*

PREMIER *cas.* Lorsque les sourdes ne sont pas jointes à des quantités rationnelles, on les éleve au degré que leur exposant indique, en effaçant seulement leur signe radical.

EXEMPLES.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $\sqrt{a}$ | $\sqrt{bca}$ | $\sqrt{aa-bb}$ | $\sqrt{5a-da}$ |
| $1 \odot 2$ | 2 | $a$ | $bca$ | $aa-bb$ | $5a-da$ |

*Second cas.* Lorsque les sourdes sont jointes à des quantités rationnelles, il faut élever ces quantités au degré que l'exposant des sourdes indique, & ensuite multiplier ces quantités ainsi élevées par les quantités sourdes, après avoir effacé leur signe radical.

EXEMPLES.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $b\sqrt{a}$ | $5d\sqrt{ca}$ | $3b\sqrt{aa-dd}$ |
| $1 \odot 2$ | 2 | $bba$ | $25ddca$ | $9bbaa-9bbdd$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $a\sqrt[3]{bc}$ | $3d\sqrt[3]{aa+bb}$ | $da\sqrt[3]{b}$ |
| $1 \odot 3$ | 2 | $a^3bc$ | $27d^3aa+27d^3bb$ | $d^3a^3b$ |

On verra aisément pourquoi l'on efface seulement le signe radical comme dans le premier *cas*, si l'on fait at-

tention que chaque racine, multipliée par elle-même, produit un quarré, &c.

De là suit la raison des opérations du second *cas*.

Supposons $b\sqrt{a} = x$; donc $\sqrt{a} = \frac{x}{b}$ par l'*axiome* 4; & les deux côtés, ou membres de cette équation étant élevés à la même puissance, nous aurons $a = \frac{xx}{bb}$. Ensuite multipliant les deux côtés de l'équation par $bb$, elle deviendra $bba = xx$, par l'*axiome* 3; ce qu'il falloit prouver.

De même soit $5d\sqrt{ca} = x$; donc $\sqrt{ca} = \frac{x}{5d}$; & $ca = \frac{xx}{25dd}$, par conséquent $25ddca = xx$.

De là suit aussi la raison de la méthode dont on se sert pour multiplier les quantités sourdes dans les deux *cas*; car

| | | | |
|---|---|---|---|
| supposons | 1 | $\sqrt{b} = z$ | *Exemple* 1er. *Cas* 1er. |
| | 2 | $\sqrt{a} = x$ | |
| $1 \odot 2$ | 3 | $b = zz$ | |
| $2 \odot 2$ | 4 | $a = xx$ | |
| $3 \times 4$ | 5 | $ba = zzxx$ | |
| $5 \sqsubset 2$ | 6 | $\sqrt{ba} = zx$, ce qu'il falloit prouver. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $d\sqrt{bc} = z$ | *Exemple* 1. *Cas* 2. |
| | 2 | $3b\sqrt{a} = x$ | |
| $1 \div d$ | 3 | $\sqrt{bc} = \frac{z}{d}$ | |
| $2 \div 3b$ | 4 | $\sqrt{a} = \frac{x}{3b}$ | |
| $4 \times 3$ | 5 | $\sqrt{bca} = \frac{zx}{3bd}$ par ce qui a été prouvé ci-dev. | |
| $5 \times 3bd$ | 6 | $3bd\sqrt{bca} = zx$, &c | |

La *Division* étant la converse de la *Multiplication*, n'a pas besoin d'autre preuve.

# CHAPITRE V.

## *Sur la Nature des Equations, & la maniere de les préparer pour la ſolution.*

LORSQU'ON propoſe un *problême* ou une *queſtion* pour la réſoudre analitiquement, il faut s'attacher à bien comprendre le but de la queſtion (dans toutes ſes parties) pour la dégager de tous les termes ambigus qui la déguiſent pour l'ordinaire, autrement il ſeroit très-difficile, & même impoſſible d'établir l'état de la queſtion par des lettres & des équations.

On ne peut parvenir que par la pratique à la connoiſſance de cette partie, la plus difficile de toutes, & par l'attention à la maniere dont on a réſolu les principales queſtions, qui par elles-mêmes ne ſont pas difficiles; c'eſt pour cela que j'ai inſeré ici un nombre de diverſes queſtions, où l'on trouvera une grande varieté.

Lorſqu'on aura aſſez bien pénétré l'état de la queſtion propoſée, pour pouvoir placer toutes les *quantités* (c'eſt-à-dire toutes les *lettres* qui les repréſentent) dans l'ordre qui leur convient; on examinera d'abord ſi la queſtion eſt limitée ou ſi elle ne l'eſt pas, c'eſt-à-dire ſi elle eſt ſuſceptible de pluſieurs réponſes, & pour le découvrir, on obſervera les deux régles ſuivantes.

### REGLE I.

*Lorſque le nombre des quantités requiſes ſurpaſſe le nombre des équations données, la queſtion eſt capable d'une infinité de réponſes.*

### EXEMPLE.

Suppoſons que l'on propoſe cette queſtion : il y a trois *nombres*, tels que ſi le premier eſt ajouté au ſecond, leur

*somme* sera 22, & si le second est ajouté au troisiéme, leur *somme* sera 46. Quels sont ces trois nombres ?

Soient ces trois nombres inconnus, représentés par ces trois lettres, le premier $x$, le second $z$, & le troisiéme $y$; on aura par la question $x + z = 22$, & $z + y = 46$.

Ici le nombre des quantités requises est trois, $x$, $z$, $y$, & le nombre des équations données n'est que deux ; donc cette question n'est pas limitée, mais elle est susceptible d'une infinité de réponses, parce que pour chacune de ces trois lettres on peut prendre un nombre à volonté qui soit plus petit que 22 ; ce qui se comprend aisément, pour peu qu'on y fasse attention.

## REGLE II.

*Lorsque le nombre des équations données ( qui ne dépendent pas l'une de l'autre ) est précisément aussi grand que celui des quantités requises ; la question est parfaitement limitée, c'est-à-dire que chaque quantité requise n'a qu'une seule valeur.*

Par exemple, si la question précédente étoit proposée en cette maniere : il y a trois nombres ( $x$, $z$ & $y$, comme ci-devant ), tels que si le premier est ajouté au second, leur somme sera 22 ; si le second est ajouté au troisiéme, leur somme sera 46 ; & si le premier est ajouté au troisiéme, leur somme sera 36. Quels sont ces nombres ? C'est-à-dire $x + z = 22$, $z + y = 46$, & $x + y = 36$.

La question est à présent parfaitement limitée, chaque quantité n'ayant qu'une seule valeur ; sçavoir, $x = 6$, $z = 16$, & $y = 30$.

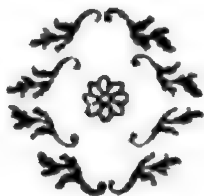
*Nota.* Si le nombre des équations données surpasse le nombre des quantités requises, non seulement la question est limitée, mais souvent elle est impossible, lorsque ces équations ne peuvent pas subsister ensemble.

Ayant bien établi l'état de la question dans les lettres qui la représentent, & ayant trouvé qu'elle est limitée à une seule réponse ( ou au moins tellement bornée, qu'elle ne soit susceptible que d'un certain nombre déterminé de

réponſes), on rangera toutes ces lettres, ou on les comparera enſemble par l'*Addition*, *Souſtraction*, *Multiplication*, ou *Diviſion*, &c. ſelon que la nature de la queſtion l'exige; de maniere que toutes les quantités inconnues diſparoiſſent & ſoient chaſſées, à l'exception d'une ſeule; mais il faut avoir bien ſoin dans toutes ces opérations de conſerver une exacte égalité; & lorſque cette quantité inconnue, ou quelqu'une de ſes puiſſances (comme *quarré*, *cube*, &c.) ſe trouve égale aux quantités connues; alors on dit que la queſtion eſt conduite à ſon équation, & par conſéquent à ſa réſolution.

Mais on ne peut pas donner des régles particulieres pour chaſſer ou faire diſparoître les quantités qui ſont dans une équation. On ne peut parvenir à cette partie de l'Art, que par l'attention & la pratique. Lorſqu'on y eſt parvenu, il arrive ordinairement que la quantité inconnue, qui reſte ſeule dans l'équation, eſt tellement mêlée & compliquée avec les autres qui ſont connues, qu'on ne peut pas ſans peine & ſans adreſſe la faire venir ſeule (ou ſes puiſſances, &c.) à un côté de l'équation, & faire paſſer de l'autre côté les quantités connues (en conſervant toujours une parfaite égalité). C'eſt ce que l'ingénieux *Schooten* dans ſes *Principes de la Mathématique univerſelle* appelle *Réduction des Équations*.

La réduction des équations (comme la plûpart, ou même toutes les opérations algebriques) dépend de la juſte application des cinq axiomes propoſés à la fin du chap. I; & par conſéquent ſi l'on pénétre bien ces axiomes, on verra clairement la raiſon de ces opérations, & tout deviendra facile, comme dans les ſections ſuivantes.



## SECTION PREMIERE.

### *De la Réduction par Addition.*

La réduction par addition est appuyée sur l'axiome I, & elle consiste uniquement à transposer (ou éloigner) une quantité négative de l'un des côtés de l'équation à l'autre côté, avec le signe + au devant, comme dans ces

### Exemples.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $x-b=d$ | Soit de même | 1 | $xx-d=c-xx$ |
| Donc | 2 | $x=d+b$ | $1+d$ | 2 | $xx=c-xx+d$ |
| car | 3 | $b=b$ | $2+xx$ | 3 | $2xx=c+d$ |
| $1+3$ | 4 | $x=d+b$ | | | |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $3x-4=6-x$ |
| $1+\bar{4}$ | 2 | $3x=6+4-x$ |
| $2+x$ | 3 | $4x=6+4=10$ |

*Nota.* Lorsqu'on marque en marge un nombre absolu, il faut tirer une ligne au dessus pour le distinguer des autres nombres, comme $\bar{4}$ dans le second cas de cet *exemple*.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $xx-dc-b=dd-2bx$ |
| $1+b$ | 2 | $xx-dc=dd-2bx+b$ |
| $2+dc$ | 3 | $xx=dd-2bx+b+dc$ |
| $3+2bx$ | 4 | $xx+2bx=dd+b+dc$ |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $2dx-d=cc-3bxx-xxx$ |
| $1+xxx$ | 2 | $xxx+2dx-d=cc-3bxx$ |
| $1+3bxx$ | 3 | $xxx+2dx+3bxx-d=cc$ |
| $3+d$ | 4 | $xxx+3bxx+2dx=cc+d.$ |

## SECTION II.

### *De la Réduction par Soustraction.*

Elle est appuyée sur l'axiome 2, & elle se fait en transposant (ou éloignant) les quantités positives de l'un des côtés

côtés de l'équation à l'autre, avec le signe —, comme dans ces *exemples.*

| | | |
|---|---|---|
| Supposons | 1 | $x+b=d$ |
| Et | 2 | $b=b$ |
| 1 — 2 | 3 | $x=d-b$ |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $3x+4=6+x$ |
| 1 — $x$ | 2 | $2x+4=6$ |
| 2 — 4 | 3 | $2x=6-4=2$ |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $xx+dc+b=dd+2bx$ |
| 1 — $2bx$ | 2 | $xx-2bx+dc+b=dd$ |
| 2 — $dc$ | 3 | $xx-2bx+b=dd-dc$ |
| 3 — $b$ | 4 | $xx-2bx=dd-dc-b$ |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $xxx+d=cc+3bxx+2dx$ |
| 1 — $3bxx$ | 2 | $xxx-3bxx+d=cc+2dx$ |
| 2 — $2dx$ | 3 | $xxx-3bxx-2dx+d=cc$ |
| 3 — $d$ | 4 | $xxx-3bxx-2dx=cc-d$ |

## SECTION III.

### *De la Réduction par Multiplication.*

Les quantités fractionnelles dans une équation se changent en quantités entieres, lorsqu'on multiplie chaque terme de l'équation par les dénominateurs des fractions, selon l'axiome 3, comme dans ces *exemples.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $\frac{x}{5}=6$ |
| Donc | 2 | $x=6\times 5=30$ ; car $\frac{x}{5}\times 5=\frac{5x}{5}=x$. |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $3x=\frac{dc}{2b}$ |
| 1 $\times$ $2b$ | 2 | $6bx=dc$ |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $x=\frac{dd}{x-b}$ |
| 1 $\times$ $x-b$ | 2 | $xx-bx=dd$. |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $\frac{xx}{b} + c + f = \frac{da}{x}$ |
| $1 \times b$ | 2 | $xx + bc + bf = \frac{dab}{x}$ |
| $2 \times x$ | 3 | $xxx + bcx + bfx = dab.$ |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $\frac{xxx}{xx - bb} = \frac{bx - bb}{x + b}$ |
| $1 \times xx - bb$ | 2 | $xxx = \frac{bxxx - bbxx - bbbx + bbbb}{x + b}$ |
| $1 \times x + b$ | 3 | $xxxx + bxxx = bxxx - bbxx - bbbx + bbbb.$ |

## SECTION IV.

### *De la Réduction par Division.*

Lorsqu'une quantité (connue ou inconnue) se trouve dans chaque terme d'une équation ; si l'on divise toute l'équation par cette quantité, on la réduira à ses moindres termes par l'*axiome* 4, comme dans ces *exemples*.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $bxx + bcx = bcd$ | Soit | 1 | $xx = 7x$ |
| $1 \div b$ | 2 | $xx + cx = cd$ | $1 \div x$ | 2 | $x = 7$ |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $ffxx + ffcxx - ffx = ffdx + ffddx$ |
| $1 \div ff$ | 2 | $xx + cxx - x = dx + ddx$ |
| $2 \div x$ | 3 | $x + cx - 1 = d + dd$ |

Ou lorsque la quantité inconnue est multipliée (ou jointe) par une quantité connue, on divise toute l'équation par la quantité connue, afin que l'inconnue soit dégagée, comme dans ces *Exemples*.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $bx - cx = d$ | Soit | 1 | $cxx - dxx = cd - dd$ |
| $1 \div b - c$ | 2 | $x = \frac{d}{b - c}$ | $1 \div c - d$ | 2 | $ax = \frac{cd - dd}{c - d} = d.$ |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $bbx^3 - 2b^2x^2 = bdx + cbx$ |
| $1 \div bx$ | 2 | $bxx - 2bx = d + c$ |
| $2 \div b$ | 3 | $xx - 2x = \frac{d+c}{b}$. |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $49dxx + 42xx = 7bcx + 21cx$ |
| $1 \div 7$ | 2 | $7dxx + 6xx = bcx + 3cx$ |
| $2 \div x$ | 3 | $7dx + 6x = bc + 3c$ |
| $3 \div 7d + 6$ | 4 | $x = \frac{bc + 3c}{7d + 6}$. |

## SECTION V.

### *De la Réduction par Involution.*

Lorſqu'il y a une équation entre des quantités ſourdes homogenes ou ſemblables, il faut effacer les ſignes radicaux des quantités, & elles deviendront rationnelles, comme dans ces *Exemples.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $\sqrt{x} = \sqrt{d+c}$ |
| $1 \odot 2$ | 2 | $x = d+c$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $\sqrt[3]{xx} = \sqrt[3]{db+bc}$ | par la *ſect.* 4. du *chap.* 3. |
| $1 \odot 3$ | 2 | $xx = db+bc$ | |

Ou ſi un côté de l'équation eſt compoſé de quantités ſourdes, & que l'autre ſoit rationnel, il faut élever les quantités rationnelles à la même puiſſance (ou degré) que l'expoſant de la quantité ſourde, & en ôter le ſigne radical, comme dans ces *Exemples.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $\sqrt{x} = 6$ | Soit | 1 | $\sqrt{x} = b + c$ |
| $1 \odot 2$ | 2 | $x = 36$ | $1 \odot 2$ | 2 | $x = bb + 2bc + c$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $\sqrt[3]{xx - bx} = d$ | Soit | 1 | $\sqrt[5]{xx} = 7$ |
| $1 \odot 3$ | 2 | $xx - bx = d^3$ | $1 \odot 5$ | 2 | $xx = 16807$ |

## SECTION VI.

### *De la Réduction par Evolution.*

Lorsqu'une puissance simple de la quantité inconnue est d'un côté d'une équation, il faut extraire la racine des deux côtés de l'équation, selon que l'exposant de cette puissance l'indique, & leurs racines seront égales, comme dans ces *Exemples*.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $xx = 36$ | Soit | 1 | $xxx = 27$ |
| 1 ▱ 2 | 2 | $x = \sqrt{36} = 6$ | 1 ▱ 3 | 2 | $x = \sqrt[3]{27} = 3$, &c. |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $xx = bb - dd$ |
| 1 ▱ 2 | 2 | $x = \sqrt{bb - dd}$ |

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $xxx = b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3$ |
| 1 ▱ 3 | 2 | $x = b + c$ |

Ou si une puissance composée de la quantité inconnue est d'un côté de l'équation (ensorte qu'elle ait une vraie racine de son espece), il faut extraire la racine des deux côtés de l'équation pour la réduire à ses moindres termes, comme dans ces *Exemples*.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $xx + 2bx + bb = dd$ | $xx - 2bx + bb = ddcc$ |
| 1 ▱ 2 | 2 | $x + b = d$ | $x - b = dc$. |

Voici quelques exemples d'équations dégagées, où l'on a employé indifféremment toutes les réductions précédentes, selon l'occasion.

### EXEMPLE I.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $\frac{xx + c - d}{4} = \frac{g - xx}{b}$. A quoi $x$ est-il égal ? |
| $1 \times 4$ | 2 | $xx + c - d = \frac{4g - 4xx}{b}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $2 \times b$ | 3 | $bxx + bc - bd = 4g - 4xx$ |
| $3 + 4xx$ | 4 | $bxx + 4xx + bc - bd = 4g$ |
| $4 + bd$ | 5 | $bxx + 4xx + bc = 4g + bd$ |
| $5 - bc$ | 6 | $bxx + 4xx = 4g + bd - bc$ |
| $6 \div b + 4$ | 7 | $xx = \frac{4g + bd - bc}{b + 4}$ |
| 7 ▭ 2 | 8 | $x = \sqrt{\frac{4g + bd - bc}{b + 4}}$, comme il étoit requis. |

## EXEMPLE II.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $\frac{x + 354}{x} = \frac{3x}{354 - x}$. Quelle est la val. de $x$? |
| $1 \times x$ | 2 | $x + 354 = \frac{3xx}{354 - x}$ |
| $2 \times \overline{354 - x}$ | 3 | $125316 - xx = 3xx$ |
| $3 + xx$ | 4 | $4xx = 125316$ |
| $4 \div 4$ | 5 | $xx = 31329$ |
| 5 ▭ 2 | 6 | $x = \sqrt{31329} = 177$, valeur requ. de $x$. |

## EXEMPLE III.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $\sqrt{\frac{xx + 3bb}{4}} - \sqrt{\frac{xx - 3bb}{4}} = \sqrt{\frac{bxx}{c}}$ q. est $x$? |
| 1 ⊙ 2 | 2 | $\left\{ \begin{array}{l} \frac{xx + 3bb}{4} - 2\sqrt{\frac{xx - 3bb}{4}} \times \sqrt{\frac{xx + 3bb}{4}} \\ + \frac{xx - 3bb}{4} = \frac{bxx}{c} \end{array} \right.$ |
| C'est-à-dire | 3 | $\frac{xx}{2} - \sqrt{\frac{x^4 - 9b^4}{4}} = \frac{bxx}{c}$. |
| Car | | $\frac{xx + 3bb}{4} + \frac{xx - 3bb}{4} = \frac{2xx}{4} = \frac{xx}{2}$ |
| Et | | $2\sqrt{\frac{xx + 2b}{4}} = \sqrt{\frac{4xx + 12bb}{4}} = \sqrt{xx + 3bb}$. |
| Et | | $\sqrt{xx + 3bb} \times \sqrt{\frac{xx - 3bb}{4}} = \sqrt{\frac{x^4 - 9b^4}{4}}$ |
| $3 + \sqrt{}$ &c. | 4 | $\frac{xx}{2} = \frac{bxx}{c} + \sqrt{\frac{x^4 - 9b^4}{4}}$ |
| $4 - \frac{bxx}{c}$ | 5 | $\frac{xx}{2} - \frac{bxx}{c} = \sqrt{\frac{x^4 - 9b^4}{4}}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 5 $\odot$ 2 | 6 | $\frac{x^4}{4} - \frac{bx^4}{c} + \frac{bbx^4}{cc} = \frac{x^4 - 9b^4}{4}$ |
| 6 $+ \frac{bx^4}{c}$ | 7 | $\frac{x^4}{4} + \frac{bbx^4}{cc} = \frac{x^4 + 9b^4}{4} + \frac{bx^4}{c}$ |
| 7 $+ \frac{9b^4}{4}$ | 8 | $\frac{bbx^4}{cc} + \frac{9b^4}{4} = \frac{bx^4}{c}$ |
| 8 $\div b$ | 9 | $\frac{bx^4}{cc} + \frac{9b^3}{4} = \frac{x^4}{c}$ |
| 9 $\times cc$ | 10 | $bx^4 + \frac{9ccb^3}{4} = cx^4$ |
| 10 $\times 4$ | 11 | $4bx^4 + 9ccb^3 = 4cx^4$ |
| 11 $- 4bx^4$ | 12 | $9ccb^3 = 4cx^4 - 4bx^4$ |
| 12 $\div \overline{4c - 4b}$ | 13 | $x^4 = \frac{9ccb^3}{4c - 4b}$; car $\overline{4c - 4b} \times x^4 = 4cx^4 - 4bx^4$ |
| 13 ▱ 2 | 14 | $xx = \sqrt{\frac{9ccb^3}{4c - 4b}}$ |
| 14 ▱ 2 | 15 | $x = \sqrt{\frac{9ccb^3}{4c - 4b}}$, valeur requiſe. |

Par le moyen de ces réductions ( bien appliquées ) on dégage la quantité inconnue ( $x$ ) ou ſes puiſſances, & on la fait venir ſeule à un côté de l'équation. Si la quantité inconnue ( $x$ ) ſe trouve égale à celles qui ſont connues, la queſtion eſt réſolue, comme dans le premier *exemple* des *ſect.* 1 & 2.

Si quelque puiſſance ſimple de la quantité inconnue ($x$) ſe trouve égale à celles qui ſont connues, la racine reſpective de ces quantités connues donne la ſolution, comme dans les quatre premiers exemples de la ſect. 6, &c.

Mais lorſque les puiſſances de la quantité inconnue ſont mêlées avec leur racine, comme $xx + bx = dd$, &c. ou qu'elles ſont compoſées de différentes puiſſances, comme $xxx + bxx = dd$, &c. on les nomme alors *équations affectées*, & elles exigent d'autres méthodes pour les réſoudre, ou pour trouver la valeur de $x$; comme on le verra bien-tôt plus au long.

# CHAPITRE VI.

## *Des Quantités proportionnelles, tant Arithmétiques que géométriques, & harmoniques.*

On peut aisément appliquer à toutes les suites des quantités semblables ou homogenes, ce que nous avons dit des nombres en progression arithmétique dans le *chap.* 6. de la *Part.* 1.

## SECTION PREMIERE.

### *Des quantités en progression Arithmétique.*

Les quantités qui commencent leur suite par zero, soit en croissant ou en décroissant, sont dans la progression la plus simple ou la plus naturelle, comme

$$\begin{cases} 0 : a : 2a : 3a : 4a : 5a : 6a : \text{\&c. en croissant.} \\ 0 : -a : -2a : -3a : -4a : -5a : -6a, \text{\&c. en décroiss.} \end{cases}$$

Ou en général prenant $a$ pour le premier terme de la progression, & $e$ pour l'excès ou différence commune, nous aurons

$$\begin{cases} a : a+e : a+2e : a+3e : a+4e : a+5e : a+6e, \text{\&c.} \\ a : a-e : a-2e : a-3e : a-4e : a \times 5e : a-6e, \text{\&c.} \end{cases}$$

Dans la premiere de ces suites, il est évident que s'il n'y a que trois termes, la somme des extrêmes est double de celle du moyen, comme dans ceux-ci, $0 : a : 2a :$ ou $a : 2a : 3a :$ ou $2a : 3a : 4a :$ &c; car $2a + 0 = a + a :$ ou $a + 3a = 2a + 2a$, &c.

De même, dans la seconde suite, tant croissante que décroissante, il est évident que si les termes sont $a : a+e : a+2e$, &c. croissans, la somme des extrêmes $a+a+2e$ est double du moyen $a+e$, ou s'ils sont $a : a-e :$

$a - 2e$, &c. décroiſſans, la ſomme des extrêmes $a + a - 2e$, ou $2a - 2e$ eſt double du moyen $a - e$, & ainſi de tous les autres termes de trois en trois.

En ſecond lieu, s'il y a quatre termes, la ſomme des deux extrêmes ſera égale à la ſomme des deux moyens, comme dans ceux ci, $a : a + e : a + 2e : a + 3e$ de la ſuite croiſſante, on voit que $a + a + 3e = a + e + a + 2e$. De même dans ceux-ci, $a : a - e : a - 2e : a - 3e$ de la ſuite décroiſſante; on voit que $a + a - 3e = a - e + a - 2e$, &c. dans tous les termes de quatre en quatre.

Par conſéquent, quelque grand que ſoit le nombre des termes de la ſuite, la ſomme de deux extrêmes ſera toujours égale à celle de deux moyens, également éloignés de ces extrêmes, comme dans ceux-ci, $a : a + e : a + 2e : a + 3e : a + 4e : a + 5e$, &c. on trouve $a + a + 5e = a + e + a + 4e = a + 2e + a + 3e$, &c.; & ſi le le nombre des termes eſt impair, la ſomme de deux extrêmes ſera double du terme moyen, &c. comme dans le *corol.* 1. *chap.* 6. ci-devant cité.

## COROLLAIRE I.

De là il ſuit ( & il eſt fort aiſé de le comprendre ) que ſi l'on multiplie la ſomme de deux extrêmes par le nombre de tous les termes de la ſuite, le produit ſera double de la ſomme de toute la ſuite.

Mais pour réſoudre plus facilement toutes les queſtions qui dépendent de ces progreſſions,

Soit
- $a$ = au *premier terme*, comme ci-devant.
- $y$ = au *dernier terme*.
- $e$ = à l'*excès commun*, &c. comme ci-devant.
- $N$ = au *nombre de tous les termes*.
- $S$ = à la *ſomme de toute la ſuite*, ou *de tous les termes*.

Nous aurons $\overline{a + y} \times N = 2S$, par le corollaire précédent, c'eſt-à-dire $Na - Ny = 2S$, & par conſéquent $\frac{Na + Ny}{2} = S$, ſomme de toute la ſuite, quelque grand que ſoit le nombre des termes.

Troisiémement, on s'apperçoit aisément dans ces suites, que la différence commune ($e$) est ajoutée au dernier terme de la suite, aussi souvent qu'il y a des termes, excepté le premier, c'est-à-dire que le premier terme ($a$) n'a point de différence qui lui soit ajoutée; mais le dernier terme contient autant de fois $e$ ajouté, qu'il est éloigné du premier; par conséquent la différence entre les deux extrêmes n'est que la différence commune ($e$) multipliée par le nombre des termes, moins l'*unité* ou 1, c'est-à-dire $\overline{N-1} \times e = y - a$, différence entre les deux extrêmes, ou $Ne - e = y - a$.

### COROLLAIRE II.

De là il suit que si l'on divise la différence entre les deux extrêmes par le nombre des termes moins 1, le quotient sera la différence commune de la suite, c'est-à-dire $\frac{y-a}{N-1} = e$.

Maintenant par le moyen de ces deux corollaires, si trois des cinq quantités ($a$, $y$, $e$, $N$, $S$) sont données, on trouvera aisément les deux autres, en cette maniere :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Par le* 1[r] | 1 | $\frac{Na+Ny}{2} = S$ | par les deux corollaires. |
| *Par le* 2[d] | 2 | $\frac{y-a}{N-1} = e$ | |
| $2 \times \overline{N-1}$ | 3 | $y - a = Ne - e$ | |
| $3 + e$ | 4 | $y - a + e = Ne$ | |
| $4 \div e$ | 5 | $\frac{y-a+e}{e} = N$, *nombre des termes.* | |
| $1 \times \overline{2}$ | 6 | $Na + Ny = 2S$ | |
| $6 - Na$ | 7 | $Ny = 2S - Na$ | |
| $7 \div N$ | 8 | $\frac{2S-Na}{N} = y$, *dernier terme.* | |
| $6 - yN$ | 9 | $Na = 2S - Ny$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $9 \div N$ | 10 | $\frac{2S - Ny}{N} = a$, *premier terme.* |
| $6 \div \overline{a+y}$ | 11 | $\frac{2S}{a+y} = N$, *nombre des termes.* |
| 5 & 11 | 12 | $\frac{y - a + e}{e} = \frac{2S}{a+y}$, par l'*axiome* 5. |
| $12 \times \overline{a+y}$ | 13 | $\frac{yy - aa}{e} + a + y = 2S$ |
| $13 \div 2$ | 14 | $\frac{yy - aa}{2e} + \frac{a+y}{2} = S$, *somme* de toute la suite. |
| $14 \times 2e$ | 15 | $yy - aa + ae + ye = 2Se$ |
| $15 - ae$ | 16 | $yy - aa + ye = 2Se - ae$ |
| $16 - ye$ | 17 | $yy - aa = 2Se - ae - ye$ |
| $17 \div 2S$, &c | 18 | $\frac{yy - aa}{2S - a - y} = e$, *difference commune.* |
| $3 + a$ | 19 | $Ne - e + a = y$, *dernier terme.* |
| 19 & $e$ | 20 | $Ne + a = y + e$ |
| $20 - Ne$ | 21 | $y + e - Ne = a$, *premier terme.* |

&c.

On cherchera de la même maniere l'une de ces cinq quantités ( $a$, $e$, $y$, $N$, $S$ ) par d'autres voies, c'est-à-dire qu'en variant ou comparant ces équations les unes avec les autres, on trouvera de nouvelles équations avec d'autres quantités données. Je les supprime pour donner lieu à la pratique des commençans.

## SECTION II.

### *Des Quantités en proportion géométrique.*

On a déja défini dans la *sect.* 2. *chap.* 6. *Part.* 1re la *proportion géométrique continue*, & ce qu'on y a dit sur les *nombres* en $\div\!\!\div$ peut aisément s'appliquer à toutes sortes de quantités homogenes, qui sont en $\div\!\!\div$.

La ſuite la plus naturelle & la plus ſimple des quantités en proportion géométrique, eſt celle qui commence par l'*unité* ou 1.

Comme 1, $a$, $aa$, $aaa$, $aaaa$, $a^5$, $a^6$, &c. en $\div\!\!\div$;

Car $1 : a :: a : aa :: aa : aaa :: aaa : aaaa$, &c.

Ou $a$, $b$, $\frac{bb}{a}$, $\frac{bbb}{aa}$, $\frac{bbbb}{aaa}$, $\frac{b^5}{a^4}$, &c. ſont des termes en $\div\!\!\div$

Car $a : b :: b : \frac{bb}{a} :: \frac{bb}{a} : \frac{bbb}{aa} :: \frac{bbb}{aa} : \frac{b^4}{a^3} :: \frac{b^4}{a^3} : \frac{b^5}{a^4}$, &c.

c'eſt-à-dire, lorſque tous les termes moyens entre deux extrêmes ſont également conſéquens & antécédens, cette ſuite eſt en proportion géométrique continue.

Donc dans toute ſuite de quantités en $\div\!\!\div$ tous les termes, excepté le dernier, ſont antécédens, & tous, excepté le premier, ſont conſéquens.

Mais en général prenant $a$ pour le premier terme d'une ſuite, & $e$ pour la raiſon, c'eſt-à-dire pour le *multiplicateur* ou *diviſeur* commun,

on aura $a$, $ae$, $aee$, $aeee$, $aeeee$, $ae^5$, $ae^6$, &c. en $\div\!\!\div$,

ou $a$, $\frac{a}{e}$, $\frac{a}{ee}$, $\frac{a}{eee}$, $\frac{a}{eeee}$, $\frac{a}{e^5}$, &c. ſont en $\div\!\!\div$ décroiſſante.

Car $a : ae :: ae : \frac{aaee}{a} = aee$, &c.

Et $a : \frac{a}{e} :: \frac{a}{e} : \frac{aa}{aee} = \frac{a}{ee}$, &c.

1°. Il eſt évident que dans chacune de ces ſuites, ſi trois quantités ſont en $\div\!\!\div$, le rectangle des deux extrêmes ſera égal au quarré du moyen, comme dans celle-ci : $a$, $ae$, $aee$; nous avons $a \times aee = ae \times ae = aaee$, &c.

ou dans celle-ci, $a$, $\frac{a}{e}$, $_{ee}$, nous avons $a \times \frac{a}{ee} = \frac{aa}{ee}$, &c.

2°. Si quatre quantités ſont en $\div\!\!\div$, le rectangle ſous les extrêmes ſera égal au rectangle ſous les moyens, comme dans celles-ci, $a$, $ae$, $aee$, $aeee$; nous avons $a \times ae^3 = ae \times aee$, ou $a \frac{a}{e}$, $\frac{a}{ee}$, $\frac{a}{eee}$; nous avons $a \times \frac{a}{eee} = \frac{aa}{eee}$. &c.

Par conséquent quelque grand que soit le nombre des termes dans une suite de $\div\div$, le rectangle des extrêmes sera toujours égal à celui des deux moyens, également éloignés de ces extrêmes, comme dans ceux ci, $a$, $ae$, $aee$, $aeee$, $aeeee$, $ae^5$, &c; on voit que $ae^5 \times a = ae^4 \times ae = aeee \times aee = aae^5$.

3°. Quelque grand que soit le nombre des termes en $\div\div$, on aura toujours, comme chacun des antécédens est à son conséquent, ainsi la somme de tous les antécédens est à la somme de tous les conséquens ; comme dans celles-ci $\begin{cases} a,\ ae,\ aee,\ aeee,\ aeeee,\ ae^5, \text{ \&c. } \textit{croissans.} \\ a,\ \frac{a}{e},\ \frac{a}{ee},\ \frac{a}{eee},\ \frac{a}{eeee},\ \frac{a}{e^5}, \text{ \&c. } \textit{décroissans.} \end{cases}$

$a : ae :: a + ae + aee + ae^3 + ae^4 : ae + aee + ae^3 + ae^4 + ae^5$, ou $a : \frac{a}{e} :: a + \frac{a}{e} + \frac{a}{ee} + \frac{a}{e^3} + \frac{a}{e^4} : \frac{a}{e} + \frac{a}{ee} + \frac{a}{e^3} + \frac{a}{e^4} + \frac{a}{e^5}$; car $a \times \overline{ae + aee + ae^3 + ae^4 + ae^5} = ae \times \overline{a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4}$, c'est-à-dire le rectangle des extrêmes est égal au rectangle des moyens, par l'art. 2. de cette sect.

*Nota.* La raison d'une suite en $\div\div$ croissante, se trouve en divisant un des conséquens par son antécédent, en cette maniere : $a$ ) $ae$ ( $e$, ou $ae$ ) $aee$ ( $e$, &c.

Mais si la suite est décroissante, la raison se trouve en divisant un des antécédens par son conséquent, en cette maniere : $\frac{a}{e}$ ) $a$ ( $e$, ou $\frac{a}{ee}$ ) $\frac{a}{e}$ ( $e$, &c.

COROLLAIRE.

On peut, de ce qu'on vient de dire, tirer des équations qui résoudront toutes les questions que l'on propose ordinairement sur les quantités en proportion géométrique $\div\div$. Pour cela soit

$\left\{\begin{array}{l} a = \textit{premier terme} \\ e = \textit{la raison commune} \\ y = \textit{dernier terme} \\ S = \textit{somme} \text{ de tous les } \textit{termes} \end{array}\right\}$ comme ci-devant.

Donc $S - y =$ *somme* de tous les *antécédens*.
Et $S - a =$ *somme* de tous les *conséquens*.

| | | |
|---|---|---|
| *Analogie* | 1 | $a : ae :: S - y : S - a$, par l'art. 3. de cette sect. |
| 1 ∵ | 2 | $Sa - aa = aeS - aey$ |
| $2 \div a$ | 3 | $S - a = eS - ey$ |
| $3 + ey$ | 4 | $S + ey - a = eS$ |
| $4 - S$ | 5 | $ey - a = eS - S$ |
| $5 \div \overline{e - 1}$ | 6 | $\frac{ye - a}{e - 1} = S$, *somme* de toute la *suite*. |
| $3 \div \overline{S - y}$ | 7 | $\frac{S - a}{S - y} = e$, *raison commune*. |
| $5 + a$ | 8 | $ey = eS - S + a$ |
| $8 \div e$ | 9 | $\frac{eS + a - S}{e} = y$, *dernier terme*. |
| $4 + a$ | 10 | $S + ey = eS + a$ |
| $10 - eS$ | 11 | $S + ey - eS = a$, *premier terme*. |

*Nota*. Le signe ∵ qui est à la marge du second cas, est à la place de *donc*, & marque que le rectangle des deux extrêmes dans le premier cas est égal au rectangle des moyens, & ainsi pour toutes les proportions.

---

## SECTION III.

### *De la Proportion harmonique.*

Il y a proportion harmonique, lorsque de trois quantités (ou plutôt de trois nombres) la premiere est en même raison à la troisiéme, que la différence entre la premiere & la seconde est à la différence entre la seconde & la troisiéme, comme dans celles qui suivent.

Soient $a, b, c$ en proportion harmonique.

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $a : c :: b - a : c - b$ |
| 1 ∵ | 2 | $cb - ca = ac - ba$ |
| $2 + ca$ | 3 | $cb = 2ac - ba$ |
| $3 \div \overline{2c - b}$ | 4 | $\frac{cb}{2c - b} = a$, *premier terme*. |

| | | |
|---|---|---|
| $3 + ba$ | 5 | $2ac = cb + ba$ |
| $5 \div \overline{c+a}$ | 6 | $\frac{2ac}{c+a} = b$, *second terme.* |
| $5 - cb$ | 7 | $2ac - cb = ba$ |
| $7 \div \overline{2a-c}$ | 8 | $\frac{ba}{2a-c} = c$, *troisiéme terme.* |

S'il y a quatre termes en proportion harmonique, le premier est en même raison au quatriéme que la différence entre le premier & le second est à la différence entre le troisiéme & le quatriéme.

Soient $a, b, c, d$ les quatre termes, &c.

| | | |
|---|---|---|
| on aura | 1 | $a : d :: b - a : d - c$ |
| 1 ⁚ | 2 | $ad - ca = bd - da$ |
| $2 + da$ | 3 | $db = 2da - ca$ |
| $3 \div \overline{2d-c}$ | 4 | $\frac{db}{2d-c} = a$ |
| $3 \div d$ | 5 | $b = \frac{2da-ca}{d}$ |
| $3 + ca$ | 6 | $db + ca = 2da$ |
| $6 - db$ | 7 | $ca = 2da - db$ |
| $7 \div a$ | 8 | $c = \frac{2da-db}{a}$ |
| $7 \div \overline{2a-b}$ | 9 | $\frac{ca}{2a-b} = d.$ |

## CHAPITRE VII.

### *De la Proportion qui n'est pas continue, & comment on change les équations en analogies, &c.*

ON a déja défini dans le *chap.* 7. *Part.* 1re la proportion non continue, ou régle de Trois en nombres; & tout ce que nous en avons dit peut s'appliquer à toutes les quantités homogenes, comme celle des lignes aux lignes, &c.

## SECTION PREMIERE.

Si quatre quantités ( ſoit *lignes* ou *ſurfaces* , ou *ſolides* ) ſont proportionnelles, le rectangle compris ſous les extrêmes eſt égal au rectangle compris ſous les deux moyens. Par exemple, ſoient $a$, $b$, $c$, $d$ quatre quantités homogenes en proportion, ou que $a : b :: c : d$. Je dis que $ad = bc$; car ſoit $b = 2a$, on aura $d = 2c$, & $a : 2a :: c : 2c$, ou la raiſon eſt 2; mais $a \times 2c = 2a \times c$, ou $2ca = 2ac$. Suppoſons encore $b = 3a$, on aura $d = 3c$, & $a : 3a :: c : 3c$, ou la raiſon eſt 3; mais $a \times 3c = 3a \times c$, ou $3ca = 3ac$.

Mais en général prenant $e$ pour la raiſon de la proportion, ou faiſant $b = ae$, on aura $d = ce$, & $a : ae :: c : ce$; mais $a \times ce = ae \times c$, ou $ace = aec$; par conſéquent $ad = bc$; ce qu'il falloit prouver.

De là il ſuit que ſi de quatre quantités proportionnelles, trois ſont données, la quatriéme ſe trouve aiſément, en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $a : b :: c : d$. Donc |
| 1 ∵ | 2 | $ad = bc$, comme ci-devant. |
| $2 \div d$ | 3 | $a = \frac{bc}{d}$ |
| $2 \div c$ | 4 | $\frac{ad}{c} = b$ |
| $2 \div b$ | 5 | $c = \frac{ad}{b}$ |
| $2 \div a$ | 6 | $d = \frac{bc}{a}$ |
| $2 \div bd$ | 7 | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ } * |
| ou $2 \div ac$ | 8 | $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ } * |

* *Nota*. C'eſt ainſi qu'Euclide dans ſon 5e Livre exprime la raiſon des quantités proportionnelles. La raiſon de $a$ à $b$ eſt $\frac{a}{b}$.

Si quatre quantités sont proportionnelles, elles le seront aussi par *alternation*, *inversion*, *composition*, *division*, *conversion*, & *mêlange*, c'est-à-dire

| | | |
|---|---|---|
| si | 1 | $a:b::c:d$, sont en proportion directe, comme ci-devant; |
| donc | 2 | $a:c::b:d$ alternativement; car $ad=bc$, |
| & | 3 | $b:a::d:c$ en renversant; car $ad=bc$. |
| De même | 4 | $a+b:b::c+d:d$ en composant. |
| 4 $\because$ | 5 | $da+bd=bc+bd$, c'est-à-dire, $ad=bc$, comme auparavant, |
| ou | 6 | $a+c:c::b+d:d$, en composant alternativement. |
| 6 $\because$ | 7 | $ad+cd=bc+cd$, c'est-à-dire $ad=bc$. |
| De plus | 8 | $a-b:b::c-d:d$ en divisant. |
| 8 $\because$ | 9 | $ad-bd=bc-bd$, c'est-à-dire $ad=bc$. |
| ou | 10 | $a-c:c::b-d:d$, en divisant alternativement. |
| 10 $\because$ | 11 | $ad-dc=bc-dc$, c'est-à-dire $ad=bc$, |
| & | 12 | $a:b\pm a::c:d\pm c$, en renversant & composant, ou divisant. |
| 12 $\because$ | 13 | $ad\pm ac=bc\pm ac$, c'est-à-dire $ad=bc$. |
| Enfin | 14 | $a+b:a-b::c+d:c-d$ en mêlant. |
| 14 $\because$ | 15 | $ac-ad+bc-bd=ac+ad-bc-bd$, |
| 15 $\pm$ | 16 | $2bc=2ad$, c'est-à-dire $ad=bc$, comme au commencement. |

*Nota.* Ce qu'on a fait ici sur les quantités entieres en proportion simple, peut se faire aisément sur les quantités fractionnelles & sourdes, &c.

Par exemple, si $\frac{ab}{c}:\frac{d-c}{f}::\frac{d+c}{c}$ à un quatriéme terme requis, nous aurons $\frac{dd-cc}{cf}$, rectangle des moyens, lequel étant divisé par le premier extrême $\frac{ab}{c}$, on aura $\frac{ab}{c}$) $\frac{dd-cc}{cf}$ ($\frac{ddc-ccc}{abfc}=\frac{dd-cc}{abf}$, quatriéme terme; ou si $b:\sqrt{bd+bc}::\sqrt{bd+bc}$: à un quatriéme terme, on aura $\sqrt{bd+bc}\times\sqrt{bd+bc}=bd+bc$, rectangle des moyens, & $b$) $bd+bc$ ( $d+c$,

( $d+c$, quatriéme terme, c'est-à-dire $b : \sqrt{bd+bc} :: \sqrt{bd+bc} : d+c$, &c.

---

## SECTION II.

### *De la Proportion doublée & triplée.*

Les proportions dont on a parlé dans la derniere section ne s'entendent que des *lignes* comparées aux *lignes*, des *surfaces* aux *surfaces*, ou des *solides* aux *solides*, c'est-à-dire lorsque chaque quantité est comparée avec celle de son espece, ce qui s'appelle *proportion simple*.

Mais lorsqu'on compare les lignes aux surfaces ou aux solides, ces comparaisons se distinguent des premieres par les noms de *proportions doublées, triplées*, &c; ensorte que les proportions doublées & triplées doivent s'entendre dans un sens tout différent des *proportions doubles & triples*, &c. qui sont seulement celles de 2, 3, &c. à 1; au lieu que les proportions doublées, triplées, &c. sont celles de $aa$, $aaa$, &c. à 1; ou si la proportion simple est celle de $a$ à $b$, dont la raison ou l'exposant est $\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$, selon l'expression d'*Euclide*;

alors $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} \text{ sera l'exposant de la doublée,} \\ \& \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3} \text{ sera celui de la triplée} \end{array} \right\}$ de $\frac{a}{b}$ &c.

Et s'il y a trois, quatre, ou plusieurs quantités en $\div\div$, comme 1, $a$, $aa$, $aaa$, $a^4$, $a^5$, &c. ( ainsi que dans la premiere suite, *sect.* 2. du dernier chapitre ); alors celle de la premiere à la troisiéme, quatriéme, & cinquiéme, &c. ( ou de 1 à $aa$, $aaa$, $a^4$, $a^5$ ) sera doublée, triplée, quadruplée, &c. de la premiere à la seconde ( ou de 1 à $a$ ), & celle de la troisiéme, quatriéme, cinquiéme, est doublée, triplée, &c. de celle de la seconde à la premiere ( de $a$ à 1 ) en renversant. Mais on comprendra

mieux la nature de ces *proportions*, lorſque nous les appliquerons à la pratique, & que nous les éclaircirons par des figures géométriques ci-après.

## SECTION III.

### *Comment on change les Équations en analogies.*

Il eſt aiſé de comprendre par la premiere ſection de ce chapitre comment on peut diſſoudre les *équations*, ou les changer en analogies ou proportions; car ſi le rectangle de deux (ou pluſieurs) quantités eſt égal au rectangle de deux (ou pluſieurs) quantités; ces quatre (ou pluſieurs) quantités ſont proportionnelles, c'eſt-à-dire ſi $ab = dc$, on aura $a : c :: d : b$, ou $c : a :: b : d$, &c.

De là ſuit cette *régle* générale pour changer les *équations* en *analogies*.

REGLE.

*Diviſez l'un des côtés de l'équation donnée (ſi cela ſe peut) en deux parties ou facteurs, tels qu'étant multipliés enſemble, ils produiſent de nouveau ce côté; & faites de ces deux facteurs les deux extrêmes. Diviſez de même (s'il eſt poſſible) l'autre côté de l'équation, & ſes deux parties ou facteurs ſeront les deux moyens.*

Par exemple, ſoit $ab + ad = bd$, nous aurons $a : b :: d : b + d$, ou $b : a :: b + d : d$, &c. ou ôtant $ad$ des deux côtés de l'équation, on aura $ab = bd - ad$, & $a : d :: b - a : b$, ou $b : d :: b - a : a$, &c.

De même ſoit $aa + 2ae = 2by + yy$. Ici $a$ & $a + 2e$ ſont les deux facteurs du premier membre de cette équation, parce que $\overline{a + 2e} \times a = aa + 2ae$, & $y$, avec $2b + y$ ſont les deux facteurs de l'autre membre.

Donc $a : y :: 2b + y : a + 2e$,
ou $2b + y : a + 2e :: a : y$, &c.

Lorſqu'un côté d'une équation peut ſe diviſer en deux facteurs, comme ci-devant, & que l'autre côté ne peut

pas se diviser de même, il faut prendre la racine quarrée de ce côté pour en faire les deux *extrêmes* ou les deux *moyens*.

Par exemple, soit $bc + bd = da + g$, on aura $b : \sqrt{da + g} :: \sqrt{da + g} : c + d$, ou $\sqrt{da + g} : b :: c + d : \sqrt{da + g}$, &c.

# CHAPITRE VIII.

## *De la substitution & de la solution des Equations quadratiques.*

## SECTION PREMIERE.

### *De la Substitution.*

SI l'on met de nouvelles quantités, qui n'entrent pas dans l'état de la question, à la place de celles qui s'y trouvent engagées; on appelle cela *substitution*.

Par exemple, si à la place de $\sqrt{bc - dc}$ j'écris $z$ ou une autre lettre, c'est-à-dire si je fais $z = \sqrt{bc - dc}$.

De même soit $xx + bx - cx + dx = dc$, mettons $s$ à la place de $b - c + d$, ou une autre lettre qui ne soit pas engagée dans la question, faisant $s = b - c + d$, nous aurons $xx \mp sx = dc$, c'est-à-dire si $c$ est plus grand que $b + d$, on aura $xx - sx = dc$, & si $b + d$ est plus grand que $c$, on aura $xx + sx = dc$.

Et l'on verra que cette méthode de substituer ou de supposer de nouvelles quantités à la place des autres, est très-utile en bien des occasions, pour rendre quelques opérations qui suivent dans la question plus aisées, & souvent plus courtes qu'elles n'auroient été sans cette substitution, comme on le verra dans quelques questions qui seront proposées dans la suite de ce Traité.

Et lorsque les opérations, ou les quantités substituées

qui ont été utiles, sont achevées, selon que la question l'exige, il faut alors reprendre les premieres quantités, & les rétablir dans l'équation à la place des quantités substituées ; c'est ce qu'on appelle restitution, comme on le verra dans la suite.

---

## SECTION II.

### *Solution des Équations quadratiques, ou du second degré.*

Lorsque la quantité requise est mêlée dans une égalité avec les quantités connues, & qu'elle n'est élevée d'un côté de l'équation qu'à deux puissances différentes, dont les exposans sont doubles l'un de l'autre ; ces équations se nomment *équations quadratiques affectées*, ou *équations du second degré*, & elles peuvent avoir trois formes, ou trois cas.

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. cas. } xx + 2bx = dc \\ \text{2. cas. } xx - 2bx = dc \\ \text{3. cas. } 2bx - xx = dc \end{array}\right\} \ \& \ \left\{\begin{array}{l} x^4 + 2bxx = dc \\ x^4 - 2bx^2 = dc \\ 2bx^2 - x^4 = dc \end{array}\right.$$

$$\& \left\{\begin{array}{l} x^6 + 2bx^3 = dc \\ x^6 - 2bx^3 = dc \\ 2bx^3 - x^6 = dc \end{array}\right\} \& \left\{\begin{array}{l} x^8 + 2bx^4 = dc \\ x^8 - 2bx^4 = dc \\ 2bx^4 - x^8 = dc \end{array}\right\} \&c.$$

Lorsqu'il y a plus de deux termes dans ces sortes d'équations, & que la plus haute puissance de la quantité inconnue est multipliée par quelques coefficiens connus, il faut les réduire par la *division*, comme dans la sect. 4. du chap. 5. & à la place des quantités fractionnelles, qui peuvent résulter de ces divisions, il faut substituer une autre quantité doublée.

Par exemple, soit $bxx + cxx - cx - dx = dc + cb$; donc $xx - \frac{cx - dx}{b+c} = \frac{dc + cb}{b + c}$; faites $\frac{c - d}{b + c} = 2s$ ; & si vous voulez, faites $p = \frac{dc + cb}{b + c}$, vous aurez $xx - 2sx = p$ pour la nouvelle équation égale à l'autre, & préparée pour la solution.

Chacune de ces trois formes d'équations étant ainsi préparée pour la solution, peut se réduire à une simple puissance, en chassant le second ou moindre terme de la quantité inconnue ; ce qui se fait par substitution, en cette maniere : Prenez toujours la moitié du coefficient connu, & ajoutez-la (dans le premier cas) à l'inconnue, ou retranchez-la (dans le second cas), & prenez une autre lettre pour la substituer à leur somme ou à leur différence, comme vous voyez ici.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $xx + 2bx = dc$. 1er cas. |
| Prenez | 2 | $x + b = s$ |
| 2 ⊙ 2 | 3 | $xx + 2bx + bb = ss$ |
| 3 — 1 | 4 | $bb = ss - dc$ |
| 4 + $dc$ | 5 | $ss = bb + dc$ |
| 5 ▱ 2 | 6 | $s = \sqrt{bb + dc}$ |
| 2 & 6 | 7 | $x + b = \sqrt{bb + dc}$, par l'axiome 5.8 |
| 7 — $b$ | 8 | $x = \sqrt{bb + dc} - b$. |

La même.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $xx - 2bx = dc$. Second cas. |
| Prenez | 2 | $x - b = s$ |
| 2 ⊙ 2 | 3 | $xx - 2bx + bb = ss$ |
| 3 — 1 | 4 | $bb = ss - dc$ |
| 4 + $dc$ | 5 | $ss = bb + dc$ |
| 5 ▱ 2 | 6 | $s = \sqrt{bb + dc}$ |
| 2 & 6 | 7 | $x - b = \sqrt{bb + dc}$ |
| 7 + $b$ | 8 | $x = b + \sqrt{bb + dc}$. |

Dans le 3e cas, il faut ôter de la moitié du coefficient connu son facteur ou l'inconnue, en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $2bx - xx = dc$ |
| Prenez | 2 | $b - x = s$ |
| 2 ⊙ 2 | 3 | $bb - 2bx + xx = ss$ |
| 1 + 3 | 4 | $bb = ss + dc$ |
| 4 — $dc$ | 5 | $ss = bb - dc$ |

| | | |
|---|---|---|
| 5 ▱ 2 | 6 | $s = \sqrt{bb - dc}$ |
| 2 & 6 | 7 | $b - x = \sqrt{bb - dc}$ |
| 7 + $x$ | 8 | $b = x + \sqrt{bb - dc}$ |
| 8 — √, &c. | 9 | $x = b - \sqrt{bb - dc}$. |

Et cette méthode a lieu dans toutes les autres *équations* où les plus hautes puissances sont $x^4$, $x^6$, $x^8$, &c.

| | | |
|---|---|---|
| Par exemple, soit | 1 | $x^6 + 2bx^3 = dc$. *Premier cas.* |
| Supposons | 2 | $x^3 + b = s$ |
| 2 ⊙ 2 | 3 | $x^6 + 2bx^3 + bb = ss$ |
| 3 — 1 | 4 | $bb = ss - dc$ |
| 4 + $dc$ | 5 | $ss = bb + dc$ |
| 5 ▱ 2 | 6 | $s = \sqrt{bb + dc}$ |
| 2, 6 | 7 | $x^3 + b = \sqrt{bb + dc}$ |
| 7 — $b$ | 8 | $x^3 = \sqrt{bb + dc} - b$ |
| 8 ▱ 3 | 9 | $x = \sqrt[3]{\sqrt{bb + dc} - b}$. |

Il faut suivre dans tout le reste la même méthode, prenant bien garde d'ajouter ou de soustraire, selon le cas.

Mais on peut résoudre plus aisément toutes les *équations quadratiques* en achevant le quarré ; ce qui est appuyé sur la méthode d'élever au quarré une *racine binome*. (Voyez la sect. 5. chap. 1.) ; car $x + b$ étant élevé au quarré donne $xx + 2bx + bb$, & $x - b$ donne $xx - 2bx + bb$. Or il est aisé de voir que $xx + 2bx = dc$ dans le premier cas, & $xx - 2bx = dc$ dans le second cas, sont des quarrés imparfaits, à qui il ne manque que $bb$ pour les achever. Si donc on prend la moitié $b$ du coefficient, si on l'éleve au quarré, & si on l'ajoute aux deux côtés de l'équation, le côté inconnu deviendra un quarré parfait.

| | | |
|---|---|---|
| Ainsi, soit | 1 | $xx + 2bx = dc$ } Ici la moitié du *coef.* $2b$ est $b$, |
| Mais | 2 | $bb = bb$ } lequel étant quarré est $bb$. |
| 1 + 2 | 3 | $xx + 2bx + bb = dc + bb$. *Premier cas.* |
| 3 ▱ 2 | 4 | $x + b = \sqrt{dc + bb}$, comme ci-devant. |

| | | |
|---|---|---|
| De même soit | 1 | $xx - 2bx = dc$. *Second cas.* |
| Mais | 2 | $bb = bb$ |
| 1 + 2 | 3 | $xx - 2bx + bb = dc + bb$ |
| 3 ▭ 2 | 4 | $x - b = \sqrt{dc + bb}$, comme ci-devant. |

Mais dans le troisiéme *cas*, il faut changer les signes de tous les termes de l'équation, en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $2bx - xx = dc$. *Troisiéme cas.* |
| 1 ± | 2 | $xx - 2bx = -dc$ |
| Donc | 3 | $xx - 2bx + bb = bb - dc$, &c. |

Et cette méthode d'achever le quarré a lieu également dans les autres *équations* ;

| | | |
|---|---|---|
| Sçavoir, | 1 | $x^4 + 2bxx = dc$. *Premier cas.* |
| Mais | 2 | $bb = bb$, comme ci-devant. |
| 1 + 2 | 3 | $x^4 + 2bx + bb = dc + bb$ |
| 3 ▭ 2 | 4 | $xx + b = \sqrt{dc + bb}$ |
| 4 − b | 5 | $xx = \sqrt{dc + bb} - b$ |
| 5 ▭ 2 | 6 | $x = \sqrt{\sqrt{dc + bb} - b}$, & ainsi des autres. |

---

| | | |
|---|---|---|
| Ou soit | 1 | $x^6 + 2bx^3 = dc$, comme ci-devant. 1^r *cas.* |
| Et | 2 | $bb = bb$ |
| 1 + 2 | 3 | $x^6 + 2bx^3 + bb = dc + bb$ |
| 3 ▭ 2 | 4 | $x^3 + b = \sqrt{dc + bb}$ |
| 4 − b | 5 | $x^3 = \sqrt{dc + bb} - b$ |
| 5 ▭ 3 | 6 | $x = \sqrt[3]{\sqrt{dc + bb} - b}$ |

### COROLLAIRE.

Quelque méthode que l'on employe pour résoudre ces équations (ou même toute autre), le résultat en sera toujours le même, si l'opération est bonne, comme on peut le voir par les opérations de cette section ; car ces deux méthodes qui y ont été proposées, donnent dans leurs cas respectifs la même valeur de $x$

Ainsi lorsque $xx + 2bx = dc$, nous avons le théorême 1. $x = \sqrt{dc + bb} - b$, lorsque $xx - 2bx = dc$, on a le théorême 2. $x = b + \sqrt{dc + bb}$; & lorsque $2bx - xx = dc$, on a le théorême 3. $x = b + \sqrt{dc + bb}$.

On peut aisément former des théorêmes semblables pour le reste.

Si le coefficient connu (du second ou moindre terme) est une quantité simple, comme $xx + bx = dc$, &c. alors sa moitié est $\frac{1}{2} b$, & le quarré de sa moitié est $\frac{1}{4} bb$; car $\frac{1}{2} b \times \frac{1}{2} b = \frac{1}{4} bb$, & l'opération se fait de cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $xx + bx = dc$ |
| 1 C □ | 2 | $xx + bx + \frac{1}{4} bb = dc + \frac{1}{4} bb$ |
| 2 ▱ 2 | 3 | $x + \frac{1}{2} b = \sqrt{dc + \frac{1}{4} bb}$ |
| 3 $- \frac{1}{2} b$ | 4 | $x = \sqrt{dc + \frac{1}{4} bb} - \frac{1}{2} b$, & ainsi des autres. |

*Nota*. C □ placé en marge à côté du second cas, signifie que le quarré imparfait $xx + bx$, y est achevé ou completé.

Maintenant par le moyen de ces théorêmes, il sera aisé de calculer ou de trouver la valeur en nombres de la quantité inconnue $x$.

## EXEMPLE I.

Soit $xx + 2bx = s$, soit $b = 16$, & $s = 4644$.

On aura par le théorême 1. $x = \sqrt{s + bb} - b$; mais $s + bb = 4644 + 256 = 4900$, & $\sqrt{4900} = 70$; donc $x = 70 - 16$, ou $x = 54$.

Mais toute *équation affectée* a autant de racines (ou plutôt de valeurs de la quantité inconnue) soit réelles ou imaginaires, qu'il y a de dimensions dans sa plus haute puissance (ou d'unités dans l'exposant), & par conséquent la quantité $x$, dans cette équation, a une autre valeur, ou positive ou négative, que l'on peut trouver en cette maniere.

L'équation donnée est $xx + 32x = 4644$, & sa racine $x = 54$.

Faisons ces deux équations égales à *zero* ou à *rien*, en

cette maniere : $xx + 32x - 4644 = 0$, & $x - 54 = 0$. Divisons ensuite l'équation donnée par sa premiere racine, & le quotient marquera la seconde valeur de $x$.

Ainsi $x - 54 = 0$ ) $xx + 32x - 4644 = 0$ ( $x + 86 = 0$

$$\begin{array}{r} xx - 54x \\ \hline +86x - 4644 \\ 86x - 4644 \\ \hline (0) \end{array}$$

Ainsi la seconde valeur de $x$ est $-86$, ou $86 = -x$, quoiqu'il paroisse impossible qu'une quantité positive soit égale à une quantité négative ; mais par cette seconde valeur de $(x)$, & par le même coefficient, on formera la vraie ou premiere équation, comme on voit ici.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $x = -86$ |
| 1 ⊙ 2 | 2 | $xx = +7396$ ; car $-86 \times -86 = 7396$. |
| $1 \times 32$ | 3 | $32x = -2752$ |
| $2 + 3$ | 4 | $xx + 32x = 4644$, comme à la premiere. |

*EXEMPLE II.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $xx - 7x = 948,75$ ; donc par le *théorême* 2. |
| 1 C □ | 2 | $xx - 7x + \frac{49}{4} = 948,75 + \frac{49}{4} = 961$. |
| 1 m ⊡ 2 | 3 | $x - \frac{7}{2} = \sqrt{961} = 31$. |
| $3 + 3,5$ | 4 | $x = 31 + 3,5 = 34,5$, parce que $\frac{7}{2} = 3,5$. |

De plus, pour la seconde valeur de $x$, soit $xx - 7x - 948,75 = 0$, & $x - 34,5 = 0$. Donc $x - 34,5 = 0$ ) $xx - 7x - 948,75 = 0$ ( $x + 27,5 = 0$ ; par conséquent cette seconde valeur est $x = -27,5$, qui produira l'équation originale $xx - 7x = 948,75$, si elle est disposée comme la derniere.

*EXEMPLE III.*

Soit $36x - xx = 243$, on aura par le *théorême* 3. $x = 18 - \sqrt{324 - 243}$, parce que le quarré de la moitié de 36 est 324, &c. c'est-à-dire $x = 18 - \sqrt{81}$,

mais $\sqrt{81} = 9$ ; donc $x = 18 - 9 = 9$ ; mais cette troisiéme forme se nomme *équation ambigue*, parce qu'elle a deux valeurs positives de la quantité inconnue ($x$) ; on les trouve toutes deux sans la *division*, dont on a usé ci-devant ; car en ce cas $x = 18 \pm \sqrt{81}$, c'est-à-dire $x = 18 + 9 = 27$, & $x = 18 - 9 = 9$, comme ci devant ; & ces deux valeurs de $x$ sont également vraies, & propres à former l'équation donnée, $36x - xx = 243$ ; car si $x = 9$, on aura $xx = 81$, & $36x = 324$ ; mais $324 - 81 = 243$ : donc $x = 9$. De même si $x = 27$, on aura $xx = 729$, & $36x = 972$ ; mais $972 - 729 = 243$, par conséquent on a encore $x = 27$.

Maintenant on trouvera l'une de ces valeurs de $x$ par la division, comme dans les deux autres cas, ayant trouvé l'autre par le théorême.

Soit $36x - xx - 243 = 0$, & $9 - x = 0$, on aura

$$
\begin{array}{llll}
9 - x = 0\,) & 36x - xx - 243 = 0 & (x - 27 = 0 \\
 & 9x - xx & \\
\hline
 & 27x - 0 - 243 & \\
 & 27x \quad\;\; - 243 & \\
\hline
 & (0) \qquad\quad (0) &
\end{array}
$$

Donc, puisque $x - 27 = 0$, on aura $x = 27$, comme auparavant.

Quoique toutes les équations quadratiques de cette troisiéme forme ayent deux racines positives (comme celle-ci), il n'y a cependant qu'une de ces racines qui donne la vraie réponse à la question, & il faut la choisir selon la nature & les limites de la question, comme on le fera voir dans la suite.

## SCHOLIE.

Les opérations des trois derniers exemples font voir que la somme des deux racines est toujours égale au coefficient de leur second terme respectif, avec un signe contraire.

Ainſi dans l'exemple 1. $xx + 32x = 4644$,

on trouve $x = 54$ } Ajoutez
Et $x = -86$ }

$2x = -32$

Dans l'exemple 2. $xx - 7x = 948{,}75$,

on trouve $x = 34{,}5$ } Ajoutez
Et $x = -27{,}5$ }

$2x = +7$

Dans le dernier exemple, $36x - xx = 243$

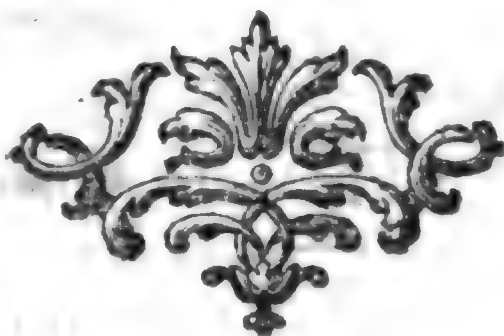
qui ſe change en $xx - 36x = -243$

Ici $x = 9$ } Ajoutez
Et $x = 27$ }

$2x = 36$.

De là il ſuit évidemment, que ſi l'on a trouvé l'une des racines, on trouvera aiſément l'autre ſans *diviſion*.

Si l'on a bien compris tout ce qui eſt contenu dans cette ſection, on trouvera aiſément la *ſolution numérique* de toute *équation quadratique* qui peut ſe rencontrer dans la réſolution des queſtions, &c. Quant à leur conſtruction géométrique, ce n'eſt pas ici le lieu d'en parler, parce que je ſuppoſe que les commençans ignorent les premiers principes de la Géométrie; ainſi je la renvoie à la partie ſuivante.



# CHAPITRE IX.

## *De l'analyse ou de la méthode de résoudre les Problêmes, éclaircie par une grande variété d'exemples de questions numériques.*

*Nota.* Il est bon que les commençans se servent toujours des mêmes lettres pour représenter les mêmes quantités dans toutes les questions,

c'est-à-dire { si $x$ représente un nombre & $y$ un nombre moindre } ou une autre quantité.

Soit {
$x+y=s$, leur *somme*.
$x-y=d$, leur *difference*.
$xy=p$, leur *produit*.
$\frac{x}{y}=q$, leur *quotient*.
$xx+yy=r$, la *somme* de leurs *quarrés*.
$xx-yy=t$, la *difference* de leurs *quarrés*.

Deux de ces six quantités ($s$, $d$, $p$, $q$, $r$, $t$) étant données, il faut trouver le reste, ce qui fournit quinze variations ou questions.

*Question* 1[re]. $s$ & $d$ étant données, il faut trouver $x$, $y$, $p$, $q$, $r$, $t$.

| | | |
|---|---|---|
| Soient { | 1 | $x+y=s$ } & supposons { $s=240$, $d=192$ }; donc |
| | 2 | $x-y=d$ |
| $1+2$ | 3 | $2x=s+d=432$ |
| $3\div 2$ | 4 | $x=\frac{s+d}{2}=216$, ce qui donne la val. de $x$. |
| $1-2$ | 5 | $2y=s-d=48$ |
| $5\div 2$ | 6 | $y=\frac{s-d}{2}=24$, ce qui donne $y$. |
| $4\times 6$ | 7 | $xy=\frac{ss-dd}{4}=p=5184$; ainsi $p$ est trouvé. |
| $4\div 6$ | 8 | $\frac{x}{y}=\frac{s+d}{s-d}=q=9$, valeur de $q$. |

| | | |
|---|---|---|
| $4 \odot 2$ | 9 | $xx = \frac{ss + 2sd + dd}{4} = 46656$ |
| $6 \odot 2$ | 10 | $yy = \frac{ss - 2sd + dd}{4} = 576$ |
| $9 + 10$ | 11 | $xx + yy = \frac{ss + dd}{2} = 47232$, valeur de $r$. |
| $9 - 10$ | 12 | $xx - yy = sd = t = 46080$, valeur de $t$. |

*Question* 2. Soient $s$ & $p$ données, trouver le reste,

| | | |
|---|---|---|
| c'est-à-dire { | 1 | $x + y = s = 240$ |
| | 2 | $xy = p = 5184$ |
| $1 \odot 2$ | 3 | $xx + 2xy + yy = ss = 57600$ |
| $2 \times \bar{4}$ | 4 | $4xy = 4p = 20736$ |
| $3 - 4$ | 5 | $xx - 2xy + yy = ss - 4p = 36864$ |
| $5 \Box 2$ | 6 | $x - y = \sqrt{ss - 4p} = d = 192$ |
| $1 + 6$ | 7 | $2x = s + \sqrt{ss - 4p}$ |
| $7 \div \bar{2}$ | 8 | $x = \frac{s + \sqrt{ss - 4p}}{2}$, ce qui donne $x = 216$. |
| $1 - 6$ | 9 | $2y = s - \sqrt{ss - 4p}$ |
| $9 \div \bar{2}$ | 10 | $y = \frac{s - \sqrt{ss - 4p}}{2}$ ; donc $y = 24$ |
| $8 \div 10$ | 11 | $\frac{x}{y} = \frac{s + \sqrt{ss - 4p}}{s - \sqrt{ss - 4p}} = q = 9$ |
| $8 \odot 2$ | 12 | $xx = \frac{ss + s\sqrt{ss - 4p}}{2} - p$. |
| $10 \odot 2$ | 13 | $yy = \frac{ss - s\sqrt{ss - 4p}}{2} - p$ |
| $12 + 13$ | 14 | $xx + yy = ss - 2p = r = 47232$ |
| $12 - 13$ | 15 | $xx - yy = s\sqrt{ss - 4p} = t = 46080$ |

*Question* 3. Soient $s$ & $q$ données, trouver le reste;

| | | |
|---|---|---|
| Sçavoir, { | 1 | $x + y = s = 240$ } on demande $x, y, d, p, r, t$. |
| | 2 | $\frac{x}{y} = q = 9$ |
| $2 \times y$ | 3 | $x = qy$ |

| | | |
|---|---|---|
| $1 - 3$ | 4 | $y = s - qy$ |
| $4 + qy$ | 5 | $y + qy = s$ |
| $5 \div \overline{q+1}$ | 6 | $y = \frac{s}{q+1}$ ; car $\overline{q+1} \times y = qy + y$. |
| $1 - 6$ | 7 | $x = s - \frac{s}{q+1} = \frac{qs}{q+1}$ |
| $6 \times 7$ | 8 | $xy = \frac{qss}{qq+2q+1} = p$ |
| $7 - 6$ | 9 | $x - y = \frac{qs - s}{q+1} = d$ |
| $7 \odot 2$ | 10 | $xx = \frac{qqss}{qq+2q+1}$ |
| $6 \odot 2$ | 11 | $yy = \frac{ss}{qq+2q+1}$ |
| $10 + 11$ | 12 | $xx + yy = \frac{qqss + ss}{qq+2q+1} = r$ |
| $10 - 11$ | 13 | $xx - yy = \frac{qqss - ss}{qq+2q+1} = t$. |

*Question* 4. Soient $s$ & $r$ données, trouver le reste ;

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sçavoir, | 1 | $x + y = s = 240$ | on demande |
| | 2 | $xx + yy = r = 47232$ | $x, y, d, p, q, t$. |
| $1 \odot 2$ | 3 | $xx + 2xy + yy = ss$ | |
| $3 - 2$ | 4 | $2xy = ss - r$ | |
| $2 - 4$ | 5 | $xx - 2xy + yy = 2r - ss$ | |
| $5 \sqsubset 2$ | 6 | $x - y = \sqrt{2r - ss} = d$ | |
| $1 + 6$ | 7 | $2x = s + \sqrt{2r - ss}$ | |
| $7 \div 2$ | 8 | $x = \frac{s + \sqrt{2r - ss}}{2}$ | |
| $1 - 6$ | 9 | $2y = s - \sqrt{2r - ss}$ | |
| $9 \div 2$ | 10 | $y = \frac{s - \sqrt{2r - ss}}{2}$. | |

On trouve le reste ainsi que dans la seconde question.

## *Question* 5. $s$ & $t$ étant données, trouver le reste ;

| | | |
|---|---|---|
| Sçavoir, | 1 | $x + y = s = 240$ { On demande $x$, |
| | 2 | $xx - yy = t = 46080$ { $y$, $d$, $p$ ; $q$, $r$. |
| $2 \div 1$ | 3 | $x - y = \frac{t}{s} = d$ ; car $x+y)xx-yy(x-y$. |
| $1 + 3$ | 4 | $2x = \frac{ss+t}{s}$ |
| $4 \div \bar{2}$ | 5 | $x = \frac{ss+t}{2s}$ |
| $1 - 3$ | 6 | $2y = s - \frac{t}{s} = \frac{ss-t}{s}$ |
| $6 \div \bar{2}$ | 7 | $y = \frac{ss-t}{2s}$ |
| $5 \times 7$ | 8 | $xy = \frac{ssss - tt}{4ss} = p$. |
| $5 \div 7$ | 9 | $\frac{x}{y} = \frac{ss+t}{ss-t} = q$ |
| $5 \odot 2$ | 10 | $xx = \frac{s^4 + 2sst + tt}{4ss}$ |
| $7 \odot 2$ | 11 | $yy = \frac{s^4 - 2sst + tt}{4ss}$ |
| $10 + 11$ | 12 | $xx + yy = \frac{s^4 + tt}{2ss} = r$. |

---

## *Question* 6. Soient $d$ & $p$ données, trouver le reste ;

| | | |
|---|---|---|
| Sçavoir, | 1 | $x - y = d = 192$ { On demande $x$, $y$, |
| | 2 | $xy = p = 5184$ { $s$, $q$, $r$, $t$. |
| $1 \odot 2$ | 3 | $xx - 2xy + yy = dd$ |
| $2 \times \bar{4}$ | 4 | $4xy = 4p$ |
| $3 + 4$ | 5 | $xx + 2xy + yy = dd + 4p$. |
| 5 ▱ 2 | 6 | $x + y = \sqrt{dd + 4p}$ |
| $6 + 1$ | 7 | $2x = d + \sqrt{dd + 4p}$ |
| $7 \div \bar{2}$ | 8 | $x = \frac{d + \sqrt{dd+4p}}{2}$ |
| $6 - 1$ | 9 | $2y = \sqrt{dd + 4p} - d$ |
| $9 \div \bar{2}$ | 10 | $y = \frac{\sqrt{dd+4p}}{2} - d$ |

| | | |
|---|---|---|
| 8 ÷ 10 | 11 | $\frac{x}{y} = \frac{d + \sqrt{dd + 4p}}{\sqrt{dd + 4p} - d} = q.$ |
| 8 ⊙ 2 | 12 | $xx = \frac{dd + 2p + d\sqrt{dd + 4p}}{2}$ |
| 10 ⊙ 2 | 13 | $yy = \frac{dd + 2p - d\sqrt{dd + p}}{2}$ |
| 12 + 13 | 14 | $xx + yy = dd + 2p = r$ |
| 12 — 13 | 15 | $xx - yy = d\sqrt{dd + 4p} = t.$ |

*Question* 7. Soient $d$ & $q$ données, trouver le reste;

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sçavoir, | 1 | $x - y = d = 192$ | Trouver $x, y, s, p, r, t.$ |
| | 2 | $\frac{x}{y} = q = 9$ | |
| 2 × $y$ | 3 | $x = qy$ | |
| 1 + $y$ | 4 | $x = d + y$ | |
| 3, 4 | 5 | $qy = d + y$ | |
| 5 — $y$ | 6 | $qy - y = d$ | |
| 6 ÷ $\overline{q - 1}$ | 7 | $y = \frac{d}{q - 1}$; car $\overline{q - 1} \times y = qy - y$ | |
| 1 + 7 | 8 | $x = d + \frac{d}{q - 1} = \frac{qd}{q - 1}$ | |
| 7 + 8 | 9 | $x + y = \frac{qd + d}{q - 1} = s$ | |
| 7 × 8 | 10 | $xy = \frac{qdd}{qq - 2q + 1} = p$ | |
| 8 ⊙ 2 | 11 | $xx = \frac{qqdd}{qq - 2q + 1}$ | |
| 7 ⊙ 2 | 12 | $yy = \frac{dd}{qq - 2q + 1}$ | |
| 11 + 12 | 13 | $xx + yy = \frac{qqdd + dd}{qq - 2q + 1} = r$ | |
| 11 — 12 | 14 | $xx - yy = \frac{qqdd - dd}{qq - 2q + 1} = t.$ | |

*Question* 8. Soient $d$ & $r$ données, trouver le reste;

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sçavoir, | 1 | $x - y = d$ 192 | On demande $x$, |
| | 2 | $xx + yy = r = 47232$ | $y, s, p, q, t.$ |

1 ⊙ 2

| | | |
|---|---|---|
| 1 ⊙ 2 | 3 | $xx - 2xy + yy = dd$ |
| 2 − 3 | 4 | $2xy = r - dd$ |
| 2 + 4 | 5 | $xx + 2xy + yy = 2r - dd$ |
| 5 ▭ 2 | 6 | $x + y = \sqrt{2r - dd}$ |
| 1 + 6 | 7 | $2x = d + \sqrt{2r - dd}$ |
| 7 ÷ 2 | 8 | $x = \frac{d + \sqrt{2r - dd}}{2}$ |
| 6 − 1 | 9 | $2y = \sqrt{2r - dd} - d$ |
| 9 ÷ 2 | 10 | $y = \frac{\sqrt{2r - dd} - d}{2}$ |
| 8 × 10 | 11 | $xy = \frac{-dd}{2} = p.$ |
| 8 ⊙ 2 | 12 | $xx = \frac{r + d\sqrt{2r - dd}}{2}$ |
| 10 ⊙ 2 | 13 | $yy = \frac{r - d\sqrt{2r - dd}}{2}$ |
| 12 − 13 | 14 | $xx - yy = d\sqrt{2r - dd} = t$ |
| 8 ÷ 10 | 15 | $\frac{x}{y} = \frac{d + \sqrt{2r - dd}}{\sqrt{2r - dd} - d} = q.$ |

*Question* 9. Soient $d$ & $t$ donnés, trouver le reste;

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sçavoir, { | 1 | $x - y = d = 240$ | On demande $x$, |
| | 2 | $xx - yy = t = 46080$ | $y, s, p, q, r$. |
| 2 ÷ 1 | 3 | $x + y = \frac{t}{d} = s$; car $x - y) xx - yy (x + y$. | |
| 1 + 3 | 4 | $2x = \frac{dd + t}{d}$ | |
| 4 ÷ 2 | 5 | $x = \frac{dd + t}{2d}$ | |
| 3 − 5 | 6 | $y = \frac{t - dd}{2d}$ | |
| 5 × 6 | 7 | $xy = \frac{tt - d^4}{4dd} = p.$ | |
| 5 ÷ 6 | 8 | $\frac{x}{y} = \frac{dd + t}{t - dd} = q$ | |

Q

| | | |
|---|---|---|
| 5 ⊙ 2 | 9 | $xx = \frac{d^4 + 2ddt + tt}{4dd}$ |
| 6 ⊙ 2 | 10 | $yy = \frac{tt - 2ddt + d^4}{4dd}$ |
| 9 + 10 | 11 | $xx + yy = \frac{d^4 + tt}{2dd} = r.$ |

*Question* 10. Soient $p$ & $q$ donnés, trouver le reste.

| | | |
|---|---|---|
| Soient | 1 | $xy = p = 5184$ } On cherche $x, y, d, r, t$. |
| | 2 | $\frac{x}{y} = q = 9$ |
| 1 × 2 | 3 | $xx = pq$ ; car $\frac{xy}{1} \times \frac{x}{y} = \frac{xxy}{y} = xx.$ |
| 3 ▱ 2 | 4 | $x = \sqrt{pq}$ |
| 1 ÷ 2 | 5 | $yy = \frac{p}{q}$ ; car $\frac{x}{y}$ ) $\frac{xy}{1}$ ( $\frac{xyy}{x} = yy$ |
| 5 ▱ 2 | 6 | $y = \sqrt{\frac{p}{q}}$ |
| 4 + 6 | 7 | $x + y = \sqrt{pq} + \sqrt{\frac{p}{q}} = s$ |
| 4 − 6 | 8 | $x - y = \sqrt{pq} - \sqrt{\frac{p}{q}} = d$ |
| 3 + 5 | 9 | $xx + yy = pq + \frac{p}{q} = r$ |
| 3 − 5 | 10 | $xx - yy = pq - \frac{p}{q} = t.$ |

*Question* 11. Soient $p$ & $r$ donnés, trouver le reste.

| | | |
|---|---|---|
| Soient | 1 | $xy = p = 5184$ } On cherche $x$, $y$, &c. |
| | 2 | $xx + yy = r = 47232$ |
| 1 × 2 | 3 | $2xy = 2p$ |
| 2 + 3 | 4 | $xx + 2xy + yy = 2p + r$ |
| 4 ▱ 2 | 5 | $x + y = \sqrt{r + 2p} = s$ |
| 2 − 3 | 6 | $xx - 2xy + yy = r - 2p$ |
| 6 ▱ 2 | 7 | $x - y = \sqrt{r - 2p} = d$ |
| 5 + 7 | 8 | $2x = \sqrt{r + 2p} + \sqrt{r - 2p}$ |
| 8 ÷ 2 | 9 | $x = \frac{\sqrt{r + 2p} + \sqrt{r - 2p}}{2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 5 — 7 | 10 | $2y = \sqrt{r+2p} - \sqrt{r-2p}$ |
| 10 ÷ $\overline{2}$ | 11 | $y = \frac{\sqrt{r+2p} - \sqrt{r-2p}}{2}$ |
| 9 ÷ 11 | 12 | $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{r+2p} + \sqrt{r-2p}}{\sqrt{r+2p} - \sqrt{r-2p}}$ |
| 9 ⊙ 2 | 13 | $xx = \frac{r + \sqrt{rr - 4pp}}{2}$ |
| 11 ⊙ 2 | 14 | $yy = \frac{r - \sqrt{rr - 4pp}}{2}$ |
| 13 — 14 | 15 | $xx - yy = \sqrt{rr - 4pp} = t$. |

*Question* 12. Soient $p$ & $t$ donnés ; trouver le reste.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Soient | 1 | $xy = p = 5184$ | On cherche $x$, $y$, &c. |
| | 2 | $xx - yy = t = 46080$ | |
| 1 ⊙ 2 | 3 | $xxyy = pp$ | |
| 2 ⊙ 2 | 4 | $x^4 - 2xxyy + y^4 = tt$ | |
| 3 × $\overline{4}$ | 5 | $4xxyy = 4pp$ | |
| 4 + 5 | 6 | $x^4 + 2xxyy + y^4 = tt + 4pp$ | |
| 6 ▱ 2 | 7 | $xx + yy = \sqrt{tt + 4pp} = r$ | |
| 2 + 7 | 8 | $2xx = t + \sqrt{tt + 4pp}$ | |
| 8 ÷ $\overline{2}$ | 9 | $xx = \frac{t + \sqrt{tt + 4pp}}{2}$ | |
| 9 ▱ 2 | 10 | $x = \sqrt{\frac{t + \sqrt{tt + 4pp}}{2}}$ | |
| 7 — 2 | 11 | $2yy = \sqrt{tt + 4pp} - t$ | |
| 11 ÷ $\overline{2}$ | 12 | $yy = \frac{\sqrt{tt + 4pp} - t}{2}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 12 ▱ 2 | 13 | $y = \sqrt{\frac{\sqrt{tt+4pp}-t}{2}}$ |
| 10 + 13 | 14 | $x+y = \sqrt{\frac{t+\sqrt{tt+4pp}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{t+4pp}-t}{2}} = s$ |
| 10 — 13 | 15 | $x-y = \sqrt{\frac{t\sqrt{tt+4pp}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{t+4pp}-t}{2}} = d$ |
| 9 + 12 | 16 | $xx+yy = \sqrt{tt+4pp} = r.$ |

*Question* 13. $q$ & $r$ étant donnés, trouver le reste.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Soient | 1 | $\frac{x}{y} = q = 9$ | On demande $x$, $y$, &c. |
| | 2 | $xx+yy = r = 47232$ | |
| 1 × $y$ | 3 | $x = qy$ | |
| 3 ⊙ 2 | 4 | $xx = qqyy$ | |
| 2 — 4 | 5 | $yy = r - qqyy$ | |
| 5 + $qqyy$ | 6 | $yy + qqyy = r$ | |
| 6 ÷ $\overline{qq+1}$ | 7 | $yy = \frac{r}{qq+1}$; car $\overline{qq+1}\,yy = yy + qqyy$ | |
| 2 — 7 | 8 | $xx = r - \frac{r}{qq+1} = \frac{qqr}{qq+1}$ | |
| 8 ▱ 2 | 9 | $x = \sqrt{\frac{qqr}{qq+1}}$ | |
| 7 ▱ 2 | 10 | $y = \sqrt{\frac{r}{qq+1}}$ | |
| 9 + 10 | 11 | $x+y = \sqrt{\frac{qqr}{qq+1}} + \sqrt{\frac{r}{qq+1}} = s$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 9 — 10 | 12 | $x - y = \sqrt{\frac{qqr}{qq+1}} - \sqrt{\frac{r}{qq+1}} = d$ |
| 9 × 10 | 13 | $xy = \sqrt{\frac{qqrr}{qq+2q+1}} = \frac{qr}{q+1} = p$ |
| 8 — 7 | 14 | $xx - yy = \frac{qqr - r}{qq+1} = t.$ |

*Question* 14. $q$ & $t$ étant donnés, trouver le reste.

| | | |
|---|---|---|
| Soient | 1 | $\frac{x}{y} = q = 9$ |
| | 2 | $xx - yy = t = 46080$ — On demande $x$, $y$, &c. |
| 1 × $y$ | 3 | $x = qy$ |
| 3 ⊙ 2 | 4 | $xx = qqyy$ |
| 2 + $yy$ | 5 | $xx = t + yy$ |
| 4, 5 | 6 | $qqyy = t + yy$ |
| 6 — $yy$ | 7 | $qqyy - yy = t$ |
| 7 ÷ $\overline{qq-1}$ | 8 | $yy = \frac{t}{qq-1}$ |
| 2 + 8 | 9 | $xx = \frac{qqt}{qq-1}$ |
| 9 ▱ 2 | 10 | $x = \sqrt{\frac{qqt}{qq-1}}$ |
| 8 ▱ 2 | 11 | $y = \sqrt{\frac{t}{qq-1}}$ |
| 10 + 11 | 12 | $x + y = \sqrt{\frac{qqt}{qq-1}} + \sqrt{\frac{t}{qq-1}} = s$ |
| 10 — 11 | 13 | $x - y = \sqrt{\frac{qqt}{qq-1}} - \sqrt{\frac{t}{qq-1}} = d$ |
| 10 × 11 | 14 | $xy = \sqrt{\frac{qqtt}{qqqq - 2qq + 1}} = \frac{qt}{qq-1} = p$ |
| 8 + 9 | 15 | $xx + yy = \frac{qqt + 1}{qq - 1} = r.$ |

*Question* 15. $r$ & $t$ étant donnés, trouver le reste.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Soient | 1 | $xx + yy = r = 47232$ | On demande |
| | 2 | $xx - yy = t = 46080$ | $x$, $y$, &c. |
| $1 + 2$ | 3 | $2xx = r + t$ | |
| $3 \div \bar{2}$ | 4 | $xx = \frac{r+t}{2}$ | |
| $1 - 2$ | 5 | $2yy = r - t$ | |
| $5 \div \bar{2}$ | 6 | $yy = \frac{r-t}{2}$ | |
| 4 ▱ 2 | 7 | $x = \sqrt{\frac{r+t}{2}}$ | |
| 6 ▱ 2 | 8 | $y = \sqrt{\frac{r-t}{2}}$. | |
| $7 + 8$ | 9 | $x + y = \sqrt{\frac{r+t}{2}} + \sqrt{\frac{r-t}{2}} = s$ | |
| $7 - 8$ | 10 | $x - y = \sqrt{\frac{r+t}{2}} - \sqrt{\frac{r-t}{2}} = d$ | |
| $7 \times 8$ | 11 | $xy = \sqrt{\frac{rr-tt}{4}} = p$ | |
| $7 \div 8$ | 12 | $\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{r+t}{r-t}} = q$. | |

Ces quinze *questions* ont été proposées dans l'Algebre du Docteur *Pell*, mais il se borne à la premiere dans toute son étendue, & il termine les autres *quatorze* dès qu'il a trouvé les valeurs de $x$ & $y$. J'ai cherché dans chacune les valeurs de toutes les quantités inconnues, parce qu'on y trouve tant de varieté, que si les commençans y font bien attention, ils en retireront de grands avantages pour la solution de plusieurs questions.

*Nota.* J'ai employé toujours les mêmes nombres pour la valeur respective de chaque quantité dans toutes ces questions, parce qu'on y trouve plus de satisfaction, en faisant la preuve de chaque opération, qu'on n'en auroit trouvé si j'avois proposé divers nombres. Ce n'est pas qu'on ne puisse choisir tous les nombres que l'on voudra,

pourvû que celui qui eſt repréſenté par $x$ ſoit plus grand que celui qui eſt repréſenté par $y$, &c. J'ai ſupprimé les calculs purement numériques pour exercer les commençans dans la pratique.

*Queſtion.* 16. Il y a deux nombres tels que la ſomme de leurs quarrés eſt 2368, & que le plus grand des deux eſt au plus petit, comme 6 eſt à 1. Quels ſont ces nombres ?

Soit $x =$ plus grand nombre ; $y =$ plus petit, & $a = 2368$,

| | | | |
|---|---|---|---|
| on aura donc | 1 | $xx + yy = a$ | par la queſtion. |
| Et | 2 | $x : y :: 6 : 1$ | |
| 2 ⁘ | 3 | $1x = 6y$ | |
| 3 ⨀ 2 | 4 | $xx = 36\,yy$ | |
| 1 — 4 | 5 | $yy = a - 36yy$ | |
| 5 + 36yy | 6 | $yy + 36yy = a = 37yy$ | |
| 6 ÷ 37 | 7 | $yy = \frac{a}{37} = 64$ | |
| 7 ▱ 2 | 8 | $y = \sqrt{\frac{a}{37}} = 8$ | |
| 8 × 6 | 9 | $6y = 6\sqrt{\frac{a}{37}} = 48$ | |
| 3, 9 | 10 | $x = 48$ | |

*Preuve*

Si $x = 48$
Et $y = 8$
$xx = 2304$
$yy = 64$
$xx + yy = 2368$
Et $48 : 8 :: 6 : 1$

*Queſtion* 17. Il y a trois nombres en proportion continue, la ſomme des extrêmes eſt 156, & le moyen eſt 72. Quels ſont ces deux extrêmes ? C'eſt-à-dire on ſuppoſe $x$, $m$, $y$ en ⁘, & $m = 72$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Donc | 1 | $x + y = s = 156$ | par la queſtion, on demande $x$, $y$, &c. |
| | 2 | $x : m :: m : y$, | |
| 2 ⁘ | 3 | $xy = mm$ | |
| 1 ⨀ 2 | 4 | $xx + 2xy + yy = ss$ | |
| 3 × 4 | 5 | $4xy = 4mm$ | |
| 4 — 5 | 6 | $xx - 2xy + yy = ss - 4mm$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 6 ▱ 2 | 7 | $x - y = \sqrt{ss - 4mm}$ |
| 1 + 7 | 8 | $2x = s + \sqrt{ss - 4mm}$ |
| 8 ÷ $\bar{2}$ | 9 | $x = \frac{s + \sqrt{ss - 4mm}}{2} = 108$ } ou { $x = 48$ |
| 1 — 9 | 10 | $y = \frac{s - \sqrt{ss - 4mm}}{2} = 48$ } ou { $y = 108$. |

*Question* 18. Il y a trois nombres en ∺. Leur somme est 74, & la somme de leurs quarrés est 1924. Quels sont ces nombres, c'est-à-dire $x$, $z$, $y$ sont en ∺ ?

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $x + z + y = s = 74$ |
| | 2 | $xx + zz + yy = a = 1924$ } on demande $x$, $z$, $y$. |
| | 3 | $x : z :: z : y$ |
| 3 ∵ | 4 | $xy = zz$ |
| 1 — z | 5 | $x + y = s - z$ |
| 2 — zz | 6 | $xx + yy = a - zz$ |
| 4 × $\bar{2}$ | 7 | $2xy = 2zz$ |
| 6 + 7 | 8 | $xx + 2xy + yy = a + zz$ |
| 5 ⊙ 2 | 9 | $xx + 2xy + yy = ss - 2sz + zz$ |
| 8 & 9 | 10 | $a + zz = ss - 2sz + zz$ |
| 10 ± | 11 | $2sz = ss - a$ |
| 11 ÷ 2s | 12 | $z = \frac{ss - a}{2s} = 24$ |
| 5. | 13 | $x + y = s - z = 50$ |
| 13 ⊙ 2 | 14 | $xx + 2xy + yy = 2500$ |
| 4 × $\bar{4}$ | 15 | $4xy = 4zz = 2304$ |
| 14 — 15 | 16 | $xx - 2xy + yy = 196$ |
| 16 ▱ 2 | 17 | $x - y = \sqrt{196} = 14$ |
| 13 + 17 | 18 | $2x = 50 + 14 = 64$ |
| 18 ÷ $\bar{2}$ | 19 | $x = 32$ } ou { $x = 18$ |
| 13 — 19 | 20 | $y = 50 - 32 = 18$ } ou { $y = 32$. |

*Nota.* Dans toutes les questions sur les quantités en proportion continue ( soit *arithmétique* ou *géométrique* ) lorsqu'on cherche trois termes, le moyen se trouve plus aisément le premier ( comme ici ), & si tous les termes sont positifs, il est indifférent que le premier soit le plus grand ou le dernier.

*Question* 19. Il y a trois termes en ∺. Leur somme est 76, & si l'on multiplie la somme des extrêmes par le moyen, le produit sera 1248. Quels sont ces nombres ?

| | | |
|---|---|---|
| On a | 1 | $x : z :: z : y$ } par la question. |
| | 2 | $x + z + y = 76 = s$ |
| | 3 | $xz + yz = 1248 = p$ |
| 1 ∺ | 4 | $xy = zz$ |
| $2 \times z$ | 5 | $xz + zz + zy = sz$ |
| $5 - 3$ | 6 | $zz = sz - p$ |
| $6 - sz$ | 7 | $zz - sz = -p$ |
| 7 C □ | 8 | $zz - sz + \frac{1}{4} ss = \frac{1}{4} ss - p$ |
| 8 ▱ 2 | 9 | $z - \frac{1}{2} s = \sqrt{\frac{1}{4} ss - p}$ |
| $9 + \frac{1}{2} s$ | 10 | $z = \frac{1}{2} s + \sqrt{\frac{1}{4} ss - p} = \begin{cases} 52 \\ 24 \end{cases}$ |
| $2 - 10$ | 11 | $x + y = 52$ |
| $4 \times \overline{4}$ | 12 | $4xy = 4zz = 2304$ |
| 11 ⊙ 2 | 13 | $xx + 2xy + yy = 2704$ |
| $13 - 12$ | 14 | $xx - 2xy + yy = 400$ |
| 14 ▱ 2 | 15 | $x - y = \sqrt{400} = 20$ |
| $11 + 15$ | 16 | $2x = 52 + 20 = 72$ |
| $16 \div \overline{2}$ | 17 | $x = 36$ } ou { $x = 16$ |
| $11 - 17$ | 18 | $y = 52 - 36 = 16$ } ou { $y = 36$. |

*Nota.* Si l'on prend $z = \frac{1}{2} s + \sqrt{\frac{1}{4} ss - p} = 52$ ( au 10^e^ cas ) on aura $76 - 52 = 24 = x + y$, ce qui est impossible que le moyen soit plus grand que la somme des deux extrêmes.

Il faut donc prendre $z = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}ss - p} = 24$ (Voyez la fin du chap. précédent).

*Question* 20. Il y a trois nombres en progression arithmétique, tels que le premier étant ajouté au double du second, & au triple du troisiéme, leur somme est 62, & la somme de leurs quarrés est 275. Quels sont ces nombres ?

| | | |
|---|---|---|
| Supposons | 1 | $x, z, y$ en progression arithmétique : |
| Et | 2 | $x + 2z + 3y = 62$ } par la question. |
| | 3 | $xx + zz + yy = 275$ } par la question. |
| Donc | 4 | $x + y = 2z$, par la *sect.* 1re du *chap.* 6. |
| $2 - 4$ | 5 | $2z + 2y = 62 - 2z$ |
| $5 \div \overline{2}$ | 6 | $z + y = 31 - z$ |
| $6 - z$ | 7 | $y = 31 - 2z$ |
| $4 - z$ | 8 | $x = 4z - 31$ |
| 8 ⊙ 2 | 9 | $xx = 16zz - 248z + 961$ |
| 7 ⊙ 2 | 10 | $yy = 961 - 124z + 4zz$ |
| $9 + 10$ | 11 | $xx + yy = 20zz - 372z + 1922$ |
| $3 - 11$ | 12 | $zz = 372z - 20zz - 1647$ |
| $12 + 20zz$ | 13 | $21zz = 372z - 1647$ |
| $13 - 372z$ | 14 | $21zz - 372z = -1647$ |
| $14 \div \overline{21}$ | 15 | $zz - \frac{124}{7}z = -\frac{549}{7}$ |
| 15 C □ | 16 | $zz - \frac{124}{7}z + \frac{3844}{49} = \frac{3844}{49} - \frac{549}{7} = \frac{1}{49}$ |
| 16 ▱ 2 | 17 | $z - \frac{62}{7} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$, terme moyen. |
| $17 + \frac{62}{7}$ | 18 | $z = \frac{62 \pm 1}{7} = 9$, ou $8\frac{5}{7}$ |
| $18 \times 4$ | 19 | $4z = 36$ ou $34\frac{6}{7}$ |
| 8, 19 | 20 | $x = 36 - 31 = 5$, ou $34\frac{6}{7} - 31 = 3\frac{6}{7}$ |
| $18 \times \overline{2}$ | 21 | $2z = 18$, ou $17\frac{3}{7}$ |
| 7, 21 | 22 | $y = 31 - 18 = 13$, ou $31 - 17\frac{3}{7} = 13\frac{4}{7}$. |

*Question* 21. Il y a trois nombres en progression arithmétique ; le quarré du premier terme étant ajouté au produit des deux autres donne 576, le quarré du moyen étant ajouté au produit des deux extrêmes donne 612, & le quarré du dernier terme étant ajouté au produit du premier par le second, donne 792. Quels sont ces nombres ?

| | | |
|---|---|---|
| Supposons | 1 | $x$, $z$, $y$ en progression arithmétique, comme ci-devant. |
| | 2 | $xx + yz = 576$ } |
| | 3 | $zz + xy = 612$ } par la question. |
| | 4 | $yy + xz = 792$ } |
| 1 ∵ | 5 | $x + y = 2z$, par la *sect.* 1<sup></sup>re du *chap.* 6. |
| 5 × z | 6 | $xz + yz = 2zz$ |
| 2 + 4 | 7 | $xx + yz + xz + yy = 1368$ |
| 7 − 6 | 8 | $xx + yy = 1368 - 2zz$ |
| 3 − zz | 9 | $xy = 612 - zz$ |
| 9 × $\overline{2}$ | 10 | $2xy = 1224 - 2zz$ |
| 8 + 10 | 11 | $xx + 2xy + yy = 2592 - 4zz$ |
| 5 ⊙ 2 | 12 | $xx + 2xy + yy = 4zz$ |
| 11, 12 | 13 | $4zz = 2592 - 4zz$ |
| 13 + 4zz | 14 | $8zz = 2592$ |
| 14 ÷ $\overline{8}$ | 15 | $zz = 324$ |
| 15 ▱ 2 | 16 | $z = \sqrt{324} = 18$, terme moyen. |
| 8, | 17 | $xx + yy = 1368 - 2zz = 720$ |
| 10, | 18 | $2xy = 1224 - 2zz = 576$ |
| 17 − 18 | 19 | $xx - 2xy + yy = 720 - 576 = 144$ |
| 19 ▱ 2 | 20 | $x - y = \sqrt{144} = 12$ |
| 5 + 20 | 21 | $2x = 2z + 12 = 48$ |
| 21 ÷ $\overline{2}$ | 22 | $x = 24$ } ou { $x = 12$ |
| 5 − 22 | 23 | $y = 2z - 24 = 12$ } ou { $y = 24$ |

*Question* 22. On demande deux nombres tels que la somme de leurs quarrés soit $8226\frac{1}{2}$, & que leur produit ajouté au quarré du moindre, donne $6921\frac{1}{2}$.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $xx + zz = 8226\frac{1}{2}$ |
| | 2 | $xz + zz = 6921\frac{1}{2}$ |
| 1 — 2 | 3 | $xx - xz = 1305$ |
| 3 ± | 4 | $xz = xx - 1305$ |
| 4 ÷ $x$ | 5 | $z = \frac{xx - 1305}{x}$ |
| 5 ⊙ 2 | 6 | $zz = \frac{x^4 - 2610xx + 1703025}{xx}$ |
| 1 — $xx$ | 7 | $zz = 8226,5 - xx$ |
| 6. 7 | 8 | $\frac{x^4 - 2610xx + 1703025}{xx} = 8226,5 - xx$ |
| 8 × $xx$ | 9 | $x^4 - 2610xx + 1703025 = 8226,5xx - x^4$ |
| 9 + $x^4$ | 10 | $2x^4 - 2610xx + 1703025 = 8226,5xx$ |
| 10 ± | 11 | $2x^4 - 10836,5xx = -1703025$ |
| 11 ÷ 2 | 12 | $x^4 - 5418,25xx = -851512,5$ |
| 12 C □ | 13 | $x^4 - 5418,25xx + 7339358,26562 = 6487845,765$ |
| 13 ▱ 2 | 14 | $xx - 2709,125 = \sqrt{6487845,765625} = 2547,125$ |
| 14+27,&c. | 15 | $xx = 2709,125 + 2547,125$ |
| Supposons | 16 | $xx = 2709,125 + 2547,125 = 5256,25$ |
| Donc | 17 | $x = \sqrt{5256,25} = 72,5$ |
| Et 5, | 18 | $z = \frac{xx + 1305}{x} = \frac{5256,25 - 1305}{72,5} = 54,5$ |
| ou soit | 19 | $x^2 = 2709,125 - 2547,125 = 162$ |
| 19 ▱ 2 | 20 | $x = \sqrt{162} = 12,72$, &c. |
| Donc | 21 | $z = \frac{162 - 1305}{12,72}$, ce qui est impossible : |
| | | Donc $\begin{cases} x = 72,5 \\ z = 54,5 \end{cases}$ comme dans les cas 17 & 18. |

On peut résoudre cette question avec moins de peine, en substituant des lettres aux nombres connus.

Par exemple $\left\{\begin{matrix} xx + zz = a \\ xz + zz = b \end{matrix}\right\}$ & ensuite $a - b = d = xx - xz$, &c.

*Question* 23. On demande trois nombres, tels que la somme du premier & du second, étant multipliée par le troisiéme, donne 37824, que celle du second & du troisiéme, multipliée par le premier, donne 59944, & que la somme du premier & du troisiéme, multipliée par le second, soit 52456.

Soient $x$, $z$, $y$, ces trois nombres requis

| | | |
|---|---|---|
| On aura | 1 | $xy + zy = 37824 = b$ |
| | 2 | $zx + yx = 59944 = c$ |
| | 3 | $xz + yz = 52456 = d$ |
| $1 + 2 + 3$ | 4 | $2zx + 2xy + 2zy = b + c + d$ |
| Soit | 5 | $s = b + c + d$ |
| $4 \div 2$ | 6 | $zx + xy + zy = \frac{1}{2}s = \frac{b+c+d}{2}$ |
| $6 - 3$ | 7 | $xy = \frac{1}{2}s - d$ |
| $7 \div x$ | 8 | $y = \frac{s-2d}{2x}$ |
| $6 - 2$ | 9 | $zy = \frac{1}{2}s - c$ |
| $6 - 1$ | 10 | $zx = \frac{1}{2}s - b = \frac{s-2b}{2}$ |
| $10 \div x$ | 11 | $z = \frac{s-2b}{2x}$ |
| $8 \times 11$ | 12 | $zy = \frac{s-2d}{2x} \times \frac{s-2b}{2x} = ss - 2ds$, &c. |
| 9, 12 | 13 | $\frac{s-2c}{2} = \frac{ss-2ds-2bs+4bd}{4xx}$ |
| $13 \times 4x^2$ | 14 | $2sxx - 4cxx = ss - 2ds - 2bs + 4bd$ |
| $14 \div$ | 15 | $xx = \frac{ss-2ds-2bs+4bd}{2s-4c} = 55696$ |
| 15 ▱ 2 | 16 | $x = \sqrt{55696} = 236$ |
| 11 | 17 | $z = 158.\quad y = 96.$ |

*Question* 24. Trouver deux nombres, tels que leur ſomme étant ſouſtraite de la ſomme de leurs quarrés, le reſte ſoit 14, & ſi l'on ajoute leur produit à leur ſomme, on ait encore 14.

Soient $x$ & $z$, ces deux nombres, & $y = x + z$;

| | | |
|---|---|---|
| On aura | 1 | $xx + zz - y = 14$ } par la queſtion. |
| | 2 | $xz + y = 14$ } |
| $1 + y$ | 3 | $xx + zz = 14 + y$ |
| $2 - y$ | 4 | $xz = 14 - y$ |
| $4 \times \overline{2}$ | 5 | $2xz = 28 - 2y$ |
| $3 + 5$ | 6 | $xx + 2xz + zz = 42 - y$ |
| 6 ▱ 2 | 7 | $x + z = \sqrt{42 - y}$ |
| Mais | 8 | $x + z = y$, par la ſubſtitution précéd. |
| 7, 8 | 9 | $y = \sqrt{42 - y}$ |
| 9 ⊙ 2 | 10 | $yy = 42 - y$ |
| $10 + y$ | 11 | $yy + y = 42$ |
| 11 C □ | 12 | $yy + y + \frac{1}{4} = 42,25$ |
| 12 ▱ 2 | 13 | $y + \frac{1}{2} = \sqrt{42,25} = 6,5$ |
| $13 - \frac{1}{2}$ | 14 | $y = 6,5 - \frac{1}{2} = 6$ |
| par conſéq. | 15 | $x + z = 6$, par reſtitution de $y$. |
| 3, 14 | 16 | $xx + zz = 14 + 6 = 20$ |
| 5, 15 | 17 | $2xz = 28 - 12 = 16$ |
| $16 - 17$ | 18 | $xx - 2xz + zz = 4$ |
| 18 ▱ 2 | 19 | $x - z = \sqrt{4} = 2$ |
| $15 + 19$ | 20 | $2x = 8$ |
| $20 \div \overline{2}$ | 21 | $x = 4$ |
| $15 - 21$ | 22 | $z = 6 - 4 = 2.$ |

*Preuve* { Si $x = 4$, & $z = 2$
on a $xx + zz - x - z = 14$
Et $xz + x + z = 14$
ſelon la queſtion.

*Question* 25. Trois hommes parlant de l'argent qu'ils avoient, le premier dit, si l'on ajoutoit 100 liv. à l'argent que j'ai, j'en aurois autant que vous deux ensemble; le second dit, si l'on ajoutoit 100 liv. à la somme que j'ai, j'aurois deux fois autant que vous deux ensemble; & le troisiéme dit, si l'on ajoute 100 liv. à ce que j'ai, j'aurai trois fois autant que vous deux ensemble: combien ont-ils chacun?

Soit $x$ l'argent du premier, $z$ celui du second, & $y$ celui du troisiéme.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Donc | 1 | $x + 100 = z + y$ | par la question |
| | 2 | $z + 100 = 2x + 2y$ | on demande $x$, |
| | 3 | $y + 100 = 3x + 3z$ | $z$, $y$. |
| $1 - x$ | 4 | $z + y - x = 100 = s$ | |
| $2 - z$ | 5 | $2x + 2y - z = 100 = s$ | |
| $3 - y$ | 6 | $3x + 3z - y = 100 = s$ | |
| 4, 6 | 7 | $z + y - x = 3x + 3z - y$ | |
| $7 \pm$ | 8 | $2y = 4x + 2z$ | |
| $5 - 8$ | 9 | $2x - z = s - 4x - 2z$ | |
| $9 + 4x + 2z$ | 10 | $6x + z = s = 100$ | |
| $4 + 6$ | 11 | $2x + 4z = 2s = 200$ | |
| $10 \times \bar{4}$ | 12 | $24x + 4z = 4s = 400$ | |
| $12 - 11$ | 13 | $22x = 2s = 200$ | |
| $13 \div 22$ | 14 | $x = \frac{s}{11} = \frac{100}{11} = 9 \frac{1}{11}$ liv. | |
| $10 - 6x$ | 15 | $z = s - 6x = 100 - \frac{600}{11} = 45 \frac{1}{11}$ liv. | |
| $8 \div 2$ | 16 | $y = 2x + z = \frac{200 + 500}{11} = \frac{700}{11} = 63 \frac{7}{11}$ l. | |

*Réponse.* Le { premier / second / troisiéme } a { 9 liv. 15 sols 9 $\frac{9}{11}$ den. / 45 liv. 9 sols 1 $\frac{1}{11}$ den. / 63 liv. 12 sols 8 $\frac{1}{11}$ den. }

---

*Question* 26. Trois hommes ont chacun une telle somme d'argent, que si l'argent du premier & du second

étoit ajouté à la moitié de celui du troisiéme, la somme seroit 92 livres; si l'argent du second & du troisiéme étoit ajouté au tiers de celui du premier, la somme seroit aussi de 92 livres; & enfin si le quart de l'argent du second étoit ajouté à l'argent du premier & du troisiéme, la somme seroit encore de 92 l. Combien ont-ils chacun ?

Soit $x$ l'argent du premier, $z$ celui du second, & $y$ celui du troisiéme.

| | | |
|---|---|---|
| On aura | 1 | $x + z + \frac{1}{2}y = s$ |
| | 2 | $\frac{1}{3}x + z + y = s$ par la question, & $s = 92$ |
| | 3 | $\frac{1}{4}z + x + y = s$ |
| 1, 2 | 4 | $x + z + \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}x + z + y$ |
| $4 - z$ | 5 | $x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}x + y$ |
| $5 \times \overline{2} \times \overline{3}$ | 6 | $6x + 3y = 2x + 6y$ |
| $6 \pm$ | 7 | $4x = 3y$ |
| $2 \times \overline{3}$ | 8 | $x + 3z + 3y = 3s$ |
| $8 - 7$ | 9 | $x + 3z = 3s - 4x$ |
| $9 - x$ | 10 | $3z = 3s - 5x$ |
| $10 \div \overline{3}$ | 11 | $z = \frac{3s - 5x}{3}$ |
| $3 \times 4$ | 12 | $z + 4x + 4y = 4s = 368$ |
| $12 - 2$ | 13 | $3\frac{2}{3}x + 3y = 3s = 276$ |
| 13, 7 | 14 | $3\frac{2}{3}x + 4x = 3s = 276$ |
| $14 \times \overline{3}$ | 15 | $11x + 12x = 9s = 826$ |
| $15 \div \overline{23}$ | 16 | $x = \frac{9s}{23} = \frac{828}{23} = 36$ l. pour le premier. |
| 11 | 17 | $z = \frac{3s + 5x}{3} = \frac{96}{3} = 32$ l. pour le second |
| $7 \div \overline{3}$ | 18 | $y = \frac{4x}{3} = \frac{144}{3} = 48$ l. pour le troisiéme. |

*Question* 27. Quatre hommes en se promenant trouverent une bourse de louis, chacun en prit un nombre au hazard; ensuite comparant ces nombres, ils trouverent que

que si le premier tiroit 25 louis du second, il en auroit autant qu'il en resteroit au second; si le second en tiroit 30 du troisiéme, il auroit le triple de ce qui resteroit au troisiéme; si le troisiéme en tiroit 40 du quatriéme, il auroit le double de ce qui resteroit au quatriéme : enfin si le quatriéme en tiroit 50 du premier, il en auroit trois fois autant qu'il en resteroit au premier, avec 5 louis de plus. On demande combien chacun a de louis.

Soit $x$ la premiere somme, $z$ la seconde, $y$ la troisiéme, & $u$ la quatriéme.

| | | | |
|---|---|---|---|
| On aura | 1 | $x + 25 = z - 25$ | par la question. |
| | 2 | $z + 30 = 3y - 90$ | |
| | 3 | $y + 40 = 2u - 80$ | |
| | 4 | $u + 50 = 3x - 145$ | |
| $1 + 25$ | 5 | $x + 50 = z$ | |
| $2 - 30$ | 6 | $z = 3y - 120$ | |
| 5, 6 | 7 | $x + 50 = 3y - 120$ | |
| $7 + \overline{120}$ | 8 | $x + 170 = 3y$ | |
| $8 \div \overline{3}$ | 9 | $y = \frac{x + 170}{3}$ | |
| $3 - \overline{40}$ | 10 | $y = 2u - 120$ | |
| 9, 10 | 11 | $2u - 120 = \frac{x + 170}{3}$ | |
| $11 + \overline{120}$ | 12 | $2u = \frac{x + 170}{3} + 120 = \frac{x + 530}{3}$ | |
| $12 \div 2$ | 13 | $u = \frac{x + 530}{6}$ | |
| $4 - \overline{50}$ | 14 | $u = 3x - 195$ | |
| 13, 14 | 15 | $3x - 195 = \frac{x + 530}{6}$ | |
| $15 \times \overline{6}$ | 16 | $18x - 1170 = x + 530$ | |
| $16 \pm$ | 17 | $17x = 1700$ | |
| $17 \div \overline{17}$ | 18 | $x = 100$ | nombre des louis du 1er |
| par le 5e | 19 | $z = 150$ | du 2e |
| par le 9e | 20 | $y = 90$ | du 3e |
| par le 14e | 21 | $u = 105$ | du 4e |

*Question* 28. Quatre hommes ont chacun une somme d'argent, le tout monte à 250 livres ; si l'on ajoute 8 liv. à la somme du premier, il aura précisément autant que le second, diminué de 8 livres, & huit fois autant que le troisiéme, mais seulement la huitiéme partie de l'argent du quatriéme ; combiĕn ont-ils chacun ?

Soient les quatre sommes $x$, $z$, $y$, $u$.

| | | |
|---|---|---|
| On a donc | 1 | $x + z + y + u = s$ |
| | 2 | $x + b = z - b$ |
| | 3 | $yb = \frac{u}{b} = x + b$ |
| $2 + b$ | 4 | $x + 2b = z$ |
| $3 \div b$ | 5 | $y = \frac{x+b}{b}$, parce que $yb = x + b$ |
| $3 \times b$ | 6 | $u = bx + bb$ ; car $\frac{u}{b} = x + b$ |
| $4 + 5 + 6$ | 7 | $z + y + u = x + 2b + \frac{x+b}{b} + bx + bb$ |
| $1 - x$ | 8 | $z + y + u = s - x$ |
| 7, 8 | 9 | $x + 2b + \frac{x+b}{b} + bx + bb = s - x$ |
| $9 \times b$ | 10 | $bx + 2bb + x + b + bbx + bbb = bs - bx$ |
| $10 \pm$ | 11 | $2bx + bbx + x = bs - bbb - 2bb - b$ |
| $11 \div$ | 12 | $x = \frac{bs - bbb - 2bb - b}{2b + bb + 1} = 16{,}691358$, &c. |
| par le 4ᵉ | 13 | $z = x + 2b = 32{,}691358$, &c. |
| par le 5ᵉ | 14 | $y = \frac{x+b}{b} = 3{,}086419$, &c. |
| par le 6ᵉ | 15 | $u = bx + bb = 197{,}530864$, &c. |

(Aux lignes 1–3 :) par la question, soit $s = 250$, & $b = 8$, ou à tout autre nombre à volonté.

| C'est-à-dire | | liv. | sols | den. |
|---|---|---|---|---|
| | $x$ = | 16 | 13 | 9,92592 |
| | $z$ = | 32 | 13 | 9,92592 |
| | $y$ = | 3 | 1 | 8,74056 |
| | $u$ = | 197 | 10 | 7,40736 |

Donc $x + z + y + u$ = 249 19 11,99976, ce qui devroit produire exactement 250 livres, somme proposée dans la question ; mais ce qui manque de cette

ſomme vient de l'imperfection des parties décimales qui n'ont pas été continuées plus loin.

*Queſtion* 29. Pluſieurs Marchands entrent en ſociété, chacun met en fonds 65 fois autant de livres qu'il y a d'aſſociés, & ils gagnent par ce commerce autant de livres par 100 qu'il y a d'aſſociés; ſi l'on ajoute à leur gain 10 l. 10 ſols, & ſi l'on en ſouſtrait cette ſomme, le produit de cette ſomme par cette différence ſera 6491 liv. 6 ſ. 3 d. Combien y a-t-il de Marchands, &c ?

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $x =$ nombre des Marchands. |
| $1 \times \overline{65}$ | 2 | $65x =$ la miſe de chacun. |
| $2 \times x$ | 3 | $65xx =$ la miſe totale. |
| Et | 4 | $100 : x :: 65xx : \frac{65xxx}{100}$ par la queſtion. |
| c'eſt-à-dire | 5 | $\frac{65xxx}{100} =$ le gain total. |
| $5 + \overline{10,5}$ | 6 | $\frac{65xxx}{100} + 10,5$ |
| $5 - \overline{10,5}$ | 7 | $\frac{65xxx}{100} - 10,5$ |
| $6 \times 7$ | 8 | $\frac{4225xxxxxx}{10000} - 110,25 = 6491,3125$, par la queſtion. |
| $8 \times 10000$ | 9 | $4225x^6 - 1102500 = 64913125$ |
| $9 +$ | 10 | $4225x^6 — 66015625$ |
| $10 \div \overline{4225}$ | 11 | $x^6 = \frac{66015625}{4225} = 15625$ |
| 11 ▱ 6 | 12 | $x = \sqrt[6]{15625} = 5$, nombre des Marchands. |
| $12 \times \overline{65}$ | 13 | $65x = 325$, nombre des livres que chacun a mis. |

*Queſtion* 30. Trois Marchands joignent leurs fonds; celui du premier eſt moindre que celui du ſecond de 13 l. celui du ſecond & du troiſiéme étoient de 175 liv. En négociant ils ont gagné 48 liv. plus que la miſe totale; la partie proportionnelle du gain du premier étoit 78 liv. Quel eſt le fonds & le gain de chacun ?

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $x+z+y=s$, la mise totale, $x$, $z$, $y$, la mise de chacun. |
| | 2 | $s+48=$ gain total. |
| Et | 3 | $x+13=z$ } par la question. |
| | 4 | $z+y=175$ } par la question. |
| $4+x$ | 5 | $x+z+y=175+x$ |
| 1, 5 | 6 | $s=175+x$ |
| 6, 2 | 7 | $s+48=223+x$ |
| Mais | 8 | $175+x:223+x::x:78$ par la quest. |
| 8 ∷ | 9 | $xx+223x=78x+13650$ |
| $9-78x$ | 10 | $xx+145x=13650$ |
| 10 C □ | 11 | $xx+145x+5256,25=18906,25$ |
| 11 ▱ 2 | 12 | $x+72,5=\sqrt{18906,25}=137,5$ |
| $12-\overline{72,5}$ | 13 | $x=137,5-72,5=65$ |
| 3, | 14 | $z=x+13=78$ |
| $4-14$ | 15 | $y=97$ |
| Donc | 16 | $65:78::78:93$ liv. 12 f. $=$ gain de $z$. |
| Et | 17 | $65:78::97:116$ liv. 8 f. $=$ gain de $y$. |
| *Preuve* | 18 | 116 l. 8 f. $+$ 93 l. 12 f. $+$ 78 l. $=$ 288 l. le gain. |
| | 19 | $65+78+97=240$, mise totale. |
| $18-19$ | 20 | $288-240=48$, gain de plus que la mise. |

*Question* 31. Un Pere en mourant laisse tout son bien à ses trois enfans en cette maniere · il en donne à l'aîné la moitié moins 44 livres ; au second le tiers & 14 liv. de plus, & au cadet le reste, qui se trouve moindre que la part du second de 82 liv. Quelle est la portion de chacun ?

Soient $x$, $z$, $y$ les trois parts, & $s$ la somme totale.

| | | | |
|---|---|---|---|
| On aura | 1 | $x+z+y=s$ | par la question. |
| | 2 | $x=\frac{1}{2}s-44$ | |
| | 3 | $z=\frac{1}{3}s+14$ | |
| | 4 | $y=\frac{1}{3}s+14-82$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 2+3+4 | 5 | $x + z + y = \frac{2}{3}s + \frac{s}{2} - 98$ |
| 1, 5 | 6 | $s = \frac{2}{3}s + \frac{s}{2} - 98$ |
| $6 \times \overline{3}$ | 7 | $3s = 2s + \frac{3s}{2} - 294$ |
| $7 \times \overline{2}$ | 8 | $6s = 4s + 3s - 588$ |
| 8 ± | 9 | $s = 588$, ſomme totale laiſſée. |
| 2, 9 | 10 | $x = \frac{588}{2} - 44 = 250$, portion de l'aîné. |
| 3, 9 | 11 | $z = \frac{588}{3} + 14 = 210$, portion du ſecond. |
| 4, 9 | 12 | $y = \frac{588}{3} + 14 - 82 = 128$, du cadet, &c. |

*Queſtion* 32. Un homme jouant aux dez gagna au premier coup préciſément autant d'argent qu'il en avoit dans ſa poche ; il gagna au ſecond coup la racine quarrée de ce qu'il avois alors, avec 5 ſchelings de plus, & au troiſiéme coup, il gagna le quarré de tout ce qu'il avoit alors ; après quoi la ſomme totale qu'il avoit ſe trouva de 112 liv. 16 ſols. Quelle ſomme avoit-il au commencement du jeu ?

| | | |
|---|---|---|
| Suppoſons | 1 | $x =$ ſa premiere ſomme. Donc |
| $1 \times \overline{2}$ | 2 | $2x =$ la ſomme après le premier coup. |
| Et | 3 | $5 + \sqrt{2x} =$ gain du ſecond coup. |
| 2 + 3 | 4 | $2x + 5 + \sqrt{2x} =$ ſomme après le ſecond coup. |
| 4 ⊙ 2 | 5 | $4xx + 22x + 25 + 4x\sqrt{2x} + 10\sqrt{2x}$ $=$ gain du troiſiéme coup. Donc |
| 4 + 5 | 6 | $4xx + 24x + 30 + 4x\sqrt{2x} + 11\sqrt{2x}$ $= 2256$ ſchelings. |

Mais pour éviter ces quantités ſourdes, il faut, au lieu de ſuppoſer $x =$ à la premiere ſomme, faire un ſecond eſſai ; ſçavoir,

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $2xx =$ premiere ſomme. |
| $1 \times \overline{2}$ | 2 | $4xx =$ ſomme après le premier coup. |
| Donc | 3 | $2x + 5 =$ ſomme gagnée au ſecond coup. |
| 2 + 3 | 4 | $4xx + 2x + 5$, ſomme reſtante après le ſecond coup. |

| | | |
|---|---|---|
| 4 ⊙ 2 | 5 | $16x^4 + 16x^3 + 44xx + 20x + 25 =$ gain du 3e coup, & par conſéquent |
| 4 + 5 | 6 | $16x^4 + 16x^3 + 48xx + 22x + 30 =$ 2256 ſchelings. |

On peut encore éviter ces équations trop élevées par une troiſiéme ſuppoſition, en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $\frac{xx}{2} =$ premiere ſomme. |
| 1 × 2 | 2 | $xx =$ ſomme après le premier coup. |
| Donc | 3 | $x + 5 =$ gain du ſecond coup. |
| 2 + 3 | 4 | $xx + x + 5 =$ ſomme après le 2[e] coup. |
| ſubſtituant | 5 | $z = xx + x + 5$ |
| | 6 | $zz =$ gain du troiſiéme coup. Donc |
| 5 + 6 | 7 | $zz + z = 2256$ ſchellings, par la queſt. |
| 7 C □ | 8 | $zz + z + 0,25 = 2256,25$ |
| 8 ▱ 2 | 9 | $z + 0,5 = \sqrt{2256,25} = 47,5$ |
| 9 − 0,5 | 10 | $z = 47$ |
| 5, 10 | 11 | $xx + x + 5 = 47$ |
| 11 − 5 | 12 | $xx + x = 42$ |
| 12 C □ | 13 | $xx + x + 0,25 = 42,25$ |
| 13 ▱ 2 | 14 | $x + 0,5 = \sqrt{42,25} = 6,5$ |
| 14 − 0,5 | 15 | $x = 6$ |
| 15 ⊙ 2 | 16 | $xx = 36$ |
| 16 ÷ 2 | 17 | $\frac{xx}{2} = \frac{36}{2} = 18$ { ſchellings qu'il avoit avant que de jouer. |

*Nota.* Pour réſoudre cette derniere équation, j'ai fait trois ſuppoſitions différentes de la valeur de l'inconnue, uniquement pour faire voir aux commençans de quelle maniere ils doivent conſiderer la nature d'une queſtion pour la bien fixer, & pour choiſir les expreſſions propres à leur faire éviter les quantités ſourdes, s'il eſt poſſible, comme dans la premiere ſuppoſition de $x =$

premiere ſomme, &c. Ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe réſoudre ces équations, comme on le verra dans le chapitre ſuivant; mais il y a plus d'art de faire enſorte qu'on puiſſe réſoudre la queſtion par la voie la plus courte & la plus aiſée.

*Queſtion* 33. On ſuppoſe qu'il y a deux cercles égaux, dont les circonférences ſont diviſées en 44310 parties, & que ces cercles ſont tellement placés ſur un eſſieu, qu'ils ſe meuvent dans un ſens contraire l'un à l'autre. Suppoſé donc que l'un des deux ne parcourt que l'une de ces parties égales le premier jour, deux le ſecond, trois le troiſiéme, & ainſi de ſuite en progreſſion arithmétique, 1, 2, 3, 4, 5, &c. Si l'autre parcourt chaque jour le cube du nombre des parties correſpondantes du premier; combien faut-il de jours & de parties pour que les deux mêmes points ſe rencontrent dans l'endroit où ils ont commencé à ſe mouvoir ?

Pour répondre aiſément à cette queſtion (ou à toute autre de cette eſpece) il eſt à propos de préſuppoſer ce lemme.

### *LEMME.*

La ſomme d'une ſuite de cubes, dont les racines ſont en progreſſion arithmétique (le premier terme & la commune différence étant l'unité ou 1) eſt égale au quarré de la ſomme de toutes les racines, comme ici.

| *Termes en progr. arith.* | *Leurs cubes.* |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |
| 3 | 27 |
| 4 | 64 |
| 5 | 125 |
| 6 | 216 |

$21 \times 21 = 441$, *ſomme* de leurs *cubes*.

Soit donc | 1 | $x =$ ſomme des parties du premier cercle.
Et | 2 | $xx =$ ſomme de celles du ſecond

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 3 | $xx + x = 44310$ par la queſtion. |
| 3 C □ | 4 | $xx + x + 0{,}25 = 44310{,}25$ |
| 4 ▱ 2 | 5 | $x + 0{,}5 = \sqrt{44310{,}25} = 210{,}5$ |
| 5 — 0,5 | 6 | $x = 210$, nombre des parties du premier cercle parcourues. |
| 6 ⊙ 2 | 7 | $xx = 44100$, nombre des parties que le ſecond cercle parcourt. |

Maintenant pour trouver le nombre des jours employés à ce mouvement, le premier terme $= 1$ eſt donné, avec la commune différence $= 1$, & la ſomme de tous les termes $= 210$; nous trouverons par là le dernier terme, qui dans ce cas eſt le même que le nombre de tous les termes. Soit $a = 1$ le premier terme, $e = 1$ la différence commune, & $s = 210$ la ſomme de tous les termes, nous trouverons $y =$ dernier terme, par la *ſect.* 1. *chap.* 6. en cette maniere : $yy + ey = 2s + aa - ae$, par le ſeiziéme cas du *coroll.* 2. *ſect.* 1. *chap.* 6. c'eſt-à-dire $yy + y = 210 \times 2 = 420$, &c. Donc $y = 20$, nombre des jours requis.

Je vais maintenant donner un ou deux exemples de la méthode dont on ſe ſert pour les queſtions illimitées, c'eſt-à-dire celles qui ſont ſuſceptibles de différentes réponſes, telles que celles de l'*alliage alternatif* que nous avons promiſes à la fin du *chap.* 9. de l'Arithmétique.

Mais pour abréger cette opération, il eſt à propos de faire connoître aux commençans les deux ſignes de comparaiſon > & <. Le ſigne > ſignifie *plus grand que*, comme $b > a$ ſignifie $b$ plus grand que $a$. Le ſigne < ſignifie *moindre que*, ainſi $b < d$, ſignifie que $b$ eſt moindre que $d$, &c.

## EXEMPLE I.

*Queſtion* 34. Un vendeur de Tabac en a de trois ſortes, l'un de 2 ſols 8 den. la livre, l'autre de 20 den. & la troiſiéme ſorte de 16 den. la livre; il veut en mêler 56 livres, enſorte qu'il puiſſe vendre le mêlange à 22 d. la livre; combien doit-il en prendre de chaque eſpece?

Soit $x =$ la quantité du tabac qui vaut 32 den. la livre,

$z$ = celle du tabac de 20 deniers, & $y$ = celle de 16 den. Donc $x + z + y = 56$ livres, $32x + 20z + 16y = 1232$ den., parce que chaque quantité, multipliée par son prix, égale leur somme, multipliée par le prix moyen.

Cette question étant ainsi fixée, on voit par la premiere régle du chap. 5. précédent qu'elle est capable d'une infinité de réponses, parce qu'on peut prendre un nombre à volonté pour chacune de ces trois lettres, $x$, $z$, $y$, pourvû qu'il soit moindre que 56; mais quoiqu'on puisse le faire à la rigueur, il y a plusieurs circonstances dans ces sortes de questions qui les limitent à des solutions propres ou possibles en nombres entiers, en cette maniere:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Soit donc | 1 | $x + z + y = 56$ | comme ci-devant. |
| Et | 2 | $32x + 20z + 16y = 1232$ | |
| $1 - x$ | 3 | $z + y = 56 - x$ | |
| $2 - 32x$ | 4 | $20z + 16y = 1232 - 32x$ | |
| $3 \times \overline{16}$ | 5 | $16z + 16y = 896 - 16x$ | |
| $4 - 5$ | 6 | $4z = 336 - 16x$ | |
| $6 \div 4$ | 7 | $z = 84 - 4x$. Donc $x < \frac{84}{4} = 21$ | |
| $3 - 7$ | 8 | $y = 3x - 28$. Donc $x > \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$. | |

On voit par les deux derniers cas que la quantité représentée par $x$ doit être moindre que 21, & plus grande que $9\frac{1}{3}$, c'est-à-dire que l'on peut prendre pour $x$ tout nombre entre $9\frac{1}{3}$ & 21, & par conséquent il y a onze réponses à cette question en nombres entiers. Soit $x = 10$, on aura $z = 84 - 40 = 44$ par le septiéme cas, & $y = 30 - 28 = 2$ par le huitiéme cas. De même si $x = 11$, on aura $z = 84 - 44 = 40$ par le septiéme cas, & $y = 33 - 28$ par le huitiéme, & ainsi de suite pour les autres nombres, comme dans la Table suivante.

| x | z | y |
|---|---|---|
| 10 | 44 | 2 |
| 11 | 40 | 5 |
| 12 | 36 | 8 |
| 13 | 32 | 11 |
| 14 | 28 | 14 |
| 15 | 24 | 17 |
| 16 | 20 | 20 |
| 17 | 16 | 23 |
| 18 | 12 | 26 |
| 19 | 8 | 29 |
| 20 | 4 | 32 |

Ainſi il eſt aiſé de trouver toutes les réponſes limitées à une queſtion de cette eſpece, lorſqu'on n'a que trois quantités à mêler ; mais lorſqu'il y en a plus de trois, l'opération eſt un peu plus pénible, parce qu'il faut trouver les limites de toutes les quantités au deſſus de deux, c'eſt-à-dire, que s'il y a quatre quantités dans la queſtion, il faut trouver les limites de deux de ces quantités ; s'il y en a cinq, il faut trouver les limites de trois, &c. comme dans la queſtion ſuivante.

*Queſtion* 34. On veut mêler quatre ſortes de vins, l'une qui vaut 7 ſols 4 den. la meſure, l'autre de 4 ſols 7 den., la troiſiéme de 3 ſols 8 den. & la quatriéme de 2 ſols 9 den. ; combien en faut-il de chaque eſpece pour un mêlange de 63 meſures, enſorte qu'on puiſſe le vendre à 5 ſols 6 deniers la meſure ſans perte, &c ?

Il faut réduire tous ces prix avec le prix moyen à la même dénomination, c'eſt-à-dire en deniers ;

Sçavoir, $\left\{\begin{array}{l} 7\text{ ſ. } 4\text{ d.} = 88\text{ d. } 4\text{ ſ. } 7\text{ d.} = 55\text{ d.} \\ 3\text{ ſ. } 8\text{ d.} = 44\text{ d. } 2\text{ ſ. } 9\text{ d.} = 33\text{ d.} \end{array}\right\}$ & 5 ſols 6 den. = 66 den.

Enſuite ſoit $x$ = la quantité de celui qui vaut 88 den. $z$ = celle de 55 den. $y$ = celle de 44 den. & $u$ = celle de 33 den.

| | | |
|---|---|---|
| On aura | 1 | $x + z + y + u = 63$ par la queſtion. |
| Et | 2 | $88x + 55z + 44y + 33u = 4158 = 63 \times 66$ |
| $1 - x$ | 3 | $z + y + u = 63 - x$ |
| $2 - 88x$ | 4 | $55z + 44y + 33u = 4158 - 88x$ |
| $3 \times \overline{33}$ | 5 | $33z + 33y + 33u = 2079 - 33x$ |
| $4 - 5$ | 6 | $22z + 11y = 2079 - 55x$ |

| | | |
|---|---|---|
| $6 \div 11$ | 7 | $2z + y = 189 - 5x$. Donc $x < \frac{189}{5} = 37\frac{4}{5}$ |
| $3 \times 55$ | 8 | $55z + 55y + 55u = 3465 - 55x$ |
| $8 - 4$ | 9 | $11y + 22u = 33x - 693$ |
| $9 \div 11$ | 10 | $y + 2u = 3x - 63$. Donc $x > \frac{63}{3} = 21$. |

On voit par les 7 & 10^e^ cas, que la quantité du vin représentée par $x$ doit être moindre que $37\frac{4}{5}$ mesures, & plus grande que 21, c'est-à-dire que $x$ doit être un nombre entre 21 & $37\frac{4}{5}$.

D'où il suit qu'on peut avoir seize réponses à cette question par les limites de la seule quantité $x$. Voyons celles de $z$, $y$, & $u$.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 11 | $x = 22$, on aura $5x = 110$, & $3x = 66$ |
| Mais | 12 | $2z + y = 189 - 5x = 79$, par le 7^e^ cas. |
| $12 - 2z$ | 13 | $y = 79 - 2z$. Donc $z < \frac{79}{2} = 39\frac{1}{2}$. |
| De plus | 14 | $z + y + u = 63 - x = 41$ par le 3^e^ cas. |
| $14 - z$ | 15 | $y + u = 41 - z$ |
| $15 - 13$ | 16 | $u = z - 38$. Donc $z > 38$. |

Il suit de là & du 13^e^ cas, que si $x = 22$, on aura $z = 39$, $y = 79 - 2z = 1$, & $u = z - 38 = 1$.

| | | |
|---|---|---|
| De plus, soit | 17 | $x = 23$. Donc $5x = 115$, & $3x = 69$. |
| Mais | 18 | $2z + y = 189 - 5x = 74$ par le 7^e^ cas. |
| $18 - 2z$ | 19 | $y = 74 - 2z$. Donc $z < \frac{74}{2} = 37$ |
| De plus | 20 | $z + y + u = 63 - x = 40$, par le 3^e^ cas. |
| $20 - z$ | 21 | $y + u = 40 - z$ |
| $21 - 19$ | 22 | $u = z - 34$. Donc $z > 34$. |

De là & des 19^e^ cas, il suit que si $x = 13$, $z$ sera ou 35 ou 36.

Encore une fois pour un plus grand éclaircissement.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 23 | $x = 24$. Donc $5x = 120$, & $3x = 72$ |
| Mais | 24 | $2z + y = 189 - 5x = 69$, par le 7^e^ cas. |
| $24 - 2z$ | 25 | $y = 69 - 2z$. Donc $z < \frac{69}{2} = 34\frac{1}{2}$ |
| De plus | 26 | $z + y + u = 63 - x = 39$, par le 3^e^ cas. |
| $26 - z$ | 27 | $y + u = 39 - z$ |
| $27 - 25$ | 28 | $u = z - 30$. Donc $z > 30$. |

De là il ſuit que ſi $x = 24$, $z$ ſera ou 31, 32, 33 ou 34, c'eſt-à-dire tout nombre entre 30 & $34\frac{1}{2}$, par les 25[e] & 28[e] cas, par où l'on trouve aiſément les valeurs de $y$ & $u$,

c'eſt-à-dire ſi $\left\{\begin{array}{l} z = 31 \\ z = 32 \\ z = 33 \\ z = 34 \end{array}\right\}$ on aura $\left\{\begin{array}{l} y = 7 \\ y = 5 \\ y = 3 \\ y \quad 1 \end{array}\right\}$ & $\left\{\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 2 \\ u = 3 \\ u = 4 \end{array}\right.$

Si l'on employe la même méthode avec toutes les autres valeurs de $x$, on trouvera plus de 120 réponſes à cette queſtion en nombres entiers, & ſi l'on veut prendre $x =$ fractions, on aura une infinité de réponſes, tandis que la *régle d'alliage* dans l'Arithmétique ordinaire ne donne qu'une réponſe en fractions; ſçavoir, $x = 31\frac{1}{2}$, $z = 10\frac{1}{2}$, $y = 10\frac{1}{2}$, $u = 10\frac{1}{2}$, comme on peut l'éprouaiſément par cette régle.

Ces deux exemples étant bien compris (ſur-tout ſi le dernier eſt pouſſé bien avant) ſuffiſent pour développer la méthode de limiter les réponſes à toutes ſortes de queſtions de cette eſpece. Je vais donc finir ce chapitre par la ſolution d'une énigme propoſée (mais ſans réponſe) par M. *Jean Kerſey* à la fin de l'appendix à ſon arithmétique, elle nous fournira pluſieurs queſtions curieuſes, par leſquelles nous découvrirons une certaine ſentence, compoſée de trois mots, que l'on doit deviner au moyen des figures placées (ou que l'on ſuppoſe placées) au deſſus des 24 lettres de l'alphabet, en cette maniere :

$\left\{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \text{ \&c. nommés expoſans.} \\ a, b, c, d, e, f, g, \text{ \&c. juſqu'à la derniere lettre.} \end{array}\right.$

Enſorte que ſi l'on trouve l'expoſant de cette lettre, on aura par conſéquent la lettre qui lui appartient.

## ÉNIGME.

1°. Si la différence entre les expoſans de la ſeconde lettre du ſecond mot & de la troiſiéme lettre du premier

mot eſt multipliée par la différence de leurs quarrés, le produit ſera 576, & ſi leur ſomme eſt multipliée par la ſomme de leurs quarrés, ce produit ſera 2336, l'expoſant de ladite troiſiéme lettre étant le plus grand.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Soit | 1 | $x =$ plus grand *expoſant*, ou à celui de la troiſiéme lettre. | |
| Et | 2 | $z =$ moindre, ou à celui de la $2^e$ lettre. | |
| Enſuite { | 3 | $\overline{x-z} \times \overline{xx-zz} = 576$ | } par la qu. |
| | 4 | $\overline{x+z} \times \overline{xx+zz} = 2336$ | |
| 3 × | 5 | $x^3 - xxz - xzz + z^3 = 576$ | |
| 4 × | 6 | $x^3 + xxz + xzz + z^3 = 2336$ | |
| 6 — 5 | 7 | $2xxz + 2xzz = 1760$ | |
| 6 + 7 | 8 | $x^3 + 3xxz + 3xzz + z^3 = 4096$ | |
| 8 ▱ 3 | 9 | $x + z = \sqrt[3]{4996} = 16$ | |
| 4 ÷ $\overline{x+z}$ | 10 | $xx + zz = \frac{2336}{x+z} = \frac{2336}{16} = 146$ | |
| 9 ⊙ 2 | 11 | $xx + 2xz + zz = 256$ | |
| 11 — 10 | 12 | $2xz = 110$ | |
| 10 — 12 | 13 | $xx - 2xz + zz = 36$ | |
| 13 ▱ 2 | 14 | $x - z = \sqrt{36} = 6$ | |
| 9 + 14 | 15 | $2x = 22$ | par où l'on voit que la $3^e$ lettre du premier mot eſt *l*, & la ſeconde du $2^e$ eſt *e*. |
| 15 ÷ $\overline{2}$ | 16 | $x = 11$ | |
| 9 — 16 | 17 | $z = 5$ | |

*Nota.* Pour bien placer les lettres (à meſure qu'on les trouve) il eſt bon de ſuppléer aux places vacantes par des étoiles, en cette maniere :

| Premier mot. | Second mot. | Troiſiéme mot. |
|---|---|---|
| * * *l* * * | * * *e* * * | * * * * * |

2°. Les *expoſans* déja trouvés ſeront les deux *extrêmes* de quatre nombres en progreſſion arithmétique, dont le *moyen*, qui eſt moindre, eſt l'expoſant de la premiere

lettre du troiſiéme mot, & celui qui eſt plus grand eſt l'expoſant de la quatriéme & derniere lettre du premier mot ; par conſéquent 5, 7, 9, 11 ſont les quatre termes en progreſſion arithmétique.

D'où il ſuit que *G* ( dont l'expoſant eſt 7 ) eſt la premiere lettre du troiſiéme mot, & que *i* ( dont l'expoſant eſt 9 ) eſt la quatriéme ou derniere lettre du premier mot ; ce qui étant bien placé donne ** *li* **e***. *G*****.

3°. La ſeconde lettre du troiſiéme mot eſt la même que la troiſiéme du premier, & la cinquiéme du troiſiéme eſt la même que la derniere du premier ; & ainſi les lettres ſeront ainſi rangées : ***li*, **e***, *Gl****i**.

4°. La ſomme des quarrés des expoſans de la premiere & ſeconde lettres du premier mot eſt 520 ; & le produit des mêmes expoſans eſt ſept neuviémes du quarré du plus grand expoſant, qui eſt celui de ladite premiere lettre.

Soit $x$ = plus grand, & $z$ = moindre expoſant.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nous avons | 1 | $xx + zz = 520$ | ſelon la queſtion. |
| Et | 2 | $xz = \frac{7}{9} xx$ | |
| 2 ÷ $x$ | 3 | $z = \frac{7}{9} x$ | |
| 3 ⊙ 2 | 4 | $zz = \frac{49}{81} xx$ | |
| 1 — 4 | 5 | $xx = 520 - \frac{49}{81} xx$ | |
| 5 × $\overline{81}$ | 6 | $81xx = 42120 - 49xx$ | |
| 6 + $49xx$ | 7 | $130xx = 42120$ | |
| 7 ÷ 130 | 8 | $xx = \frac{42120}{130} = 324$ | |
| 8 ▱ 2 | 9 | $x = \sqrt{324} = 18$, ſa lettre eſt *s*. | |
| 3, 9 | 10 | $z = \frac{7}{9} x = 14$, ſa lettre eſt *o*. | |

Ainſi les lettres ſeront ainſi placées : *Soli.* **e*** *Gl****i**.

5°. La différence entre les deux derniers expoſans eſt l'expoſant de la premiere lettre du ſecond mot, c'eſt-à-dire $18 - 14 = 4$, expoſant de *D*. Ces mots ſont donc *Soli De*** *Gl****i**.

6°. La troiſiéme & derniere lettre du ſecond mot, &

la troisiéme du troisiéme mot sont les mêmes que la seconde lettre du premier mot, & par conséquent on aura *Soli Deo Glo*i**.

7°. La somme des exposans de la quatriéme lettre du troisiéme mot & de la sixiéme ou derniere lettre du même mot étant ajoutée à leur produit, donne 35, & la différence de leurs quarrés est 288, l'exposant de la derniere lettre étant le moindre.

Soit $x =$ plus grand, & $z =$ moindre exposant, comme auparavant.

| | | |
|---|---|---|
| On aura | 1 | $xz + x + z = 35$ } par la question. |
| | 2 | $xx - zz = 288$ } |
| $1 - x$ | 3 | $xz + z = 35 - x$ |
| $3 \div \overline{x+1}$ | 4 | $z = \frac{35 - x}{x + 1}$; car $z\,(\overline{x+1}) = xz + z$. |
| $4 \odot 2$ | 5 | $zz = \frac{1225 - 70x + xx}{xx + 2x + 1}$ |
| $2 + 5$ | 6 | $xx = 288 + \frac{1225 - 70x + xx}{xx + 2x + 1}$ |
| $6 \times xx$, &c. | 7 | $x^4 + 2x^3 + xx = 288xx + 576x + 288$ $+ 1225 - 70x + xx$ |
| $7 \pm$ | 8 | $x^4 + 2x^3 - 288xx - 506x = 1513$. |

Cette derniere équation étant résolue par la méthode que nous allons donner dans le chapitre suivant, on trouvera $x = 17$, exposant de la lettre *r*, & par le quatriéme cas, $z = \frac{35 - x}{x + 1} = 1$, exposant de la lettre *a*.

Enfin ces deux lettres étant placées, selon les conditions précédentes, on aura toutes les lettres requises pour dévoiler l'énigme qui consiste dans ces trois mots,

*Soli Deo Gloria.*

# CHAPITRE X.

## *Solution des Equations affectées en nombres.*

AVANT que d'en venir à cette ſolution, je ne dois pas oublier de faire voir comment on a trouvé les théorêmes ou régles pour l'extraction des racines des puiſſances ſimples que j'ai employées dans le Chap. II. de la Part. I.

Je me ſervirai ici des mêmes lettres que j'ai employé dans mon *abregé* d'*Algebre* pour repréſenter les nombres, tant donnés que requis ;

C'eſt-à-dire que

- *G* repréſentera toujours le nombre à réſoudre donné,
- $r =$ tout nombre le plus près qu'on pourra trouver de la vraie racine, ſoit qu'il ſoit plus grand ou plus petit.
- $e =$ l'excès ou partie inconnue de la racine requiſe par laquelle on doit augmenter ou diminuer *r*.

Donc ſi *r* eſt un nombre moindre que la vraie racine, $r + e$ ſera la racine requiſe.

Mais ſi *r* eſt plus grand que la vraie racine, $r - e$ ſera la racine requiſe.

Soit *D* le dividende produit par *G*, lorſqu'on l'a diminué ou diviſé par *r*, &c. ( & par les coefficiens des équations affectées ) ſelon que la nature de la racine l'exige ; ce qui étant préſuppoſé, nous allons procéder à former les théorêmes.

SECTION

## SECTION PREMIERE.

1°. Pour la *racine quarrée*, sçavoir $xx = G$, on demande $x$.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $r + e = x$ |
| 1 ⊙ 2 | 2 | $rr + 2re + ee = xx = G$ |
| 2 — $rr$ | 3 | $2re + ee = xG - rr$, que je nomme $D$, ou $D = G - rr$ |
| Donc | 4 | $\frac{D}{2r+e} = e$ cela démontre la premiere méthode d'extraire la *rac. quar.* sect. 5. ch. II. Part. 1. |
| 3 ÷ 2 | 5 | $re + \frac{1}{2}ee = \frac{G - rr}{2} = D$; |

ce qui fournit ce théorême $\frac{D}{r + \frac{1}{2}e} = e$.

Les opérations arithmétiques de ces deux théorêmes se trouvent dans les exemples de la sect. 2. chap. 11. Part. I. où je renvois le Lecteur, supposant qu'il est à présent en état de les comprendre sans de plus longs discours.

2°. Pour extraire la racine cubique, sçavoir $xxx = G$, trouver $x$.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $r + e = x$, supposant $r$ plus petit que la vraie racine. |
| 1 ⊙ 3 | 2 | $rrr + 3rre + 3ree + eee = xxx = G$ |
| 2 — $rrr$ | 3 | $3rre + 3ree + eee = G - rrr$ |
| 3 ÷ $3r$ | 4 | $re + ee + \frac{eee}{3r} = \frac{G - rrr}{3r} = D$. |

Rejettons $\frac{eee}{3r}$ comme étant de peu de valeur; nous aurons $re + ee = D$, ce qui donne le théorême suivant.

*Théorême* $\left\{ \frac{D}{r + e} = e. \right.$

Par cette régle ou théorême, on a formé les exemples 1 & 2 du premier cas, Sect. 3. Chap. 11. Part. 1. Si on

S

les compare avec ce théorême, on les comprendra fort aisément.

Soit encore $xxx = G$ ( comme auparavant ) & soit $r$ plus grand que la vraie racine,

| | | |
|---|---|---|
| on aura | 1 | $r - e = x$ |
| 1 ⊙ 3 | 2 | $rrr - 3rre + 3ree = x^3 = G$, en rejettant $eee$ comme ci-devant. |
| 2 ± | 3 | $3rre - 3ree = rrr - G$ |
| 3 ÷ 3$r$ | 4 | $re - ee = \frac{rrr - G}{3r} = D$; |

ce qui donne ce théorême $\frac{D}{r - e} = e$.

On a résolu par ce théorême le troisiéme exemple du second cas dans la même section.

3°. Pour extraire la racine quarré-quarrée, comme $x^4 = G$, trouver $x$.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $r + e = x$, supposant $r$ plus petit qu'il ne faut. |
| 1 ⊙ 4 | 2 | $r^4 + 4rrre + 6rree = x^4 = G$, rejettant toutes les puiss. de $e$ au dessus de $ee$. |
| 2 − $r^4$ | 3 | $4rrre + 6rree = G - r^4$ |
| 3 ÷ 2$rr$ | 4 | $2re + 3ee = \frac{G - r^4}{2rr} = D$; |

ce qui donne ce théorême $\frac{D}{2r + 3e} = e$.

On peut par ce théorême extraire la racine quarré-quarrée de tout nombre.

Mais comme je l'ai déja dit dans la section 4 du même chapitre, ces extractions sont plus faciles en les réduisant à deux extractions de la racine quarrée. Voyez l'exemple de la même section 4.

4°. Pour extraire la racine sursolide ou $x^5 = G$, trouver $x$.

Si l'on prend $r$ moindre qu'il ne faut, on aura $r + e = x$, comme auparavant, & $\frac{G - r^5}{5r^3} = D$; ce qui donne ce théorême $\frac{D}{r + 2e} = e$.

Par ce théorême on a extrait la *racine surſolide* de l'exemple 1. de la Sect. 5. du même Chap. 11. Part. 1.

Mais ſi $r$ eſt plus grand qu'il ne faut, on aura $r - e = x$, & $\frac{r^5 - G}{5r^3} = D$; ce qui donne ce théor. $\frac{D}{r - 2e} = e$.

C'eſt par ce dernier théorême qu'on a réſolu le ſecond exemple de la même ſection.

Je crois qu'il n'eſt pas néceſſaire de pouſſer plus loin l'invention de ces théorêmes pour l'extraction des racines des puiſſances ſimples, parce que la méthode eſt générale, quelque élevées que ſoient ces puiſſances, & que par conſéquent on peut aiſément appliquer à tous les cas ce que nous en avons dit juſqu'ici.

## SECTION II.

Quoique j'aie déja démontré la ſolution des équations quadratiques par deux méthodes différentes, l'une en chaſſant le ſecond & moindre terme, & l'autre en achevant le quarré, voyez la ſect. 2. du chap. 8. précédent, &c. je ne laiſſerai pas de faire voir comment on peut réſoudre ces équations en nombres par cette méthode générale des ſuites, dans laquelle ſi le premier $r$ s'eſt trouvé égal à la premiere vraie racine ou côté ſimple du nombre à réſoudre, & ſi l'on y ajoute toujours la valeur ſimple de $e$ ( telle qu'on la trouve ) ces racines ſe trouveront extraites, ſans en venir à une ſeconde opération, comme ci-devant dans les puiſſances ſimples.

*Premier cas.* Soit $xx + 2bx = G$, il faut trouver la valeur de $x$.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $r + e = x$ |
| 1 ⊙ 2 | 2 | $rr + 2re + ee = xx$ |
| 1 × 2b | 3 | $2br + 2be = 2bx$ |
| 2 + 3 | 4 | $rr + 2br + 2re + 2be + ee = xx + 2bx = G$ |
| 4 — rr, &c. | 5 | $2re + 2be + ee = G - rr - 2br$ |
| 5 ÷ 2 | 6 | $re + be + \frac{1}{2}ee = \frac{1}{2}G - \frac{1}{2}rr - br = D$; |

ce qui donne ce théorême $\frac{D}{r + b + \frac{1}{2}e} = e$.

Soit $b = 364$, & $G = 38692865$. Si $r = 6000$, on aura $rr = 36000000$, & $2br = 4368000$.
Mais $36000000 + 4368000 = 40368000 > 38692865 = G$ : donc le premier $r < 6000$. Soit $r = 5000$, on aura

| | | | |
|---|---|---|---|
| Premier $r =$ | 5000 | $\frac{1}{2}G = 19346432,5$ | |
| $b =$ | 364 | $-\frac{1}{2}rr - br = 14320000,$ | |
| $1^{er}$ $r + b =$ | 5364 | $5026432, = D$ | $(800 = e$ |
| $+ \frac{1}{2}e =$ | 400 | 46112 | |
| $1^{er}$ *diviseur.* | 5764 | 41523 | $(60 = e$ |
| $2^{d}$ $r + b =$ | 6164 | 37164 | |
| $+ \frac{1}{2}e =$ | 30 | 43592,5 | $(7 = e$ |
| $2^{d}$ *diviseur.* | 6194 | 43592,5 | $867 = e$ |
| $3^{e}$ $r + b =$ | 6224 | (0) | |
| $+ \frac{1}{2}e =$ | 3,5 | | |
| $3^{e}$ *diviseur.* | 6227,5 | | |

Le premier $\left.\begin{array}{r} r = 5000 \\ + e = 867 \end{array}\right\} = 5867 = x$ requis.

*Second cas.* Si $xx - 2bx = G$, en faisant comme ci-devant, on aura ce théorême $\frac{D}{r - b + \frac{1}{2}e} = e$, &c.

Et dans le *troisiéme cas*, $2bx - xx = G$, on aura ce théorême $\frac{D}{b - r + \frac{1}{2}e}$, &c. comme auparavant.

Je crois qu'il est inutile d'embarrasser le Lecteur dans l'opération de ces deux théorêmes en nombres, parce que s'il a bien compris le dernier exemple du premier cas, les autres seront aisés ; ce n'est pas que la méthode d'achever le quarré ne soit très-facile, comme on peut l'avoir observé dans plusieurs opérations des questions de ce chapitre.

## SECTION III.

DANS la ſolution de toutes les équations affectées qui ſont au deſſus des quadratiques ( ou d'un degré plus élevé ) le meilleur moyen eſt de prendre $r =$ à la racine la plus approchante de l'équation, & l'on aura $r + e = x$, ſi $r$ eſt moindre que la vraie racine, ou $r - e = x$, ſi $r$ eſt plus grand ( comme au commencement de ce chapitre ).

Il faut auſſi rejetter toutes les puiſſances de la partie ( $e$ ) inconnue de la racine au deſſus du quarré, comme nous avons fait dans l'invention des théorêmes pour les puiſſances ſimples. C'eſt donc pour ſuppléer au défaut de ces puiſſances ( qui ſurpaſſent $ee$ dans le théorême ) que l'opération doit être répétée, comme dans l'exemple de l'extraction de la racine cube, *ſect.* 3. *chap.* 11. *part.* 1$^{re}$, c'eſt-à-dire lorſque les figures dans la racine doivent avoir plus de trois places. ( Voyez la fin de la ſect. 7. chap. 11. Part. 1. ).

Soit $xxx + bx = G$, on demande $x$.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $r + e = x$, en ſuppoſant $r$ plus petit que la vraie racine. |
| 1 ⊙ 3 | 2 | $rrr + 3rre + 3ree = xxx$ |
| 1 × $b$ | 3 | $br + be = bx$ |
| 2 + 3 | 4 | $rrr + br + 3rre + be + 3ree = xxx + bx = G$ |
| 4 ÷ 3$r$ | 5 | $\frac{1}{3} rr + \frac{1}{3} b + re + \frac{be}{3r} + ee = \frac{G}{3r}$ |
| 5 — &c. | 6 | $re + \frac{be}{3r} + ee = \frac{G}{3r} - \frac{1}{3} rr - \frac{1}{3} b = D$; |

ce qui donne ce théorême $\frac{D}{r + \frac{b}{3r} + e} = e$.

Mais ſi l'on prend $r$ plus grand qu'il ne faut, on aura $re + \frac{be}{3r} - ee = \frac{1}{3} rr + \frac{1}{3} b - \frac{G}{3r} = D$; ce qui donne ce théorême $\frac{D}{r + \frac{b}{3r} - e} = e$.

On peut trouver la valeur de $x$ par l'un de ces deux théorêmes, ou même autrement, comme dans l'exemple suivant.

Soit $xxx + 24x = 587914$. Ici $b = 24$. Soit le premier $r = 90$, on aura $r^3 = 729000 > 587914$, sans y ajouter $24 \times 90$; donc $r < 90$. Supposons encore $r = 80$, on a $r^3 = 512000$, & $24r = 1920$ : mais $5120000 + 1920 = 513920 < 587914$; donc $r > 80$, mais plus près de 80 que de 90. Donc

| | | |
|---|---|---|
| on aura | 1 | $r + e = x$, $r$ plus petit que la vraie racine. |
| 1 ⊙ 3 | 2 | $rrr + 3rre + 3ree = xxx$ |
| $1 \times 24$ | 3 | $24r + 24e = 24x$ |
| 2 en nomb. | 4 | $512000 + 19200e + 240ee = xxx$ |
| 3 en nomb. | 5 | $1920 + 24e = 24x$ |
| $4 + 5$ | 6 | $513920 + 19224e + 240ee = 587914$ |
| $5 - 513920$ | 7 | $19224e + 240ee = 73994$ |
| $7 \div 240$ | 8 | $88,1e + ee = 308,31 = D$ |
| $8 \div$ &c. | 9 | $e = \frac{D}{80,1 + e}$. |

*Opération* 80,1 ) 308,31 = $D$ ( 3,7 = $e$

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Opération* 80,1 | 308,31 = $D$ | ( 3,7 = $e$ | |
| $+ e = 3$ | 249,3 | Premier $r = 80$ | |
| 1^er^ *Divis.* 83,1 | 59,01 | $+ e = 3,7$ | |
| $+ e = 3,7$ | 58,66 | $r + e = 83,7$ | |
| 2. *Divis.* 83,8 | ,35. | | |

ou plutôt nouveau $r = 83,7$ pour une seconde opération, lequel étant élevé au cube & essayé (comme ci-devant) se trouvera plus grand que la vraie racine; donc

| | | |
|---|---|---|
| on aura | 1 | $r - e = x$ |
| 1 ⊙ 3 | 2 | $rrr - 3rre + 3ree = xxx$ |
| $1 \times 24$ | 3 | $24r - 24e = 24x$ |
| 2 en nomb. | 4 | $586376,253 - 21017,07e + 251,1ee = xxx$ |
| 3 en nomb. | 5 | $2008,8 - 24e = 24x$ |
| $4 + 5$ | 6 | $588385,053 - 21041,07e + 251,1ee = 587914$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\cdot 6 \pm$ | 7 | $21041,07e - 251,1ee = 471,053$ |
| $7 \div 251,1$ | 8 | $83,7955e - ee = 1,87595778 = D$ |
| $8 \div$ | 9 | $e = \dfrac{D}{83,7955 - e}$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2^e *opération.* | 83,7955 ) | 1,87595778 | (,0223 = $e$ |
| $-e =$ | ,02 | 1,675510 | |
| 1^er *Diviseur* | 83,7755 | ,2004477 | |
| $-e =$ | ,002 | ,1675470 | |
| 2^e *Diviseur* | 83,7735 | ,03290078 | |
| $-e =$ | ,0003 | ,02513196 | |
| 3^e *Diviseur* | 83,7732 | ,00776882 | |

Ayant une fois trouvé la moitié du nombre des figures pour la valeur de $e$, il est inutile de former de nouveaux diviseurs ( comme ci-devant ) car on trouvera aussi exactement le reste des figures par la seule Division simple, en cette maniere :

Le dernier Diviseur est 83,7732 )

,007768820
7539588
2292320
1675464
6168560
5864124, &c.

( ,0223 = $e$
,0000927 } Ajoutez
,0223927 = $e$

Soit $r = 83,7$
$-e =$ ,0223927
$r - e = 83,6776073 = x$

Mais si l'on veut une plus grande exactitude, on peut prendre $r = 83,6776073$, & en venir à une troisiéme opération, qui produira 27 figures pour la valeur de $x$, c'est-à-dire que chaque opération produira le triple du nombre des figures du précédent $r$ ; & ce triple de figures

dans la racine en chaque opération a lieu, & doit se remarquer dans la solution de toutes les équations affectées (quelque élevées qu'elles soient) si on les résout par cette méthode. Voyez sur cela la fin du Chap. II. de la premiere partie.

### EXEMPLE II.

Soit $xxx - bx = G$, on demande $x$.

Si $r + e = x$, on aura $re - \frac{\frac{1}{3}be}{r} + ee = \frac{\frac{1}{3}G}{r} + \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}rr = D$;

Ce qui donne ce théorême $\left\{ \frac{D}{r - \frac{\frac{1}{3}b}{r} + e} = e. \right.$

Mais si $r - e = x$, on aura $re + \frac{\frac{1}{3}be}{r} + ee = \frac{\frac{1}{3}G}{r} + \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}rr = D$;

ce qui donne ce théorême $\left\{ \frac{D}{r + \frac{\frac{1}{3}b}{r} + e} = e. \right.$

Ou autrement, comme dans le dernier exemple.

Soit $xxx - 6438x = 104785688$. Ici $b = 6438$. Soit le premier $r = 500$. $rrr = 125000000$, & $br = 3219000$; donc $125000000 - 3219000 = 121781000$. Mais $121781000 > 104785683$. Donc $r < 500$.

Soit encore $r = 400$, $rrr = 64000000$, & $br = 2575200$, on aura donc $64000000 - 2575200 = 61424800$. Mais $61424800 < 104785688$; donc $r > 400$. Donc $r$ est entre 400 & 500, mais plus près de 500.

Soit donc $r = 500$ plus grand que la vraie racine.

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $r - e = x$ |
| 1 ⊙ 3 | 2 | $rrr - 3rre + 3ree = xxx$ |
| 1 × $b$ | 3 | $br - be = bx$ |
| 2 en nomb. | 4 | $125000000 - 750000e + 1500ee = xxx$ |
| 3 en nomb. | 5 | $3219000 - 6438e = 6438x$ |
| 4 − 5 | 6 | $121781000 - 743562e + 1500ee = 104785688$ |

| | | |
|---|---|---|
| 6 $\pm$ | 7 | $743562e - 1500ee = 16995312$ |
| 7 $\div$ 1500 | 8 | $495e - ee = 11330 = D.$ |
| 8 $\div$ | 9 | $e = \frac{D}{495 - e}.$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Opération* | 495 ) | 11330 | ( 23,8 $= e$ |
| $-e =$ | 20 | 950 | |
| 1[er] *Diviseur* | 475 ) | 1830 | Premier $r = 500$ |
| $-e =$ | 3 | 1416 | $-e = 23,8$ |
| 2[e] *Diviseur* | 472 | 414,0 | $r - e = 476,2 = x$ |
| | | 377,0 | |

Soit le nouveau $r = 476$ pour une ſeconde opération, $r^3 = 107850176$, & $br = 306488$. Mais $107850176 - 306448 = 104785688$, le même que le nombre à réſoudre. Donc $x = 476$ précisément.

## *Exemple III.*

Soit $bx - xxx = G$; on demande $x$.

Si $r + e = x$, on a $\frac{\frac{1}{3}be}{r} - re - ee = \frac{\frac{1}{3}G}{r} + \frac{1}{3}rr - \frac{1}{3}b = D$; ce qui donne ce théorême $\left\{ \frac{D}{\frac{\frac{1}{3}b}{r} - r - e} \right. = e.$

Mais ſi $r - e = x$, on a $re - \frac{\frac{1}{3}b}{r} - ee = \frac{\frac{1}{3}G}{r} + \frac{1}{3}rr - \frac{1}{3}b = D$; ce qui donne ce théorême $\left\{ \frac{D}{r - \frac{\frac{1}{3}b}{r} - e} \right. = e.$

Ou autrement, comme dans les deux derniers exemples, en cette maniere :

Soit $123456x - xxx = 12272861$. Ici $b = 123456$. Soit le premier $r = 200$; donc $rrr = 8000000$, & $br = 24691200$. Mais $24691200 - 8000000 = 16691200 > 12272861$. Donc $r$ eſt ici moindre que la vraie racine, parce que la plus haute puiſſance eſt — ou négative.

Suppoſons donc encore $r = 300$, on aura $r^3 =$

27000000, & $br = 37036800$; mais $37036800 - 27000000 = 10036800 < 12272861$; donc $r < 300$, & $> 200$. Soit $r = 300$, étant le plus approchant, mais plus grand qu'il ne faut.

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $r - e = x$ |
| 1 ⊙ 3 | 2 | $rrr - 3rre + 3ree = xxx$ |
| 1 × $b$ | 3 | $br - be = bx$ |
| 2 en nomb. | 4 | $27000000 - 270000e + 900ee = xxx$ |
| 3 en nomb. | 5 | $37036800 - 123456e = 123456x$ |
| 5 − 4 | 6 | $10036800 + 146544e - 900ee = 12272861$ |
| 6 − | 7 | $146544e - 900ee = 2236061$ |
| 7 ÷ 901 | 8 | $162e - ee = 2884 = D$ |
| 1 ÷ | 9 | $e = \frac{D}{162 - e}$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Opération.* | 161 ) | 2484 ( 16,6 = $e$. | |
| $-e =$ | 10 | 152 | |
| 1^r *Diviseur.* | 152 ) | 964 | Le premier $r = 300$ |
| $-e =$ | 6 | 876 | $-e = 16,6$ |
| 2^e *Diviseur.* | 146 ) | 88,0 | $r - e = 283,4 = x$. |
| | | 87,6 | |

Ou le nouveau $r = 283$, lequel étant substitué, cubé, &c. se trouvera être la vraie racine $x = 283$.

*Nota.* Ce sont là les trois formules des équations cubiques, comme on les appelle ordinairement, on peut trouver quelque difficulté apparente dans la solution de la troisiéme ou derniere forme, sur-tout pour faire le choix du premier $r$, parce que cette équation est ambigue, & a deux racines positives, l'une plus grande, & l'autre moindre; mais en ayant une fois trouvé une, on aura aisément l'autre par la seule division, comme dans les équations quadratiques. Voyez le chap. 8.

Ainsi dans le dernier exemple, $x = 283$, & $123456x - xxx = 12272861$. Faites ces deux équations $= 0$;

sçavoir, $x - 283 = 0$, & $-xxx + 123456x - 12272861 = 0$.

Ensuite $x - 283)\ -x^3 + 123456x - 1272861\ (-xx$

$$-x^3 + 283xx$$

$$-283xx + 123456x \qquad (-283$$

$$-283xx + \ \ 80089x \qquad (+43367$$

$$+43367x - 12272861$$

$$+43367x - 12272861$$

$$(0) \qquad (0)$$

Par où l'on voit que $-xx - 283x + 43367 = 0$; par conséquent $xx + 283x = 43367$. Cette équation étant résolue donne $x = 110,2722$, &c. qui est la moindre racine de l'équation précédente $bx - xxx - G$, &c.

De cette maniere on peut aisément découvrir toutes les racines possibles & impossibles d'une équation, lorsque l'on a une fois trouvé l'une de ses racines. Ainsi je ne donnerai pas plus d'exemples de cette espece.

Soit $xxx + bxx + cx = G$; on demande $x$.

Soit $b = 74$, $c = 8729$, & $G = 560783$. Par essai (comme ci-devant) on trouvera que la racine la plus approchante est $r = 40$, un peu moindre que la vraie.

| | | |
|---|---|---|
| Soit donc | 1 | $r + e = x$ |
| $1 \times c$ | 2 | $cr + ce = cx$ |
| $1 \odot 2 : \times b$ | 3 | $brr + 2bre + bee = bxx$ |
| $1 \odot 3$ | 4 | $rrr + 3rre + 3ree = xxx$ |
| 2 en nomb. | 5 | $349160 + 8729e$ |
| 3 en nomb. | 6 | $118400 + 5920e + 74ee$ |
| 4 en nomb. | 7 | $64000 + 4800e + 120ee$ |
| $5 + 6 + 7$ | 8 | $531560 + 19449e + 194ee = 560783$ |
| $8 - 531560$ | 9 | $19449e + 194ee = 29223$ |
| $9 \div \overline{194}$ | 10 | $100,2e + ee = 153,06 = D$ |
| $10 \div$ | 11 | $e = \frac{D}{100,2 + e}$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Opération.* | 100,2 ) | 153,06 | ( 1,5 = $e$ |
| $+ e =$ | 1, | 101,2 | |
| 1er *Diviseur* | 101,2 ) | 51,86 | |
| $+ e =$ | ,5 | 50,85 | |
| 2e *Diviseur* | 101,7 | 1,01 | |

Premier $r = 40$
$+ e = 1,5$
$r + e = 41,5 = x.$

Ou le nouvel $r$ pour une seconde opération $= 41,5$, qui étant substitué se trouve plus grand qu'il ne faut.

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $r - e = x$ |
| ensuite | 2 | $cr - ce = cx$ |
| | 3 | $brr - 2bre + bee = bxx$ |
| | 4 | $rrr - 3rre + 3ree = xxx.$ |

Ce qui étant changé en nombres, &c. comme ci-devant, il viendra $20037,75e - 198,5ee = 390,375$, divisant par 198,5, coefficient de $ee$, on aura $100,946e - ee = 1,966624$, &c. $= D$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Opération.* | 100,946 ) | 1,966624 | ( ,019 = $e$ |
| $- e =$ | ,01 | 1,00936 | |
| 1er *Diviseur* | 100,936 | 957264 | |
| $- e =$ | ,009 | 908343 | |
| 2e *Diviseur* | 100,927 | * 489210 | ( ,0004847 |
| | | 403708 | ( ,0194847 = $e$ |
| | | 855020 | |
| | | 807416 | |
| | | 476040 | |
| | | 403708 | |
| | | 72332 | |

* Ici je viens à la Division simple sans former de nouveaux diviseurs.

Le dernier $r = 41,5$
$- e = ,0194847$
$r - e = 41,4805153 = x.$

Soit à résoudre la derniere équation proposée dans l'énigme du chap. 9. $xxxx + bxxx - cxx - dx = G$,

$b = 2$, $c = 288$, $d = 506$, & $G = 1513$. En essayant on trouve que $r$ le plus approchant est $= 20$, un peu plus grand que la vraie racine.

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $r - e = x$ |
| $1 \times d$ | 2 | $dr - de = da$ |
| $1 \odot 2 : \times c$ | 3 | $crr - 2cre + eee = cxx$ |
| $1 \odot 3 : \times b$ | 4 | $brrr - 3brre + 3bree = bxxx$ |
| $1 \odot 4$ | 5 | $r^4 - 4rrre + 6rree = xxxx.$ |

Ce qui étant changé en nombres, & en ayant bien pris la somme, conformément aux signes de l'équation, on aura $50680 - 22374e + 2232ee = 1513$, & divisant par 2232, coefficient de $ee$, on aura $10e - ee = 22 = D$. Donc $\frac{D}{10 - e} = e$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Opération.* | 10 ) | 22 | ( $3 = e$ |
| $- e =$ | 3 | 21 | |
| *Diviseur* | 7 | 1 | |

$$\text{Premier } r = 20$$
$$- e = 3$$
$$r - e = 17 = x \text{ juste.}$$

Voyez la fin du chapitre 9.

Je crois que si le Lecteur a bien observé ce que nous venons de faire pour résoudre ce petit nombre d'équations, il comprendra aisément comment il doit s'y prendre pour toutes sortes d'équations, quelque élevées ou affectées qu'elles soient. Ainsi je ne donnerai pas ici un plus grand nombre d'exemples, mais on les trouvera en chemin faisant dans la seconde *partie*, où l'on verra des équations résolues d'une maniere non commune.

# CHAPITRE XI.

## *De l'Intérêt simple, des Annuités ou Pensions, &c.*

L'Intérêt, ou ce que l'on paye pour le prêt de l'argent, se divise en simple & composé.

## SECTION PREMIERE.

### *De l'Intérêt simple.*

L'Intérêt simple, est celui que l'on paye pour le prêt d'un capital ou d'une somme d'argent livrée pour un tems à un certain taux pour cent, selon la convention entre le Prêteur & l'Emprunteur. Par les loix d'Angleterre, c'est 6 livres pour l'usage de 100 liv. par an, & 12 livres pour deux ans, & ainsi à proportion d'une somme plus grande ou plus petite, & du tems proposé.

Il y a plusieurs méthodes de calculer l'*intérêt simple* ( ou de répondre aux questions sur cet intérêt ) : par exemple, la *Régle* de *Trois* simple & double ( Voyez le chapitre 7. sect. 3. Part. 1. ). D'autres font usage des Tables d'intérêt, calculées pour differens taux. Ainsi le Sieur *Samuel Moreland* a fondé sur les Tables toute sa théorie des intérêts, tant simples que composés, où il a découvert plusieurs erreurs considérables où étoient tombés le Docteur *Newton*, M. *Kersey*, M. *Clavil*, &c. dans le calcul des intérêts, &c. par leurs Tables ; ce qui est trop ennuyeux pour être répeté ici.

Mais je veux dans ce Traité prendre d'autres méthodes, & faire voir que tous les calculs qui ont rapport à l'intérêt simple sont appuyés sur la progression arithmétique, par le moyen de laquelle je formerai des théorêmes généraux qui conviendront à tous les cas. Pour cela

soit { $P$ = au principal ou ſomme miſe à intérêt.
$R$ = la raiſon du taux pour cent par an.
$t$ = tems auquel le principal produit l'intérêt.
$S$ = ſomme du principal & de ſon intérêt.

*Nota*. La raiſon du taux n'eſt que l'intérêt ſimple d'une liv. pour un an, à un taux donné, & on le trouve en cette maniere :

100 : 6 :: 1 : 0,06 = la raiſon à 6 pour cent par an,
ou 100 : 7 :: 1 : 0,07 = la raiſon à 7 pour cent, &c.
De même 100 : 7,5 :: 1 : 0,075 = la raiſon à 7 $\frac{1}{2}$ pour cent.

Si le tems donné eſt un nombre entier d'années, $t$ ſera = nombre entier d'années; mais ſi le tems donné n'eſt qu'une pure partie d'une année, ou des parties d'année mêlées avec des années entieres, il faudra changer ces parties en décimales, & alors $t$ = ces décimales, &c; mais les parties ordinaires de l'année ſe changeront aiſément en fractions décimales, ſi l'on fait attention qu'un

{ jour eſt $\frac{1}{365}$ partie d'une année = 0,00274 preſque.
Mois eſt $\frac{1}{12}$ partie de l'année = 0,0833333, &c.
Quartier eſt $\frac{1}{4}$ d'une année = 0,25.

Cela étant ſuppoſé, j'en viens aux théorêmes.

Soit $R$ = l'intérêt d'une liv. pour un an, comme ci-dev.
Donc $2R$ = l'intérêt d'une liv. pour deux ans.
Et $3R$ = l'intérêt d'une liv. pour trois ans.
$4R$ = l'intérêt d'une liv. pour quatre ans, & ainſi de ſuite pour tout nombre d'années propoſé.

De là il ſuit que l'intérêt ſimple d'une livre eſt une ſuite de termes en progreſſion arithmétique croiſſante, dont le premier terme & la différence commune eſt $R$, & le nombre de tous les termes eſt $t$; donc le dernier terme ſera toujours $tR$ = l'intérêt d'une liv. pour un tems donné exprimé par $t$.

Donc { comme une livre eſt à l'intérêt d'une livre, ainſi le principal ou ſomme donnée eſt à ſon intérêt.

C'eſt-à-dire une liv. : $tR :: P : tPR =$ l'intérêt de P ; donc le *principal* étant ajouté à ſon intérêt, on aura la ſomme requiſe ; ce qui donne ce théorême général.

Théorême $tRP + P = S$.

De là on tire aiſément les trois théorêmes ſuivans.

Théorême 2 $\left\{ \frac{S}{tR+1} = P. \right.$

Théorême 3 $\left\{ \frac{S-P}{tP} = R. \right.$

Théorême 4 $\left\{ \frac{S-P}{RP} = t. \right.$

Par ces quatre théorêmes on peut réſoudre toutes les queſtions ſur l'*intérêt ſimple*.

*Queſtion* 1[re]. A quoi montent 256 livres 10 ſols dans trois ans, un quartier deux mois & 18 jours, à ſix pour cent par an ?

Ici $P$ eſt donné $= 256,5$, $R = 0,06$, & $t = 3,46599$, on aura $S$ par le premier théorême ;

Car trois ans $= 3$
un quartier $= 0,25$
deux mois $= 0,16667 = 0,08333 \times 2$
18 jours $= 0,04932 = 0,00274 \times 18$

Donc $t = 3,46599 \times 0,06 = 0,2079594 = tR$.
& $0,2079594 \times 256,5 = 53,341586 = tPR$,
& $53,341586 + 256,5 = 309841586 = tRP + P = S$, c'eſt-à-dire $309,841586 =$ 309 liv. 16 ſ. 10 d., réponſe requiſe.

*Queſtion* 2. Quel principal ou ſomme miſe à intérêt peut produire un fonds de 309 liv. 16 ſols 10 den. en trois ans, un quartier, deux mois & 18 jours, à ſix pour cent par an ? Ou la même queſtion propoſée autrement.

Que valent en argent comptant 309 liv. 16 ſols 10 d. payables dans trois ans, un quartier, deux mois & 18 jours, en eſcomptant à 6 pour cent, &c ?

Ici

Ici ſont donnés $S = 309,841586$, $R = 0,06$, $t = 3,46599$ (trouvé comme ci-devant). Trouver $P$ par le théorême 2.

1°. $3,46599 \times 0,06 = 0,2079594 = tR$, & $tR + 1 = 1,2079594$) $309,841586 = S$ ( $256,5 = P$, c'eſt-à-dire que $256,5 = 256$ livres 10 ſols eſt la réponſe requiſe.

*Queſtion* 3. A quel taux ou intérêt pour cent, &c. il arrive que 256 liv. 10 ſols montent à 309 liv. 16 ſ. 10 d. en trois ans, un quartier, deux mois & 18 jours ?

Ici ſont donnés $P = 256,5$, $S = 309,841586$, & $t = 3,46599$; on demande $R$ par le théorême 3.

1°. $309,841586 - 256,5 = 53,341586 = S - P$; enſuite $3,46599 \times 256,5 = 889,026435 = tP$, & $tP = 889,026435$) $53,341586$ ( $00,06 =$ la raiſon : Or une liv. : 0,06 :: 100 : 6 = taux requis.

*Queſtion* 4. En combien de tems 256 liv. 10 ſols produiſent un fonds de 309 liv. 16 ſols 10 den. à ſix pour cent, &c.

Nous avons ici $P = 256,5$, $S = 309,841586$, & $R = 0,06$; on demande $t$ par le théorême 4.

1°. $309,841586 - 256,5 = 53,341586 = S - P$, & $256,5 \times 0,06 = 15,39 = PR$,
& $15,39$) $53,341586$ ( $3,46599 = t$, = trois ans, un quartier, deux mois & 18 jours ; *réponſe requiſe*.

On comprend aiſément que ce que l'on fait ici à ſix pour cent, peut ſe faire à un autre taux d'intérêt, en formant la raiſon $R$ en conformité.

### SCHOLIE.

Quoique ſelon les loix & coutumes d'Angleterre on calcule l'intérêt à ſix pour cent ( comme ci-devant ) ; cependant celui qui prend de l'argent à intérêt pour moins d'un an, paye un plus grand intérêt qu'il n'eſt dû raiſonnablement, ſelon les régles de l'Art.

Par exemple, ſi l'on met 100 liv. à intérêt pour un an entier, la ſomme monte à 106 liv. Mais je dis que ſi l'on

paye l'intérêt à la fin de la demi-année, la somme ne montera pas à 103 liv. comme on verra par la proportion suivante.

Soit $s =$ la somme qui doit être payée à la fin de la demi-année, nous aurons $100 : s :: s : 106$, somme payable à la fin de l'année; donc $ss = 10600$, & $s = \sqrt{10600} = 102{,}9563$ = 102 liv. 19 sols $1\frac{1}{2}$ den., ce qui est moins que 103 liv. de $10\frac{1}{2}$ den.; & si la somme se payoit dans un tems plus court que la demi-année, l'erreur seroit encore plus grande.

---

## SECTION II.

*Des Annuités ou Pensions en arrérages, calculées au simple intérêt.*

Les annuités ou pensions, &c. sont dites *arréragées*, lorsqu'étant dûes ou payables tous les ans, ou tous les semestres, &c. on a négligé de les payer un nombre de fois; il est donc question de calculer à quoi montent tous ces payemens, en leur attribuant le taux de l'intérêt simple, depuis le tems que chaque payement particulier a dû se faire. Or pour cela,

soit
- $u =$ l'annuité, pension, ou rente annuelle, &c.
- $t =$ tems qu'on a differé à payer.
- $R =$ raison ou intérêt d'une livre pour un an, comme ci-devant.
- $S =$ somme de l'annuité & de son intérêt.

Donc si $u =$ la rente de la premiere année, qui est dûe sans intérêt.

$Ru =$ l'intérêt
Et $2u =$ la rente } qui sont dûs à la fin de la 2ᵉ année.

$2Ru =$ l'intérêt
Et $3u =$ la rente } dûs à la fin de la 3ᵉ année.

$3Ru =$ l'intérêt } dûs à la fin de la 4[e] année.
$4u =$ la rente }

$4Ru =$ l'intérêt } dûs à la fin de la 5[e] année, & ainsi de
$5u =$ la rente }
suite pour chaque nombre d'années; par où il est évident que $Ru + 2Ru + 3Ru + 4Ru + 5u = S$, somme de toutes les rentes & de leur intérêt, étant en arrérage pendant cinq ans.

D'où il suit que $Ru + 2Ru + 3Ru + 4Ru = S - tu$. Ici $t = 5$.

Divisons tout par $u$; donc $R + 2R + 3R + 4R = \frac{S - \cdot u}{u}$.

Maintenant on trouvera la somme de cette progression (par le chap. 6.) en cette maniere.

Soit $R + 2R + 3R + 4R$, &c. $= z$; donc $1 + 2 + 3 + 4$, &c. $= \frac{z}{R}$.

Ici la somme du premier & dernier termes est $4 + 1 = 5 = t$, & le nombre de tous les termes est $4 = t - 1$. Donc $\frac{t-1}{2} \times t =$ somme de tous les termes, c'est-à-dire $\frac{tt - t}{2} = \frac{z}{R}$; donc $\frac{ttR - tR}{2} = z$, par conséquent $\frac{ttR - tR}{2} = \frac{S - tu}{u}$.

Maintenant on peut aisément tirer de cette équation les théorêmes suivans.

Théorême 1. $\frac{ttRu - tRu + 2tu}{2} = S$, ou $\frac{ttu - tu}{2} R + tu = S$.

Théorême 2. $\frac{2S}{ttR - tR + 2t} = u$.

Théorême 3. $\frac{2S - 2tu}{ttu - tu} = R$.

Soit $\frac{2}{R} - 1 = x$; donc $t = \sqrt{\frac{2S}{Ru} + \frac{xx}{4}} - \frac{1}{2} x$. Théorême 4.

*Question* 1[re]. Si 250 liv. de rente annuelle (ou pension, &c.) n'ont pas été payées pendant sept ans; à quoi

monte-t'elle pendant ce tems-là, à six pour cent pour chaque payement depuis qu'il est dû ?

Ici nous avons $u = 250$, $t = 7$, & $R = 0{,}06$, trouver $S$ par le théorême 1.

1°. $250 \times 7 = 1750 = tu$, $1750 \times 7 = 12250 = ttu$, $12250 - 1750 = 10500 = ttu - tu$, & $\frac{10500}{2} \times 0{,}06 = 315$. Enfin $315 + 1750 = 2065 = S$, réponse requise.

Mais si l'annuité, rente, ou pension est payable par quartier ou semestre, &c. on aura $\frac{0{,}06}{2} = 0{,}03 = R$ pour le payement par semestre, & $\frac{0{,}06}{4} = 0{,}015 = R$ pour le payement par quartier, ou $0{,}045 = R$ pour les payemens par trois quartiers.

*Exemple des payemens par semestres.*

Soient 250 liv. par an, payables par semestres, en arrérages depuis sept ans; à quoi montent-elles, à six pour cent par an pour chaque payement depuis leur échéance ?

Dans cet exemple, nous avons $u = 125 = \frac{250}{2}$, $t = 14$, nombre des payemens; & $R = 0{,}03 = \frac{0{,}06}{2}$, on demande $S$.

1°. $125 \times 14 = 1750 = tu$, $1750 \times 14 = ttu = 24500$. De plus $24500 - 1750 = 22750 = ttu - tu$: ensuite $\frac{22750}{2} = 11375$, & $11375 \times 0{,}03 = 341{,}25$. Enfin $341{,}25 + 1750 = 2091{,}25$, c'est-à-dire $S = 2091$ liv. 5 sols, réponse requise.

*Nota*. Par là on voit que les payemens par semestres sont plus avantageux que par an; car 2091 liv. 5 sols > 2065 liv. de 26 liv. 5 sols, par conséquent les payemens par quartier sont plus avantageux que ceux par semestre.

*Question* 2. Quelle rente annuelle, pension, &c. étant arréragée pendant sept ans, produit un fonds de 2065 liv. à raison de six pour cent par an, &c. depuis l'échéance de chaque payement ?

Nous avons ici $S = 2065$, $t = 7$, & $R = 0{,}06$; il faut trouver $u$ par le théorême 2.

1°. $7 \times 0{,}06 = 0{,}42 = tR$, & $0{,}42 \times 7 = 2{,}94 = ttR$; donc $ttR - tR = 2{,}52$ : enfin $ttR - tR + 2t = 16{,}52$ ) $4130 = 25$ ( $250 = u$, c'est-à-dire que 250 liv. par an, &c. forment le fonds requis 2065 liv.

*Question* 3. En quel tems 250 livres de rente annuelle forment un fonds de 2065 liv. à raison de 6 pour cent, &c. pour la négligence des payemens depuis leur échéance ?

Nous avons ici $u = 250 = 2065$, & $R = 0{,}06$, on demande $t$ par le théorême 4.

1°. $\frac{2}{R} = \frac{2}{0{,}06} = 33{,}3333$, $33{,}3333 - 1 = 32{,}3333 = x = \frac{2}{R} - 1$; ensuite $16{,}1666$, &c. $= \frac{1}{2}x$, & $261{,}3605$, &c. $= \frac{1}{2}xx$. De plus $\frac{4130}{15} = 275{,}333 = 2S - Ru$, & $275{,}3333 + 261{,}3605 = 536{,}6938 = \frac{2S}{Ru} + \frac{1}{4}xx$. Mais $\sqrt{536{,}6938} = 23{,}1666$ : enfin $23{,}1666 - 16{,}1666 = 7 =$ tems requis.

*Question* 4. Si 250 liv. de rente annuelle ayant été arréragées pendant sept ans produisent 2065 liv. en allouant l'intérêt simple pour chaque payement après son échéance, quel doit être le taux de l'intérêt pour cent, &c ?

Nous avons $u = 250$, $S = 2065$, & $t = 7$; trouver $R$ par le théorême 3, en cette maniere :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ttu & = & 12250 \\ -tu & - & 1750 \\ \hline ttu - tu & = & 10500 \end{array}\right. \quad \begin{array}{rcl} 4130 & = & 2S \\ -3500 & = & 2tu \\ \hline 630 & = & 2S - 2tu \end{array} \ (\ 0{,}06 = R.$$

Ensuite $1 : 0{,}06 :: 100 : 6$, taux requis.

---

## SECTION III.

### *La valeur présente des annuités ou pensions, &c. calculées au simple intérêt.*

L'Achat des annuités ou des fermes pour un tems déterminé, dépend de l'égalité qu'il faut trouver entre le principal ou l'argent que l'on compte en achetant, & l'an-

nuité ou rente annuelle en allouant ( ou escomptant ) le même taux d'intérêt aux deux Parties ; ce qui se fait aisément, si l'on sçait y employer tout ensemble les théorêmes respectifs des deux dernieres sections, comme on le verra clairement par la question suivante.

*Question.* Que vaut en argent comptant une rente annuelle de 75 liv. qui doit être perçue pendant neuf ans, en escomptant l'intérêt simple à six pour cent par an ?

1°. Cherchez par le théorême 1. de la derniere section à quoi monteroit la rente annuelle proposée, à six pour cent, si elle avoit été arrégagée pendant neuf ans, en cette maniere :

$u = 75$, $t = 9$, & $R = 0{,}6$ ; on demande $S$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $ttu = 6075$ | Ensuite 2 ) 5400 ( 2700 | | Multipliez |
| $tu = 675$ | $R =$ | 0,06 | |
| $ttu - tu = 5400$ | | 162, | $= 837 = S$. |
| | $+ tu =$ | 675 | |

2°. Cherchez par le théorême 2. sect. 1. quel principal mis à intérêt pour le même tems & au même taux, produiroit 837 liv. $= S$, en cette maniere :

$tR = 0{,}54 = 9 \times 0{,}06$, $tR + 1 = 1{,}54$ ) 837 ( 543,5064 $= P$, c'est-à-dire $P = 543$ liv. 10 sols 1 $\frac{1}{2}$ den., c'est la valeur requise de la rente annuelle de 75 livres pendant neuf ans.

Si l'on fait bien attention à ces deux opérations, on verra aisément comment les deux théorêmes qui les ont produites peuvent en former un seul.

Car 1°. $\frac{ttRu - tRu + 2tu}{2} = S$, & $2PtR + P = S$, par conséquent $2PtR + P = \frac{ttRu - tRu + 2tu}{2}$, & de cette équation on peut tirer les deux théorêmes suivans.

Théorême 1. $\left\{ \frac{ttRu - tRu + 2tu}{2tR + 2} = P \right.$,

ou $\frac{ttR - tR + 2t}{2tR + 2} \times u = P$,

On peut par ce théorême résoudre aisément & promptement par une seule opération toutes les questions de la même espece que la derniere.

Théorême 2. $\left\{ \frac{2PtR + 2P}{ttR + R + 2t} = u \right.$, ou $\frac{tR + 1}{ttR - R + 2t} \times 2P = u$.

Théorême 3. $\left\{ \frac{2P - 2tu}{ttu - tu - 2Pt} = R \right.$.

Soit $\frac{2}{R} - \frac{2P}{u} - 1 = x$, on aura $tt \pm xt = \frac{2P}{Ru}$; ce qui donne ce Théorême 4. $\left\{ \sqrt{\frac{2P}{Ru} + \frac{xx}{4}} \pm \frac{x}{2} = t \right.$.

Par le second & quatriéme théorêmes, on peut aisément répondre à deux questions fort utiles. Par exemple,

1°. Si l'on demande quelle annuité ou rente annuelle on peut acheter avec une somme proposée pour un tems déterminé à un taux d'intérêt donné; cette question se résout par le théorême 2.

2°. Si l'on veut sçavoir pendant combien de tems on doit jouir d'une rente ou pension annuelle, en l'achetant par une somme proposée, à un taux donné d'intérêt, on répondra à toutes les questions de cette espece par le théorême 4.

On suppose dans ces questions que l'acheteur de la rente annuelle commence à en jouir immédiatement après l'achat. Mais si l'on veut trouver la valeur ou l'achat d'une annuité ou rente annuelle, &c. en reversion, c'est-à-dire lorsqu'il doit n'en jouir qu'après un certain tems ou nombre d'années, il faut d'abord chercher à quoi monteroit la somme proposée pour cet achat, si elle étoit mise à intérêt, pendant le tems que l'acheteur ne jouit pas encore de l'annuité, &c. & faire de ce total le prix de l'achat pour procéder ensuite comme dans les deux dernieres questions, &c.

*Nota*. Par la premiere question de cette section, on trouve aisément comment on doit former l'équation des

payemens entre le débiteur & le créancier à chaque taux d'intérêt, sans causer aucun dommage à l'une des deux Parties.

C'est-à-dire lorsque l'on doit payer plusieurs sommes d'argent en differens tems, trouver le tems auquel tous les payemens soient valablement déchargés tout à la fois, comme s'il falloit payer une somme au bout de deux mois, une autre au bout de six mois, & si l'on veut une troisiéme au bout de huit mois, &c. & que l'on veuille trouver le tems où l'on puisse compter toutes ces sommes par un seul payement sans aucune perte, &c.

---

## CHAPITRE XII.

### *De l'Intérêt composé, & Annuités, &c.*

L'INTEREST composé est celui qui se prend sur le principal & son intérêt joints ensemble, à mesure que l'intérêt est dû; ensorte que dans chaque payement, ou dans le tems que les payemens doivent être faits, il se forme un nouveau capital, & c'est pour cela qu'on le nomme *intérêt* sur *intérêt*, ou *intérêt composé*.

Par exemple, si l'on a prêté 100 liv. pour deux ans, à 6 pour cent par an, intérêt sur intérêt, la somme totale au bout de la premiere année ne monte qu'à 106 livres comme dans le simple intérêt; mais pour la seconde année, ces 106 liv. deviennent un principal, qui produit à la fin de la seconde année 112 liv. 7 sols 2 $\frac{1}{2}$ den.; au lieu que par l'intérêt simple elle ne seroit montée qu'à 112 l.

Quoiqu'il ne soit pas permis de prêter son argent à un intérêt composé, cependant en achetant des annuités ou des pensions, &c. & en prenant des fermes en reversion, on est fort en usage d'accorder l'intérêt composé à celui qui achete en argent comptant, & par conséquent il est très-à-propos d'être au fait de ce calcul.

## SECTION PREMIERE.

### *De l'Intérêt composé.*

Soit $\begin{cases} P = \text{le principal mis à intérêt.} \\ t = \text{tems pendant lequel l'intérêt court.} \\ S = \text{la somme du principal \& de l'intérêt} \end{cases}$ comme auparav.
$R$ = la somme d'une liv. & de son intérêt pour un an, à un taux donné, qu'on trouvera en cette maniere :

$100 : 106 :: 1 : 1{,}06 =$ { somme d'une liv. & intérêt, à 6 pour cent.

Ou $100 : 105 :: 1 : 1{,}05 =$ somme d'une liv. & de son intérêt, à 5 pour cent, & ainsi des autres.

Donc si
- $R$ = somme d'une liv. & de son intérêt pour un an, à un taux quelconque.
- $RR$ = somme d'une liv. & de son intérêt pour deux ans.
- $RRR$ = somme pour trois ans.
- $R4$ = somme pour quatre ans.
- $R5$ = somme pour cinq ans. Ici $t = S$.

Car $1 : R :: R : RR :: RR : R^3 :: R^3 : R^4 :: R^4 : R^5$, &c. en $\div\!\div$ ; c'est-à-dire comme une livre est au montant d'une livre & de son intérêt à la fin d'une année ; ainsi ce montant est au montant d'une livre & de l'intérêt à la fin de deux ans, &c.

Par où l'on voit clairement que l'intérêt composé est appuyé sur une suite de termes qui croissent en proportion continue, dans laquelle $t$ (nombre des années) exprime toujours l'*exposant* du dernier & plus grand terme, c'est-à-dire la puissance de $R$, qui est $R^t$.

De plus, comme $1 : R^t :: P : PR^t = S$, somme de $P$ avec son intérêt composé dans le tems que $R^t$ est la

somme d'une liv. avec son intérêt composé ; c'est-à-dire comme une livre est à la somme d'une livre & de son intérêt pour un tems donné ; ainsi un principal proposé (ou somme) est à la somme du principal & de son intérêt pour le même-tems.

Par là je crois qu'on verra aisément la raison des théorême suivans.

Théorême 1. $PR^t = S$, comme ci-devant.

De là on tire facilement les deux théorêmes suivans.

Théorême 2. $\left\{ \frac{S}{R^t} = P. \right.$

Théorêmes 3. $\left\{ \frac{S}{P} = R^t. \right.$

Par le moyen de ces trois théorêmes, on peut résoudre par le simple calcul, c'est-à-dire sans tables, toutes les questions concernant l'intérêt composé, quoiqu'on ne le fasse pas aussi facilement qu'avec le secours des tables calculées à ce dessein, comme on le verra mieux dans la suite.

*Question* 1re. A quoi montent 256 liv. 10 sols dans sept ans, à 6 pour cent par an, intérêt sur intérêt ?

Nous avons ici $P = 256,5$, $t = 7$, & $R = 1,06$, qui étant élevé à la puissance, dont l'exposant est $= t$ (ou à la 7e puissance) devient $R^7 = 1,50363$ ; ensuite $1,50363 \times 256,5 = 385,6811 = S = 385$ l. 13 f. $7\frac{1}{2}$ d. réponse requise.

*Question* 2. Quel principal ou somme doit-on placer pour faire un fonds de 385 liv. 13 sols $7\frac{1}{2}$ den. dans sept ans, à six pour cent, intérêt sur intérêt ?

On a ici $S = 385,6811$, $R = 1,06$, & $t = 7$, on trouvera $P$ par le théorême 2. en cette maniere :

$R^t = 1,50363$ ) $385,6811 = S$ ( $256,5 = P$ ;
c'est-à-dire que le principal $P$ ou somme requise est 256 l. 10 sols.

*Question* 3. En combien de tems 256 liv. 10 sols for-

meront un fonds de 385 liv. 13 sols 7 $\frac{1}{2}$ den. à 6 pour cent par an, intérêt sur intérêt ?

On a ici $P = 256,5$, $S = 385,6811$, $R = 1\ 06$, on aura $t$ par le troisiéme théorême, $R^t = \frac{S}{P} = \frac{385,6811}{256,5} =$ 1,50363 ; ce qui étant continuellement divisé par $R =$ 1,06, jusqu'à ce qu'il ne reste rien, le nombre de ces divisions sera $= 7 = t$, en cette maniere :

1,06) 1,50363 ( 1,41852, & 1,06) 1,41852(1,338225. De plus, 1,06) 1,338225 ( 1,262477, & ainsi de suite jusqu'à 1,06) 1 06 ( 1 ; ce qui n'arrivant qu'à la septiéme division, on aura $t = 7$, nombre des années requises par la question.

*Question* 4. Si 256 liv. 10 sols produisent un fonds de 385 liv. 13 sols 7 $\frac{1}{2}$ den. en sept ans; quel doit être le taux de l'intérêt annuel pour cent ?

Nous avons $P = 256,5$, $S = 385,6811$, & $t = 7$, on demande $R$ par le théorême 3. $\frac{S}{P} = R^t = 1,50363$, comme dans la derniere question, & si $R^t = R^7 =$ 1,50363, on aura $R = \sqrt[7]{1,50363}$, que l'on peut extraire en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $r + e = R$. Donc |
| 1 ⊙ 7 | 2 | $r^7 + 7r^6e + 21r^5ee = R^7 = 1,50363 = G$ |
| $2 - r^7$ | 3 | $7r^6e + 21r^5ee = G - r^7$ |
| $3 \div 7r^5$ | 4 | $re + 3ee = \frac{G - r^7}{7r^5} = D.$ |
| $4 \div$ | 5 | $e = \frac{D}{r + 3e}.$ |

Soit $r = 1$, on aura $D = 0,0719$.

*Opération.* $r = 1,00$) 0,0719 ( $0,06 = e$.
$+ 3e =$ 18    708

*Diviseur* 1,18    (11) qu'il faut rejetter.

Le premier $r = 1,00$
$+ e = 0,06$ } $1,06 = R$.

Or 1 : 0,06 :: 100 : 6, le taux pour cent requis.

Les trois premieres questions peuvent se résoudre beaucoup plus aisément par la Table suivante, qui n'est que le montant d'une livre pour 39 ans, c'est-à-dire de $R$, $RR$, $R^3$, $R^4$, $R^5$, & ainsi de suite jusqu'à $R^{39}$.

| Années = t. | Montant d'une livre, à six pour cent, &c. intérêt sur intérêt. | Années = t. | Montant d'une livre, à six pour cent, &c. intérêt sur intérêt. |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,06 = $R$ | 21 | 3,3995636005 |
| 2 | 1,1236 = $RR$ | 22 | 3,6035374166 |
| 3 | 1,191016 = $R^3$ | 23 | 3,8197496616 |
| 4 | 1,26247696 | 24 | 4,0489346413 |
| 5 | 1,3382255776 | 25 | 4,2918707197 |
| 6 | 1,4185191122 | 26 | 4,5493829629 |
| 7 | 1,5036302590 | 27 | 4,8223459407 |
| 8 | 1,5938480745 | 28 | 5,1116866971 |
| 9 | 1,6894789590 | 29 | 5,4183878990 |
| 10 | 1,7908476965 | 30 | 5,7434911729 |
| 11 | 1,8982985583 | 31 | 6,0881006432 |
| 12 | 2,0121964718 | 32 | 6,4533866818 |
| 13 | 2,1329282601 | 33 | 6,8405898828 |
| 14 | 2,2609039557 | 34 | 7,2510252757 |
| 15 | 2,3965581931 | 35 | 7,6860867923 |
| 16 | 2,5403516847 | 36 | 8,1472519998 |
| 17 | 2,6927727857 | 37 | 8,6360871198 |
| 18 | 2,8543391529 | 38 | 9,1542523470 |
| 19 | 3,0255995021 | 39 | 9,7035074878 |
| 20 | 3,2071354722 | | |

Le titre de cette Table marque sa construction, & l'on en comprendra aisément l'usage par un ou deux exemples.

### EXEMPLE I.

A quoi montent 375 liv. 10 ſols dans neuf ans, à ſix pour cent par an, &c.

Le nombre de la Table, à côté de 9 ans, eſt 1,689479, lequel étant multiplié par le principal 375,5, produit 634,3993, &c. ou 634 liv. 8 ſols preſque, montant requis.

### EXEMPLE II.

Quel principal (ou ſomme) faut-il mettre à intérêt pour former un fonds de 634 liv. 8 ſols daus neuf ans, à ſix pour cent par an, &c.

Si l'on diviſe le fonds propoſé (634,4) par le nombre de la table qui eſt à côté du nombre donné (9) d'années, le quotient ſera le principal ou ſomme requiſe.

A côté de 9, on trouve 1,689479 ) 634,4 ( 375,5 = 375 liv. 10 ſols, principal ou ſomme requiſe.

### EXEMPLE III.

En quel tems 375 liv. 10 ſols forment un fonds (ou montant) de 634 liv. 8 ſols, &c.

Diviſez le fonds propoſé (634,4) par le principal donné (375,5), & le quotient marquera le nombre de la table qui eſt à côté du tems requis, en cette maniere : 375,5 ) 634,4 ( 1,689479, &c; ce nombre étant cherché dans la table, on le trouvera à côté de 9 ans, qui eſt le tems requis.

Mais ſi le quotient ne peut pas ſe trouver exactement dans la table du montant d'une liv. pour les années correſpondantes, comme ci-devant, on prendra dans la table le nombre le plus approchant & moindre, & on en fera un diviſeur, par lequel on diviſera le premier qnotient ; enſuite on cherchera le ſecond quotient dans la table du montant pour les jours (qui eſt inſerée un peu après), & il marquera le nombre des jours, comme dans cet exemple.

En quel tems 563 liv. montent à 860 liv. à six pour cent par an, intérêt sur intérêt ?

*Réponse*, en sept ans & 99 jours, en cette maniere : 563 ) 860 ( 1,52753, qui marque que le tems est au dessus de sept ans, car à côté de 7 ans il y a 1,50363 ; ce nombre devenant un nouveau diviseur, on aura 1,50363 ) 1,52753 ( 1,01589, &c ; ce nombre approche le plus du montant de 99 jours.

*Nota*. Si le fonds, principal, & tems sont donnés, le taux de l'intérêt se trouvera mieux par l'extraction de la racine, &c. comme ci-devant dans la quatriéme question.

Ce qui me reste ici à proposer, c'est de rendre cette table ( qui n'est calculée que pour le taux de 6 pour cent) universelle pour tous les taux d'intérêt composé ; j'ose dire que c'est là une nouvelle découverte que j'ai faite, voyant avec plaisir qu'elle n'a jamais été publiée, & ayant même oui dire que plusieurs bons Algebristes la regardoient comme impossible.

Voici en peu de mots en quoi consiste cette méthode : Soit $x =$ à la difference entre $1,06 = R$, montant d'une livre pour un an ( dans la Table ), & un autre montant proposé d'une liv. pour un an ; ce qui a deux cas.

*Premier cas*. Si le taux proposé est plus grand que $1,06 = R$, alors $R + x =$ vrai montant d'une liv. pour un an à ce taux.

*Second cas*. Mais si le taux proposé est moindre que $1,06 = R$, on aura $R - x =$ montant d'une liv. &c.

Faites $\begin{cases} t - 1 = b,\ t - 2 = c,\ t - 3 = d,\ t - 4 = f \text{ \&c.} \\ \frac{1}{2} tb = g,\ \frac{1}{2} cg = m,\ \frac{1}{4} dm = n,\ \frac{1}{4} fn = s \text{ \&c.} \end{cases}$

On aura $R^t + tR^b x + gR^c xx + mR^d xxx$, &c. $=$ montant d'une livre au taux donné pour un tems, marqué par $t$ dans le premier cas.

Et $R^t - tR^b x + gR^c xx - mR^d xxx$, &c. $=$ montant d'une liv. dans le second cas ; ce qui n'est autre chose que ceci : Elevez $R + x$ ou $R - x$ ( selon la méthode de la sect. 5. chap. ) à la puissance ou degré indiqué par

l'expoſant $t$, qui eſt le tems donné par la queſtion, rejettant toutes les puiſſances de $x$ au deſſus de $xxx$, ou au moins au deſſus de $xxxx$, comme inutiles : enſuite multipliez cette puiſſance de $R+x$ ou $R-x$ par le principal donné, & leur produit ſera le montant requis.

Un exemple ou deux dans chaque cas rendront tout cela facile.

### *Exemple I.*

On veut trouver à quoi montent 256 liv. dans quinze ans, à 8 livres pour cent par an, intérêt ſur intérêt ? Ici $t = 15$.

1°. 100 : 108 :: 1 : 1,08, montant d'une liv. à huit pour cent.

$1{,}08 - 1{,}06 = 0{,}02 = x$, & $R + x = 1{,}08$, comme dans le premier cas.

Enſuite $R^{15} + 15R^{14}x + 105R^{13}xx + 455R^{12}xxx$ &c. = montant d'une liv. pour quinze ans, à huit pour cent.

Ici $x = 0{,}02$, $xx = 0{,}0004$, & $xxx = {,}000008$.

Par la Table, $R^{15} = 2{,}396558$

Et { $15R^{14}x = 2{,}260904 \times 15$
$\times {,}02$ . . . . . . . $= 0{,}678271$
$105R^{13}xx = 2{,}132928 \times 105$
$\times {,}0004$ . . . . . . $= 0{,}089583$
$455R^{12}xxx = 2{,}012196 \times 455$
$\times {,}000008$ . . . . . $= 0{,}007324$

*Somme* $= 3{,}171736$

Enſuite $3{,}171736 \times 256 = 812{,}964416 = S$, c'eſt-à-dire 811 liv. 9 ſ. $3\frac{1}{2}$ den. preſque ; ce qui eſt la réponſe requiſe.

### *Exemple II.*

A quoi montent 365 livres dans ſept ans, à quatre & demi pour cent, &c.

1°. 100 : 104,5 :: 1 : 1,045, montant d'une livre à $4\frac{1}{2}$ pour cent. Enſuite $1{,}06 - 1{,}045 = 0{,}015 = x$,

par conséquent $R - x = 1,045$, comme dans le 2e cas. Et $R^7 - 7R^6x + 21R^5xx - 35R^4xxx$, &c. = montant d'une livre pour sept ans, à $4\frac{1}{2}$ pour cent.
Ici $x = ,015$, $xx = ,000225$, & $xxx = ,000003375$.

$$\text{Par la Table } R^7 = +1,503630$$
$$\text{Et} \begin{cases} -\ 7R^6x = -0,148944 \\ +21R^5xx = +0,006323 \\ -35R^4xxx = -0,000141 \end{cases}$$
$$R^7 - 7R^6x + 21R^5xx - 35R^4x^3 = 1,360868$$

Et $1,360868 \times 365 = 496,71682 = S$, c'est-à-dire 496 liv. 14 sols $3\frac{1}{4}$ den. réponse requise.

Si l'on comprend bien la raison de ces deux opérations, on trouvera aisément $P$ le *principal*, ayant $S$, $t$ & $x$ donnés (parce que $R$ & ses puissances sont toujours donnés par la table); car $R^t \pm tR^bx + gR^cxx \pm mR^dxxx \times P = S$ (comme ci-devant).

Donc $P = \frac{S}{R^t \pm tR^bx + gR^cxx \pm mR^dx^3}$, ou si $S$, $P$ & $t$ sont donnés, on pourra trouver $x$; car $R^t \pm tR^bx + gR^cxx \pm$, $mR^dxxx = \frac{S}{P}$. Cette équation étant résolue (comme dans le chap. 10.) on aura la valeur de $x$, & par conséquent de $R + x$, ou $R - x$ qui marquera le taux de l'intérêt, &c.

Mais je laisse les *questions numériques* à la pratique des commençans, persuadé que j'en ai assez fait pour apprendre de quelle maniere on peut calculer toutes les questions de cette espece qui sont limitées par les années entieres.

Que si le tems donné ou requis n'est pas terminé par des années entieres, mais par des semaines, mois, quartiers, ou semestres, &c. Le meilleur moyen pour résoudre ces sortes de questions, est de réduire en *jours* ces parties de l'*année*; ce qui étant fait, on trouvera la solution de la question (par rapport à une liv. comme auparavant) pour ce nombre de jours, & pour cela, il faudra

dra trouver le montant d'une livre pour un jour (comme dans mon Abrégé d'Algébre) que je vais inserer ici.

Soit $x =$ montant requis, nous aurons $1 : x :: x : xx :: xx : x^3 :: x^3 : x^4$, $\div\!\!\div x^{365}$; c'est-à-dire comme une livre est au montant d'une livre, & de son intérêt pour un jour; ainsi ce montant pour un jour est à celui pour deux jours, ainsi celui pour deux jours est à celui pour trois, & ainsi de suite en $\div\!\!\div$ jusqu'à 365 jours.

Le dernier de ces termes est donc $x^{365} = 1{,}06$.

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $r + e = x$, & $r = 1$ |
| 1 ⊙ 365 | 2 | $r^{365} + 365r^{364}e + 66430r^{363}ee = x^{365} = 1{,}06$ |
| 2 en nomb. | 3 | $1 + 365e + 66430ee = 1{,}06$ |
| 3 — T | 4 | $365e + 66430ee = 0{,}06$ |
| 4 ÷ 66430 | 5 | $,00549e + ee = 0{,}0000009032 = D$ |
| 8 ÷ | 6 | $e = \frac{D}{,00549 + e}$. |

*Opération.* ,00549 ) 0,0000009032 ( ,00016 = e
+ e = ,00010 — 55
1er *Diviseur* ,0055 ) — 3532
+ e = 6 — 3390
2e *Diviseur* ,00565

Premier $r = 1$
$+ e = 0{,}00016$
$r + e = 1{,}00016$.

Nouveau $r = 1{,}00016$ pour une seconde opération. Donc

| | | |
|---|---|---|
| 2 en nombr. | 7 | $1{,}06013401407 + 386{,}887e + 70402{,}172ee = 1{,}06$, par où l'on voit que $r - e = x$. |
| Donc | 8 | $1{,}06013401407 - 386{,}887e + 70402{,}172ee = 1{,}06$ |
| 8 ± | 9 | $386{,}887e - 70402{,}172ee = 0{,}00013401407$ |
| 9 ÷ | 10 | $,0054953e - ee = ,0000000019035503$ |
| 10 ÷ | 11 | $e = \frac{,0000000019035503}{,0054953 - e}$. |

*Opération.* ,0054953 ) ,000000001903 5503 ( ,0000003 = *e*.
— *e* = ,0000003 164850

*Diviseur* ,0054950 255050 ( ,0000000464
219800

352503
329700

228030
219800

Le dernier $r = 1,00016$
$- e = 0,0000003464$

$r - e = x = 1,0001596536$

Ce qui étant poussé à une troisiéme opération, donneroit $x = 1,0001596535587453$, &c.

Cette valeur de $x$ est le montant d'une liv. pour un jour. Si l'on en retranche une liv. le reste = ,000159653587, &c. sera l'intérêt d'une liv. pour un jour; par conséquent si l'on multiplie le principal proposé par l'un de ces deux nombres, les produits respectifs seront le montant ou l'intérêt de ce principal pour un jour, à six pour cent, &c.

Et afin qu'on puisse aisément calculer le montant, ou intérêt d'un principal ou somme pour un nombre de jours moindre qu'un an, je joins ici la Table suivante, qui a été calculée avec beaucoup de soin (& comme je m'en flatte d'exactitude) sur le dernier montant (1,000159653558745) d'une livre pour un jour; elle est suivie d'une autre Table du montant d'une livre pour tous les mois.

**TABLE** *du montant d'une livre pour tous les jours.*

| Jours. | Montant d'une liv. &c. | Jours. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,0001596536 | 33 | 1,0052820488 |
| 2 | 1,0003193326 | 34 | 1,0054425457 |
| 3 | 1,0004790372 | 35 | 1,0056030682 |
| 4 | 1,0006387673 | 36 | 1,0057636164 |
| 5 | 1,0007985229 | 37 | 1,0059241901 |
| 6 | 1,0009583039 | 38 | 1,0060847895 |
| 7 | 1,0011181105 | 39 | 1,0062454146 |
| 8 | 1,0012779426 | 40 | 1,0064060653 |
| 9 | 1,0014378002 | 41 | 1,0065667416 |
| 10 | 1,0015976834 | 42 | 1,0067274436 |
| 11 | 1,0017575920 | 43 | 1,0068881712 |
| 12 | 1,0019175262 | 44 | 1,0070489245 |
| 13 | 1,0020774859 | 45 | 1,0072097035 |
| 14 | 1,0022374712 | 46 | 1,0073705082 |
| 15 | 1,0023974820 | 47 | 1,0075313385 |
| 16 | 1,0025575184 | 48 | 1,0076921945 |
| 17 | 1,0027175803 | 49 | 1,0078530762 |
| 18 | 1,0028776677 | 50 | 1,0080139835 |
| 19 | 1,0030377808 | 51 | 1,0081749166 |
| 20 | 1,0031979193 | 52 | 1,0083358753 |
| 21 | 1,0033580850 | 53 | 1,0084968597 |
| 22 | 1,0035182732 | 54 | 1,0086578699 |
| 23 | 1,0036784885 | 55 | 1,0088189057 |
| 24 | 1,0038387294 | 56 | 1,0089799673 |
| 25 | 1,0039989958 | 57 | 1,0091410545 |
| 26 | 1,0041592879 | 58 | 1,0093021675 |
| 27 | 1,0043196055 | 59 | 1,0094633062 |
| 28 | 1,0044799487 | 60 | 1,0096244707 |
| 29 | 1,0046403175 | 61 | 1,0097856608 |
| 30 | 1,0048007120 | 62 | 1,0099468767 |
| 31 | 1,0049611320 | 63 | 1,0101081184 |
| 32 | 1,0051215776 | 64 | 1,0102693858 |

| Jours. | Montant d'une liv. &c. | Jours. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|---|---|
| 65 | 1,0104306789 | 99 | 1,0159299941 |
| 66 | 1,0105919978 | 100 | 1,0160921910 |
| 67 | 1,0107533424 | 101 | 1,0162544138 |
| 68 | 1,0109147128 | 102 | 1,0164166624 |
| 69 | 1,0110761090 | 103 | 1,0165789370 |
| 70 | 1,0112375309 | 104 | 1,0167412375 |
| 71 | 1,0113989786 | 105 | 1,0169035638 |
| 72 | 1,0115604521 | 106 | 1,0170659161 |
| 73 | 1,0117219513 | 107 | 1,0172282944 |
| 74 | 1,0118834764 | 108 | 1,0173906985 |
| 75 | 1,0120450272 | 109 | 1,0175513286 |
| 76 | 1,0122066038 | 110 | 1,0177155846 |
| 77 | 1,0123682062 | 111 | 1,0178780665 |
| 78 | 1,0125298344 | 112 | 1,0180405744 |
| 79 | 1,0126914885 | 113 | 1,0182031083 |
| 80 | 1,0128531683 | 114 | 1,0183656680 |
| 81 | 1,0130148739 | 115 | 1,0185282578 |
| 82 | 1,0131766054 | 116 | 1,0186908655 |
| 83 | 1,0133383627 | 117 | 1,0188535031 |
| 84 | 1,0135001458 | 118 | 1,0190161667 |
| 85 | 1,0136619547 | 119 | 1,0191788563 |
| 86 | 1,0138927895 | 120 | 1,0193415719 |
| 87 | 1,0139856501 | 121 | 1,0195043134 |
| 88 | 1,0141475365 | 122 | 1,0196670809 |
| 89 | 1,0143094488 | 123 | 1,0198298745 |
| 90 | 1,0144713869 | 124 | 1,0199926934 |
| 91 | 1.0146333511 | 125 | 1,0201555389 |
| 92 | 1,0147953408 | 126 | 1,0203184110 |
| 93 | 1,0149573565 | 127 | 1,0204813084 |
| 94 | 1,0151193981 | 128 | 1,0206442319 |
| 95 | 1,0152814655 | 129 | 1,0208071814 |
| 96 | 1,0154435589 | 130 | 1,0209701569 |
| 97 | 1,0156056781 | 131 | 1,0211331585 |
| 98 | 1,0157078232 | 132 | 1,0212961861 |

| Jours. | Montant d'une liv. &c. | Jours. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|---|---|
| 133 | 1,0214592397 | 168 | 1,0271825456 |
| 134 | 1,0216223193 | 169 | 1,0273465389 |
| 135 | 1,0217854250 | 170 | 1,0275105585 |
| 136 | 1,0219485567 | 171 | 1,0276746046 |
| 137 | 1,0221117144 | 172 | 1,0278386764 |
| 138 | 1,0222748982 | 173 | 1,0280027746 |
| 139 | 1,0224381081 | 174 | 1,0281668989 |
| 140 | 1,0226013440 | 175 | 1,0283310494 |
| 141 | 1,0227646060 | 176 | 1,0284952262 |
| 142 | 1,0229278940 | 177 | 1,0286594291 |
| 143 | 1,0230912081 | 178 | 1,0288236583 |
| 144 | 1,0232545483 | 179 | 1,0289879137 |
| 145 | 1,0234179146 | 180 | 1,0291521953 |
| 146 | 1,0235813069 | 181 | 1,0293165231 |
| 147 | 1,0237447253 | 182 | 1,0294908372 |
| 148 | 1,0239081699 | 183 | 1,0296451975 |
| 149 | 1,0240716405 | 184 | 1,0298095841 |
| 150 | 1,0242351372 | 185 | 1,0299739969 |
| 151 | 1,0243986600 | 186 | 1,0301384359 |
| 152 | 1,0245622089 | 187 | 1,0303029012 |
| 153 | 1,0247257830 | 188 | 1,0304673928 |
| 154 | 1,0248893851 | 189 | 1,0306319206 |
| 155 | 1,0250530124 | 190 | 1,0307964557 |
| 156 | 1,0252166658 | 191 | 1,0309610251 |
| 157 | 1,0253803453 | 192 | 1,0311256216 |
| 158 | 1,0255440509 | 193 | 1,0312902445 |
| 159 | 1,0257077827 | 194 | 1,0314548937 |
| 160 | 1,0258715406 | 195 | 1,0316195692 |
| 161 | 1,0260353247 | 196 | 1,0317842709 |
| 162 | 1,0261991349 | 197 | 1,0319489990 |
| 163 | 1,0263629713 | 198 | 1,0321137534 |
| 164 | 1,0265268338 | 199 | 1,0322785341 |
| 165 | 1,0266907225 | 200 | 1,0324433410 |
| 166 | 1,0268546374 | 201 | 1,0326081742 |
| 167 | 1,0270185784 | 202 | 1,0327730339 |

| Jours. | Montant d'une liv. &c. | Jours. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|---|---|
| 203 | 1,0329379198 | 238 | 1,0387255415 |
| 204 | 1,0331028321 | 239 | 1,0388913778 |
| 205 | 1,0332677706 | 240 | 1,0390572405 |
| 206 | 1,0334327355 | 241 | 1,0392231298 |
| 207 | 1,0335977268 | 242 | 1,0393890454 |
| 208 | 1,0337627444 | 243 | 1,0395549876 |
| 209 | 1,0339277883 | 244 | 1,0397209563 |
| 210 | 1,0340928586 | 245 | 1,0398869515 |
| 211 | 1,0342579552 | 246 | 1,0400529732 |
| 212 | 1,0344230782 | 247 | 2,0402190214 |
| 213 | 1,0345882275 | 248 | 1,0403850961 |
| 214 | 1,0347534033 | 249 | 1,0405511973 |
| 215 | 1,0349186054 | 250 | 1,0407173250 |
| 216 | 1,0350838338 | 251 | 1,0408834793 |
| 217 | 1,0352490887 | 252 | 1,0410496601 |
| 218 | 1,0354143699 | 253 | 1,0412158674 |
| 219 | 1,0355796775 | 254 | 1,0413821012 |
| 220 | 1,0357450115 | 255 | 1,0415483616 |
| 221 | 1,0359103719 | 256 | 1,0417146485 |
| 222 | 1,0360757587 | 257 | 1,0418809620 |
| 223 | 1,0362411719 | 258 | 1,0420473021 |
| 224 | 1,0364066116 | 259 | 1,0422136687 |
| 225 | 1,0365710776 | 260 | 1,0423800618 |
| 226 | 1,0367375701 | 261 | 1,0425464815 |
| 227 | 1,0369030889 | 262 | 1,0427129278 |
| 228 | 1,0370686342 | 263 | 1,0428794007 |
| 229 | 1,0372342059 | 264 | 1,0430459001 |
| 230 | 1,0373998041 | 265 | 1,0432124261 |
| 231 | 1,0375654287 | 266 | 1,0433789787 |
| 232 | 1,0377310798 | 267 | 1,0435455579 |
| 233 | 1,0378967573 | 268 | 1,0437121637 |
| 234 | 1,0380624612 | 269 | 1,0438787961 |
| 235 | 1,0382241916 | 270 | 1,0440454551 |
| 236 | 1,0383939484 | 271 | 1,0442121407 |
| 237 | 1,0385597318 | 272 | 1,0443788529 |

| Jours. | Montant d'une liv. &c. | Jours. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|---|---|
| 273 | 1,0445455918 | 308 | 1,0503982521 |
| 274 | 1,0447123572 | 309 | 1,0505659519 |
| 275 | 1,0448791493 | 310 | 1,0507336786 |
| 276 | 1,0450459680 | 311 | 1,0509014320 |
| 277 | 1,0452128133 | 312 | 1,0510692121 |
| 278 | 1,0453796853 | 313 | 1,0512370191 |
| 279 | 1,0455446584 | 314 | 1,0514048529 |
| 280 | 1,0457135092 | 315 | 1,0515727134 |
| 281 | 1,0458804611 | 316 | 1,0517406008 |
| 282 | 1,0460474397 | 317 | 1,0519085150 |
| 283 | 1,0462144449 | 318 | 1,0520764559 |
| 284 | 1,0463814768 | 319 | 1,0522444237 |
| 285 | 1,0465484353 | 320 | 1,0524124183 |
| 286 | 1,0467156206 | 321 | 1,0525804397 |
| 287 | 1,0468827325 | 322 | 1,0527484880 |
| 288 | 1,0470498711 | 323 | 1,0529165631 |
| 289 | 1,0472170363 | 324 | 1,0530846650 |
| 290 | 1,0473842283 | 325 | 1,0532527937 |
| 291 | 1,0475514469 | 326 | 1,0534209493 |
| 292 | 1,0477186923 | 327 | 1,0535891317 |
| 293 | 1,0478859643 | 328 | 1,0537573410 |
| 294 | 1,0480532631 | 329 | 1,0539255771 |
| 295 | 1,0482205885 | 330 | 1,0540938401 |
| 296 | 1,0483879407 | 331 | 1,0542621300 |
| 297 | 1,0485553196 | 332 | 1,0544304467 |
| 298 | 1,0487227252 | 333 | 1,0545987903 |
| 299 | 1,0488901576 | 334 | 1,0547671608 |
| 300 | 1,0490576166 | 335 | 1,0549355582 |
| 301 | 1,0492251025 | 336 | 1,0551039824 |
| 302 | 1,0493926150 | 337 | 1,0552724336 |
| 303 | 1,0495601543 | 338 | 1,0554409116 |
| 304 | 1,0497277204 | 339 | 1,0556094165 |
| 305 | 1,0498953132 | 340 | 1,0557779484 |
| 306 | 1,0500629327 | 341 | 1,0559465071 |
| 307 | 1,0502305790 | 342 | 1,0561150927 |

| Jours. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|
| 343 | 1,0562837053 |
| 344 | 1,0564523448 |
| 345 | 1,0566210112 |
| 346 | 1,0567897045 |
| 347 | 1,0569584248 |
| 348 | 1,0571271720 |
| 349 | 1,0572959594 |
| 350 | 1,0574647472 |
| 351 | 1,0576335753 |
| 352 | 1,0578024303 |
| 353 | 1,0579713122 |
| 354 | 1,0581402211 |
| 355 | 1,0583091570 |
| 356 | 1,0584781199 |
| 357 | 1,0586471097 |
| 358 | 1,0588161265 |
| 359 | 1,0589851703 |
| 360 | 1,0591542411 |
| 361 | 1,0593233389 |
| 362 | 1,0594924636 |
| 363 | 1,0596616154 |
| 364 | 1,0598307942 |
| 365 | 1,06 |

| Mois. | Montant d'une liv. à six pour cent par mois. |
|---|---|
| 1 | 1,0048675505 |
| 2 | 1,0097587942 |
| 3 | 1,0146738462 |
| 4 | 1,0196128224 |
| 5 | 1,0245758394 |
| 6 | 1,0295630141 |
| 7 | 1,0345744641 |
| 8 | 1,0396103076 |
| 9 | 1,0446706634 |
| 10 | 1,0497556507 |
| 11 | 1,0548653894 |
| 12 | 1,06 |

L'usage de cette Table est à tous égards le même que celui de la Table des années entieres, pour trouver le montant d'une somme donnée pour un nombre proposé de jours moindre qu'une année.

*EXEMPLE I.*

On veut trouver le montant de 375 liv. pour 210 jours, à six pour cent.

Le montant d'une liv. pour 210 jours est par la table 1,0340928, &c.

Or 1,0340928 × 375 = 387,7848, &c. = 387 liv. 15 sols $8\frac{1}{4}$ den. montant requis.

Et les autres variations se trouvent précisément comme dans les exemples des années entieres.

Mais si le tems donné est composé d'*années*, & de parties d'*années*, comme *quartiers*, *mois*, &c. il faut réduire en jours ces parties de l'année, & chercher la solution par deux opérations, comme dans l'exemple suivant.

## *Exemple II.*

On demande à quoi montent 265 liv. en cinq ans & 135 jours, &c.

Le montant d'une liv. pour { cinq ans est 1,338225, &c.
135 jours 1,021785, &c. }

Mais 1,338225 × 1021785 × 265 l. = 362,355232, &c. montant ou réponse requise.

Ou si le *montant* & le *tems* sont donnés, pour trouver le *principal*, il faut multiplier ensemble le montant d'une liv. pour les années, & le montant d'une livre pour les jours; ensuite diviser par leur produit le montant donné, le quotient sera le principal requis.

## *Exemple III.*

Quel principal doit produire un fonds de 362 liv. 7 f. $1\frac{1}{4}$ den. ou 362,355232 liv. dans cinq ans & 135 jours, à six pour cent, &c.

Le montant d'une liv. pour { cinq ans est 1,338225, &c.
135 jours est 1,021785, &c. }

Mais 1,338225 × 1,021785 = 1,367378, &c.

*Diviseur* ) 362,355232 = S ( 265 liv. principal requis.

De même si le principal & son montant sont donnés, pour trouver le tems, à six pour cent, &c. on divisera le montant par son principal, & l'on fera comme dans le troisiéme exemple pour les années entieres, ci-devant; pour avoir la réponse requise.

Mais ſi le montant & ſon principal avec le tems pendant lequel l'intérêt a couru ſont donnés, on trouvera le taux de l'intérêt comme dans la quatriéme queſtion pour les années entieres.

Maintenant ſi l'on veut rendre cette table du montant par jours utile à tous les taux d'intérêt ( comme on a fait ci devant pour les années ) il faut premiérement trouver l'intérêt ſimple d'une livre pour un jour, tant au taux donné, qu'à ſix pour cent, & nommer $x$ leur différence, en cette maniere :

Suppoſons que la raiſon donnée ſoit de huit pour cent par an, dites : 100 : 8 : : 1 : 0,08, & 100 : 6 : : 1 : 0,06 qui ſont les deux intérêts ſimples pour un an.

Enſuite 365 ) 0,08 ( ,00021917, &c. intérêt ſimple d'une liv. pour un jour, à huit pour cent

Leur différence 0,00005479 $=x$, qui eſt aſſez bonne pour les petites queſtions ordinaires; mais lorſqu'on veut une plus grande exactitude, il eſt à propos de faire cette régle de proportion.

Comme l'intérêt ſimple d'une liv. pour un jour, à ſix pour cent, eſt à l'intérêt de la table d'une livre pour un jour; ainſi l'intérêt ſimple d'une livre pour un jour à un taux donné eſt à un quatriéme nombre ; c'eſt-à-dire 0,00016438 : 0,00015965 : : 0,00021917 : 0,00021286. Enſuite 0,00021286 — 0,00015965 = 0,00005321 $=x$. Cet $x$ étant élevé à ſes puiſſances, & comparé avec les montans reſpectifs par jours de la même maniere qu'on l'a fait pour les années, le réſultat ſera la réponſe à la queſtion.

---

## SECTION II.

### *Des Annuités ou Penſions en arrérages, calculées intérêt ſur intérêt.*

LES annuités, &c. ſont en arrérages, comme on l'a expliqué au commencement de la ſect. 2. du chap. 11. pré-

cédent, & nous employerons ici les mêmes lettres que nous avons employé dans cette même section pour représenter les mêmes choses, excepté seulement que $R$ sera ici égal au montant d'une livre avec son intérêt, comme dans la section premiere du chap. présent 12.

Soit donc $u =$ la premiere rente annuelle d'une annuité sans intérêt.

Nous aurons $Ru + u =$ montant de la premiere rente annuelle avec son intérêt ; plus à la rente de la 2e année.

Et $RRu + Ru + u =$ montant des rentes de la premiere & seconde année avec leurs intérêts ; plus à la rente de la troisiéme année, &c.

Donc $RRu + Ru + u = S$, montant d'une rente annuelle ou annuité qui n'a pas été payée pendant trois ans ; & de là suivent ces proportions.

$u : Ru :: Ru : RRu :: RRu : RRRu$, & ainsi de suite en $\div\div$ pour tout nombre de termes ou d'années, marqué par $t$, le dernier terme étant toujours $uR^{t-1}$ ; par conséquent $S - uR^{t-1} =$ somme de tous les antécedens, & $S - u$ $=$ somme de tous les conséquens dans la série, & ainsi on aura $u : uR :: S - uR^{t-1} : S - u$. Voyez la sect. 2. du chap. 6. précédent.

Donc $Su - uu = RuS - uuR^t$, ce qui étant divisé par $u$, donne $S - u = RS - uR^t$. Et de cette derniere équation, on tirera aisément les théorêmes suivans.

Théorême 1. $\left\{ \dfrac{uR^t - u}{R - 1} = S. \right.$

Théorême 2. $\left\{ \dfrac{RS + u - S}{u} = R^t. \right.$

Si cette équation est continuellement divisée par $R$, jusqu'à ce qu'il ne reste rien, le nombre de ces divisions sera $t$. Voyez la quest. 3. de la sect. 1. de ce chap. 12.

Théorême 3. $\left\{ \dfrac{RS - S}{R^t - 1} = u. \right.$

Théorême 4. $\left\{ \dfrac{S}{u} R - R^t = \dfrac{S - u}{u}. \right.$

Si cette équation est réduite en nombres, selon la méthode proposée dans la sect. 3. chap. 10, sa racine donnera la valeur de $R$.

*Question* 1^re^. Si 30 liv. de rente annuelle ou annuité, &c. n'ont pas été payées pendant neuf ans, à quoi monte le tout, intérêt sur intérêt, à six pour cent par an ?

Nous avons ici $u = 30$, $t = 9$, & $R = 1{,}06$; on demande $S$ par le théorême 1.

$R^9 = 1{,}689479$ par la table des montans par années.
$30 = u.$

$R^9 u = 50{,}684370$
$-u = 30$

$R^9 - 1 = {,}06$ ) $20{,}684370$ ( $344{,}7395 = 344$ livres 14 sols $9\frac{1}{2}$ den. $= S$, montant requis.

*Question* 2. Quelle rente annuelle ou annuité, &c. étant arréragée pendant neuf ans peut produire un fonds de 344 l. 14 s. $9\frac{1}{2}$ den. $= 344{,}7395$, à six pour cent, &c.

Ici nous avons $S = 344{,}7395$, $t = 9$, & $R = 1{,}06$; il faut trouver $u$ par le théorême 3.

$SR = 344{,}7395 \times 1{,}06 = 365{,}42387$
$-S = 344{,}7395$
$R^t - 1 = 1{,}689479 - 1 =$
$0{,}689479$ ) $20{,}68437$ ( $30 = u$.

*Question* 3. En quel tems 30 liv. de rente annuelle produisent un fonds qui monte à 344 liv. 14 sols $9\frac{1}{2}$ den. accordant 6 pour cent pour l'arrérage des payemens, intérêt sur intérêt.

Nous avons $u = 30$, $S = 344{,}7395$, & $R = 1{,}06$; il faut trouver $t$ par le théorême 2.

1°. $SR + u - S = 365{,}42387 + 30 - 344{,}7395 = 50{,}68437$. Et $u = 30$ ) $50{,}68437$ ( $1{,}689479 = R^t$. Donc $R = 1{,}06$ ) $1{,}689479$; $1{,}593848$, & $1{,}06$ ) $1{,}593848 = 1{,}50363$, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait $1{,}06$) $1{,}06$ ( 1, ce qui n'arrive qu'à la 9^e^ *division*. Donc

$t = 9$, ou $R^t = 1,689479$ étant cherché dans la table des années, on le trouvera à côté de 9 ans, qui est le tems requis.

*Question* 4. Si 30 liv. par an étant arréragées pendant neuf ans montent à 344 liv. 14 sols $9\frac{1}{2}$ den. intérêt sur intérêt pour chaque payement depuis son échéance; quel doit être le taux de l'intérêt pour cent, &c?

Nous avons $u = 30$, $S = 344,7395$, & $t = 9$; il faut trouver $R$ par la derniere des quatre équations, qui est $\frac{S}{u} R - R^t = \frac{S - u}{u}$.

1°. $\frac{S}{u} = \frac{344,7395}{30} = 11,491317$, & $\frac{S-u}{u} =$ 10,491317; ainsi nous avons cette équation $11,491317\ R - R^9 = 10,491317$.

| | | |
|---|---|---|
| Soit donc | 1 | $Rr + e = R$, & supposons $r = 1$ |
| 1 ⊙ 9 | 2 | $r^9 + 9r^8e + 36r^7ee = R^9$ |
| 1 × 11,49, &c. & en nombre | 3 | $11,491317 + 11,491317e = 11,491317R$ |
| 2 en nombres | 4 | $1,000000 + 9,000000e + 36ee = R^9$ |
| 3 — 4 | 5 | $10,4911317 + 2,491317e - 36ee = + 10,491317$ |
| 5 ± | 6 | $2,491317e = 36ee$ |
| 6 ÷ 36e | 7 | $e = 0,06$, &c. |

$$\left.\begin{array}{r} \text{Le premier } r = 1 \\ + e = 0,06 \end{array}\right\} = 1,06 = R;$$

comme on peut le vérifier, en substituant cette valeur de $R$ dans l'équation.

---

## SECTION III.

*Trouver la valeur présente des Annuités, Pensions ou Fermes, &c. à intérêt sur intérêt.*

Soit $P =$ cette valeur présente, &c. & les autres lettres comme ci-devant.

Il est aisé, en se rappellant ce qui a été dit dans la sect. 3. chap. 11. sur l'achat des annuités, &c. à intérêt simple, de former des théorêmes semblables à intérêt composé, c'est-à-dire en combinant le premier théorême de la section premiere avec le premier théorême de la section 2^e^ précédente pour n'en former qu'un seul; car $\frac{uR^t - u}{R - 1} = S$, montant d'une rente annuelle arréragée pendant un nombre d'années par le théor. 1. de la sect. 2. Et $PR^t = S$, montant d'un principal ou somme mise à intérêt pour le même nombre d'années, par le théor. 1. de la section premiere.

D'où suit $PR^t = \frac{uR^t - u}{R - 1}$, ou $PR^{t+1} - PR^t = uR^t - u$, la même équation que celle de mon *Abrégé d'Algébre*, page 112. qui y a été formée par la considération que l'achat des *annuités* ou des *fermes* est appuyé sur un rang ou suite de quantités en proportion géométrique continue décroissante. Ainsi $\frac{u}{R}$ est le premier & plus grand terme, $R$ la raison commune à tous les termes, & $P$ la somme de toute la suite; c'est-à-dire, $\frac{u}{R} : \frac{u}{RR} :: \frac{u}{RR} : \frac{u}{RRR} :: \frac{u}{RRR} : \frac{u}{R^4} :: \frac{u}{R^4} : \frac{u}{R^5}$, &c. en $\div$ jusqu'au dernier terme $\frac{u}{R^t}$. Or $P - \frac{u}{R^t}$ est la somme de tous les antécédens, & $P - \frac{u}{R}$ celle de tous les conséquens; on aura donc $\frac{u}{R} : \frac{u}{RR}$, ou (en même raison) $u : \frac{u}{R} :: P - \frac{u}{R^t} : P - \frac{u}{R}$; ce qui donne $PR^{t+1} - uR^t = PR^t - u$, comme ci-devant. On peut tirer de cette équation les théorêmes suivans.

Théorême 1. $\left\{\frac{u - \frac{u}{R^t}}{R - 1} = P.\right.$

Théorême 2. $\left\{\frac{P \times R^{t+1} - R^t}{R^t - 1} = u.\right.$

Théorême 3. $\left\{\frac{u}{P + u - PR} = R^t\right.$ ; ce qui étant continuellement divisé par $R$, donnera $t$.

Théorême 4. $\left\{\frac{u}{P} = \frac{u}{P} R^t + R^t - R^{t+1}\right.$. La résolution de cette équation, donnera $R$.

*Question* 1^re^. Que vaut en argent comptant une rente annuelle de 30 livres, continuée pendant sept ans, à six pour cent, intérêt sur intérêt, en faveur de l'acheteur ?

Nous avons $u = 30$, $t = 7$, & $R = 1,06$ ; on demande $P$.

Par le théorême 1, on aura $\frac{u}{R^t} = \frac{30}{1,50363} = 19,9517$, & $30 - 19,9517 = 10,0483 = u - \frac{u}{R^t}$ ; ensuite $R - 1 = 0,06$ ) 10,0483 ( $167,4716 = P = 167$ liv. 9 s. 5 d. *réponse requise.*

*Question* 2. Quelle annuité ou rente annuelle, continuée pendant sept ans, peut s'acheter pour 167 liv. 9 sols 5 d. à six pour cent, intérêt sur intérêt pour l'acheteur ?

Dans cette question on a $P = 167,4716$ ; $t = 7$, & $R = 1,06$ ; on demande $u$. Par le théorême 2, on aura

$PR^t \times R = 251,8153 \times 1,06 \quad = 266,9242$

$- PR^t = 167,4716 \times 1,50363 = 251,8153$

Donc $R^t - 1 = 0,50363$ ) $\quad 15,1089$ ( $30 = u$

c'est-à-dire $u = 30$ liv. est la réponse requise.

*Question* 3. Pendant combien de tems peut-on laisser à un homme une rente annuelle de 30 liv. pour 167 livres 9 sols 5 den. à six pour cent, intérêt sur intérêt pour l'acheteur ?

On a ici $P = 167,4716$, $u = 30$ ; & $R = 1,06$ ; on trouvera $t$ par le troisiéme théorême.

1°. $P + u = 167,4716 + 30 = 197,4716$

$\& - PR = 177,5199$

Donc $19,9517 ) 30 = u$

$( 1,50363 = R^t$.

Si $R^t = 1,50363$ eſt continuellement diviſé par $1,06 = R$ juſqu'à ce qu'il ne reſte rien ( comme ci-devant ) ou ſi on le cherche dans la Table des montans par années, &c. on trouvera $t = 7$, qui eſt la vraie réponſe requiſe.

*Queſtion* 4. Si l'on donne 167 liv. 9 ſols 5 den. pour l'achat d'une penſion ou annuité de 30 liv. par an, continuée pendant ſept ans ; à quel taux d'intérêt pour cent a-t'on fait cet achat, en donnant intérêt ſur intérêt à l'acheteur ?

Dans cette queſtion on a $P = 167,4716$, $u = 30$, & $t = 7$, on aura $R$ par le théor. 4. Ce quatriéme théorême forme cette équation $\frac{u}{P} = \frac{u}{P} R^t + R^t - R^{t+1}$, laquelle étant changée en nombres, & ayant extrait ſa racine comme dans la quatriéme queſtion de la derniere ſection, on trouvera la valeur de $R = 1,06$, & l'on aura $1 : 1,06 :: 100 : 6$, taux pour cent requis.

Ces quatre queſtions renferment toutes les variétés que l'on peut propoſer au ſujet de l'achat des *annuités* ou *fermes*, &c. où l'on doit entrer immédiatement après, ou bien dont on eſt en poſſeſſion au tems où l'achat ſe fait.

Mais les queſtions qui ont rapport aux annuités ou aux fermes, &c. en reverſion, doivent être partagées ou diviſées en deux queſtions différentes, qu'il faut conſiderer ſéparément ( voyez la fin du chap. 11. ) comme dans les exemples ſuivans.

### *Exemple I.*

Si l'on veut calculer la valeur préſente d'une rente annuelle de 75 liv. qui ne doit commencer à être perçue que dans dix ans, & continuer enſuite ſept ans après ce terme, à ſix pour cent, &c. intérêt ſur intérêt ?

La

La premiere opération dans cette question est de trouver ce que valent en argent comptant 75 livres par an, à continuer pendant sept ans, comme si l'on devoit en jouir d'abord, & pour cela nous avons $u = 75$, $R = 1,06$, & $t = 7$; on demande $P$ comme dans la premiere question de cette section.

Ainsi $\frac{u}{R^t} = \frac{75}{1,50363} = 49,8793$, & $75 - 49,8793 = 25,1207 = u - \frac{u}{R}$; ensuite $R - 1 = 0,06$ ) 25,1207 ( $418,6783 = P = 418$ liv. 13 sols $6\frac{3}{4}$ den., *réponse à la premiere partie.*

La seconde opération consiste à trouver quel principal ou somme peut dans dix ans, à six pour cent, &c. monter à 418 liv. 13 s. $6\frac{3}{4}$ den. Nous avons ici $S = 418,6783$, $R = 1,06$, & $t = 10$. Nous trouverons $P$ par le théorême 2. sect. 1. de ce chap. 12. en cette maniere : $R^{10} = 1,790847$ ) $418,6783 = S$ ( $233,7884 = 233$ l. 15 sols 9 den., valeur présente de 75 liv. par an en reversion, &c. comme il étoit requis.

*EXEMPLE II.*

Quelle annuité ou rente annuelle dans laquelle on doit entrer au bout de dix ans, pour en jouir ensuite pendant sept ans, peut s'acheter à 233 liv. 15 sols 9 den. argent comptant, à six pour cent, &c. intérêt sur intérêt ?

Dans la premiere opération de cette question on a $P = 233,7884$, $R = 1,06$, & $t = 10$ ( tems pendant lequel on ne jouit pas de l'annuité ), on trouvera $S$ par le théorême 1. de cette section, en cette maniere :

$PR^t = 233,7884 \times 1,790847 = 418,6783 = S$; montant de 233 liv. 15 sols 9 den. à intérêt pendant dix ans, à 6 pour cent, &c. Ensuite pour la seconde opération de cette question on a $P = 418,6783$, $R = 1,06$, & $t = 7$ ( tems pendant lequel on doit jouir de l'annuité ); on trouvera $u$ par le théor. 2. de cette sect. en cette maniere:

$PR^t \times R = 418,6783 \times 1,50363 \times 1,06 = 667,3095$
$- PR^t = 418,6783 \times 1,50363 = 629,5372$
$R^t - 1 = 0,50363$ ) $\overline{37,7723}$ ( $75 = u$,

c'eſt-à-dire $u = 75$ liv. eſt la rente annuelle requiſe par la queſtion.

Ces deux exemples pour trouver *P* & *u* développent entiérement la méthode dont on doit ſe ſervir pour réſoudre les deux queſtions générales, & qui ſont les plus utiles touchant les *annuités* ou *fermes en reverſion*; & ſi l'occaſion s'en préſente, on peut également trouver le taux *R* ou le tems *t*, en bien appliquant leurs théor. reſpectifs.

*Nota.* Tout ce qu'on a fait dans les deux dernieres ſections, touchant les annuités ou rentes annuelles, &c. à ſix pour cent, peut ſe faire également pour tout autre taux d'intérêt, en appliquant la différence des taux ( *x* ) comme dans la premiere ſection de ce chapitre.

Maintenant comme les rentes & annuités ſe payent ordinairement par *quartiers* ou par *ſemeſtres*, & que la maniere de les calculer ſans Tables peut paroître un peu difficile, j'ai inſeré les Tables ſuivantes des montans d'une livre pour chacun, à ſix pour cent.

| *Semeſtres* = *t.* | *Montant d'une liv. à ſix pour cent, &c. interet ſur intérêt.* | *Semeſtres* = *t.* | *Montant d'une liv. à 6 pour cent, intérêt ſur intérêt.* |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,0295630141 | 16 | 1,5938480745 |
| 2 | 1,06 | 17 | 1,6409670276 |
| 3 | 1,0613367949 | 18 | 1,6894789589 |
| 4 | 1,1236 | 19 | 1,7394250493 |
| 5 | 1,1568170026 | 20 | 1,7908476965 |
| 6 | 1,191016 | 21 | 1,8437905523 |
| 7 | 1,2262260228 | 22 | 1,8982985583 |
| 8 | 1,26247696 | 23 | 1,9544179853 |
| 9 | 1,2997995842 | 24 | 2,0121964718 |
| 10 | 1,3382255776 | 25 | 2,0716830644 |
| 11 | 1,3777875592 | 26 | 2,1329282601 |
| 12 | 1,4185191122 | 27 | 2,1959840483 |
| 13 | 1,4604548127 | 28 | 2,2609039557 |
| 14 | 1,5036302590 | 29 | 2,3277430912 |
| 15 | 1,5480821017 | 30 | 2,3965581001 |

| Quartiers = t | Montant d'une liv. à six pour cent, intérêt sur intérêt. | Quartiers = t. | Montant d'une liv. à six pour cent, intérêt sur intérêt. |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,0146738461 | 31 | 1,5707984203 |
| 2 | 1,0295630141 | 32 | 1,5938480745 |
| 3 | 1.0446706634 | 33 | 1,6172359557 |
| 4 | 1,06 | 34 | 1,6409670276 |
| 5 | 1,0755542769 | 35 | 1,6650463253 |
| 6 | 1,0913367949 | 36 | 1,6894789589 |
| 7 | 1,1073509032 | 37 | 1,7142701133 |
| 8 | 1,1236 | 38 | 1,7394250493 |
| 9 | 1,1400875335 | 39 | 1,7649491048 |
| 10 | 1,1568170026 | 40 | 1,7908476965 |
| 11 | 1,1737919574 | 41 | 1,8171263199 |
| 12 | 1,191016 | 42 | 1,8437905523 |
| 13 | 1,2084927856 | 43 | 1,8708460509 |
| 14 | 1,2262260228 | 44 | 1,8982985583 |
| 15 | 1,2442194748 | 45 | 1,9261538989 |
| 16 | 1,26247696 | 46 | 1,9544179853 |
| 17 | 1,2810023527 | 47 | 1,9830968140 |
| 18 | 1,2997995842 | 48 | 2,0121964718 |
| 19 | 1,3188726433 | 49 | 2,0417231330 |
| 20 | 1,3382255776 | 50 | 2,0716830644 |
| 21 | 1,3578024938 | 51 | 2,1020826228 |
| 22 | 1,3777875592 | 52 | 2,1329282601 |
| 23 | 1,3980050019 | 53 | 2,1642265211 |
| 24 | 1,4185191122 | 54 | 2,1959840483 |
| 25 | 1,4393342435 | 55 | 2,2282075801 |
| 26 | 1,4604548127 | 56 | 2,2609039557 |
| 27 | 1,4818853020 | 57 | 2,2940801123 |
| 28 | 1,5036302590 | 58 | 2,3277430912 |
| 29 | 1,5256942978 | 59 | 2,3619000349 |
| 30 | 1,5480821017 | 60 | 2,3965581931 |

Chacune de ces Tables peut aussi servir à un autre taux d'intérêt proposé, en prenant $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ de la différence du taux $= x$, &c.

Par exemple, s'il falloit calculer l'une des questions précédentes sur les annuités ou rentes, &c. à huit pour cent par an ; on diroit 1,08 — 1,06 = 0,02 = $x$ pour les payemens annuels, comme ci-devant ; par conséquent 2 ) 0,02 ( 0,01 = $x$ pour les payemens par semestres, ou 4 ) 0,02 ( 0,005 = $x$ pour les payemens par quartiers.

Mais ces valeurs de $x$, quoiqu'elles ne soient pas exactement vraies, peuvent fort bien servir indifféremment pour les petites rentes, comme je l'ai déja dit à la fin de la sect. 1[re] de ce chap. 12. Mais si vous voulez opérer exactement, vous direz :

$\sqrt{1,08}$ = 1,0392304845, &c.
— $\sqrt{1,06}$ = 1,0295630141. Voyez la table précédente des semestres.

*Difference* 0,0096674704 = $x$ pour les payemens par semestres.

Et $\sqrt{\sqrt{1,08}}$ = 1,0194263092, &c.
— $\sqrt{\sqrt{1,06}}$ = 1,0146738461. Voyez la derniere table des semestres.

Ce sont là les véritables valeurs de $x$, lesquelles étant élevées aux puissances avec leurs montans respectifs ( comme ci-devant pour les années, &c. ) selon que la question l'exige, &c. Le résultat sera la réponse à huit pour cent, &c. On peut faire la même chose pour tout autre taux, plus grand ou plus petit que 6.

Quoique cette méthode ( exposée après la Table des années ) pour faire usage des Tables, qui ne sont calculées que pour le taux de six pour cent, & les appliquer à tout autre taux d'intérêt composé, soit fort exacte, cependant je ne l'ai proposée que pour faire voir qu'on peut venir à bout de ce calcul sans le secours d'un grand nombre de Tables de différens taux, & je n'ai pas prétendu qu'elle fût en usage dans la pratique commune ; car il faut avouer que les tables calculées pour un taux d'intérêt particulier sont beaucoup plus utiles & commodes dans la pratique. Ainsi comme nos Législateurs

ont jugé à propos de réduire le *taux* de l'*intérêt*, & de le fixer à *cinq pour cent* par un Acte du Parlement, je me suis donné la peine (qui n'est pas petite) de calculer les Tables suivantes pour ce taux ; mais je n'ai pas cru qu'il fût à propos de supprimer celles à *six pour cent*, parce que les exemples ont été faits sur ces Tables, & que d'ailleurs elles peuvent être utiles pour les Baux à ferme des maisons, &c; car dans ces cas on accorde à l'acheteur un plus grand intérêt que n'est le taux commun de l'argent prêté.

*Nouvelles Tables des montans d'une livre au taux de cinq pour cent par an, intérêt sur intérêt, par années, semestres, quartiers, mois & jours.*

*I.* TABLE *des montans annuels d'une livre, &c.*

| *Années* = *t.* | *Montant d'une livre, &c.* | *Années* = *t.* | *Montant d'une livre, &c:* |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,05 = $R$ | 21 | 2,78596259 |
| 2 | 1,1025 = $RR$ | 22 | 2,92526072 |
| 3 | 1,157625 = $R^3$ | 23 | 3,07152375 |
| 4 | 1,21550625 | 24 | 3,22509994 |
| 5 | 1,27628156 | 25 | 3,38635494 |
| 6 | 1,34009564 | 26 | 3,55567269 |
| 7 | 1,40710042 | 27 | 3,73345632 |
| 8 | 1,47745544 | 28 | 3,92012914 |
| 9 | 1,55132822 | 29 | 4,11613599 |
| 10 | 1,62889463 | 30 | 4,32194239 |
| 11 | 1,71033936 | 31 | 4,53803949 |
| 12 | 1,79585633 | 32 | 4,76494147 |
| 13 | 1,88564914 | 33 | 5,00318854 |
| 14 | 1,97993160 | 34 | 5,25334797 |
| 15 | 2,07892818 | 35 | 5,51601536 |
| 16 | 2,18287459 | 36 | 5,79181613 |
| 17 | 2,29201832 | 37 | 6,08140694 |
| 18 | 2,40661923 | 38 | 6,38547729 |
| 19 | 2,52695019 | 39 | 6,70475115 |
| 20 | 2,65329770 | | |

## II. TABLE des montans par semestres d'une livre, &c.

| Semestres = t. | Montant d'une livre, &c. | Semestres = t. | Montant d'une livre, &c. | Semestres = t. | Montant d'une livre, &c. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,02469507 | 11 | 1,30779943 | 21 | 1,66912030 |
| 2 | 1,05 | 12 | 1,34009564 | 22 | 1,71033936 |
| 3 | 1,07592983 | 13 | 1,37318940 | 23 | 1,75257632 |
| 4 | 1,1025 | 14 | 1,40710042 | 24 | 1,79585633 |
| 5 | 1,12972632 | 15 | 1,44184887 | 25 | 1,84020513 |
| 6 | 1,157625 | 16 | 1,47745544 | 26 | 1,88564914 |
| 7 | 1,18621264 | 17 | 1,51394132 | 27 | 1,93221539 |
| 8 | 1,21550625 | 18 | 1,55132822 | 28 | 1,97993160 |
| 9 | 1,24552327 | 19 | 1,58963838 | 29 | 2,02882616 |
| 10 | 1,27628156 | 20 | 1,62889463 | 30 | 2,07892818 |

## III. TABLE des montans par quartiers d'une liv. &c.

| Quartiers = t | Montant d'une livre, &c. | Quartiers = t. | Montant d'une livre, &c. | Quartiers = t. | Montant d'une livre, &c. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,01227223 | 21 | 1,29194439 | 41 | 1,64888480 |
| 2 | 1,02469507 | 22 | 1,30779943 | 42 | 1,66912031 |
| 3 | 1,03727037 | 23 | 1,32384905 | 43 | 1,68960414 |
| 4 | 1,05 | 24 | 1,34009564 | 44 | 1,71033936 |
| 5 | 1,06288585 | 25 | 1,35654161 | 45 | 1,73132904 |
| 6 | 1,07592983 | 26 | 1,37318940 | 46 | 1,75257632 |
| 7 | 1,08913389 | 27 | 1,39004151 | 47 | 1,77408435 |
| 8 | 1,1025 | 28 | 1,40710042 | 48 | 1,79585633 |
| 9 | 1,11603014 | 29 | 1,42436869 | 49 | 1,81789549 |
| 10 | 1,12972632 | 30 | 1,44184887 | 50 | 1,84020513 |
| 11 | 1,14359059 | 31 | 1,45954358 | 51 | 1,86278856 |
| 12 | 1,157625 | 32 | 1,47745544 | 52 | 1,88564914 |
| 13 | 1,17183164 | 33 | 1,49558712 | 53 | 1,90879027 |
| 14 | 1,18621264 | 34 | 1,51394132 | 54 | 1,93221539 |
| 15 | 1,20077012 | 35 | 1,53252076 | 55 | 1,95592799 |
| 16 | 1,21550625 | 36 | 1,55132822 | 56 | 1,97993160 |
| 17 | 1,23042323 | 37 | 1,57036648 | 57 | 2,00422978 |
| 18 | 1,24552327 | 38 | 1,58963838 | 58 | 2,02882616 |
| 19 | 1,26080862 | 39 | 1,60914680 | 59 | 2,05372439 |
| 20 | 1,27628156 | 40 | 1,62889463 | 60 | 2,07892818 |

*IV.* TABLE *des montans par mois d'une livre, &c.*

| *Mois* $= t$ | *Montant d'une livre, &c.* | *Mois* $= t.$ | *Montant d'une livre, &c.* |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,00407412 | 7 | 1,02886981 |
| 2 | 1,00816485 | 8 | 1,03306155 |
| 3 | 1,01227223 | 9 | 1,03727037 |
| 4 | 1,01639636 | 10 | 1,04149634 |
| 5 | 1,02053728 | 11 | 1,04573953 |
| 6 | 1,02469507 | 12 | 1,05 |

*Nota.* Le montant d'une livre pour un jour eſt 1,0001336827225, &c. ( trouvé comme celui de la Table de ſix pour cent ) ; mais dans la Table ſuivante je ne prends que neuf de ces *figures*, ce qui ſuffit à la pratique pour calculer l'intérêt d'une ſomme qui n'excède pas cent millions de livres.

*V.* TABLE *des montans par jour d'une livre, &c.*

| *Jours* $= t.$ | *Montant d'une liv. &c.* | *Jours* $= t.$ | *Montant d'une liv. &c.* |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,00013368 | 14 | 1,00187315 |
| 2 | 1,00026738 | 15 | 1,00200708 |
| 3 | 1,00040109 | 16 | 1,00214103 |
| 4 | 1,00053483 | 17 | 1,00227500 |
| 5 | 1,00066858 | 18 | 1,00240899 |
| 6 | 1,00080235 | 19 | 1,00254299 |
| 7 | 1,00093614 | 20 | 1,00267701 |
| 8 | 1,00106994 | 21 | 1,00281105 |
| 9 | 1,00120377 | 22 | 1,00294510 |
| 10 | 1,00133761 | 23 | 1,00307918 |
| 11 | 1,00147147 | 24 | 1,00321327 |
| 12 | 1,00160535 | 25 | 1,00334738 |
| 13 | 1,00173924 | 26 | 1,00348151 |

| Jours = t. | Montant d'une liv. &c. | Jours = t. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|---|---|
| 27 | 1,00361565 | 61 | 1,00818731 |
| 28 | 1,00374982 | 62 | 1,00832208 |
| 29 | 1,00388400 | 63 | 1,00845687 |
| 30 | 1,00401820 | 64 | 1,00859168 |
| 31 | 1,00415242 | 65 | 1,00872651 |
| 32 | 1,00428665 | 66 | 1,00886136 |
| 33 | 1,00442091 | 67 | 1,00899623 |
| 34 | 1,00455518 | 68 | 1,00913111 |
| 35 | 1,00468947 | 69 | 1,00926601 |
| 36 | 1,00482378 | 70 | 1,00940093 |
| 37 | 1,00495810 | 71 | 1,00953587 |
| 38 | 1,00509245 | 72 | 1,00967082 |
| 39 | 1,00522681 | 73 | 1,00980579 |
| 40 | 1,00536119 | 74 | 1,00994079 |
| 41 | 1,00549558 | 75 | 1,01007579 |
| 42 | 1,00563000 | 76 | 1,01021083 |
| 43 | 1,00576443 | 77 | 1,01034587 |
| 44 | 1,00589888 | 78 | 1,01048093 |
| 45 | 1,00603335 | 79 | 1,01061602 |
| 46 | 1,00616784 | 80 | 1,01075112 |
| 47 | 1,00630234 | 81 | 1,01088623 |
| 48 | 1,00643687 | 82 | 1,01102137 |
| 49 | 1,00657141 | 83 | 1,01115652 |
| 50 | 1,00670597 | 84 | 1,01129169 |
| 51 | 1,00684055 | 85 | 1,01142688 |
| 52 | 1,00697514 | 86 | 1,01156209 |
| 53 | 1,00710975 | 87 | 1,01169732 |
| 54 | 1,00724438 | 88 | 1,01183256 |
| 55 | 1,00737903 | 89 | 1,01196783 |
| 56 | 1,00751370 | 90 | 1,01210311 |
| 57 | 1,00764839 | 91 | 1,01223841 |
| 58 | 1,00778309 | 92 | 1,01237372 |
| 59 | 1,00791781 | 93 | 1,01250906 |
| 60 | 1,00805255 | 94 | 1,01264441 |

| Jours = t. | Montant d'une livre, &c. | Jours = t. | Montant d'une livre, &c. |
|---|---|---|---|
| 95 | 1,01277978 | 129 | 1,01739317 |
| 96 | 1,01291517 | 130 | 1,01752918 |
| 97 | 1,01305058 | 131 | 1,01766521 |
| 98 | 1,01318600 | 132 | 1,01780125 |
| 99 | 1,01332145 | 133 | 1,01793731 |
| 100 | 1,01345691 | 134 | 1,01807338 |
| 101 | 1,01359239 | 135 | 1,01820948 |
| 102 | 1,01372788 | 136 | 1,01834559 |
| 103 | 1,01386340 | 137 | 1,01848173 |
| 104 | 1,01399893 | 138 | 1,01861788 |
| 105 | 1,01413448 | 139 | 1,01875405 |
| 106 | 1,01427005 | 140 | 1,01889024 |
| 107 | 1,01440564 | 141 | 1,01902644 |
| 108 | 1,01454125 | 142 | 1,01916267 |
| 109 | 1,01467687 | 143 | 1,01929891 |
| 110 | 1,01481252 | 144 | 1,01943517 |
| 111 | 1,01494818 | 145 | 1,01957145 |
| 112 | 1,01508386 | 146 | 1,01970775 |
| 113 | 1,01511955 | 147 | 1,01984406 |
| 114 | 1,01535527 | 148 | 1,01998039 |
| 115 | 1,01549100 | 149 | 1,02011675 |
| 116 | 1,01562675 | 150 | 1,02025312 |
| 117 | 1,01576252 | 151 | 1,02038950 |
| 118 | 1,01589831 | 152 | 1,02052591 |
| 119 | 1,01603412 | 153 | 1,02066234 |
| 120 | 1,01616994 | 154 | 1,02079878 |
| 121 | 1,01630578 | 155 | 1,02093524 |
| 122 | 1,01644164 | 156 | 1,02107172 |
| 123 | 1,01657752 | 157 | 1,02120822 |
| 124 | 1,01671349 | 158 | 1,02134473 |
| 125 | 1,01684933 | 159 | 1,02148127 |
| 126 | 1,01698527 | 160 | 1,02161782 |
| 127 | 1,01712122 | 161 | 1,02175439 |
| 128 | 1,01725719 | 162 | 1,02189098 |

| Jours = t. | Montant d'une liv. &c. | Jours = t. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|---|---|
| 163 | 1,02202758 | 198 | 1,02682015 |
| 164 | 1,02216421 | 199 | 1,02695762 |
| 165 | 1,02230085 | 200 | 1,02709490 |
| 166 | 1,02243751 | 201 | 1,02736921 |
| 167 | 1,02257419 | 202 | 1,02736953 |
| 168 | 1,02271089 | 203 | 1,02750686 |
| 169 | 1,02284761 | 204 | 1,02764422 |
| 170 | 1,02298434 | 205 | 1,02778160 |
| 171 | 1,02312108 | 206 | 1,02791899 |
| 172 | 1,02325787 | 207 | 1,02805640 |
| 173 | 1,02339466 | 208 | 1,02819384 |
| 174 | 1,02353147 | 209 | 1,02833129 |
| 175 | 1,02366829 | 210 | 1,02846875 |
| 176 | 1,02380514 | 211 | 1,02860624 |
| 177 | 1,02394200 | 212 | 1,02874375 |
| 178 | 1,02407888 | 213 | 1,02888127 |
| 179 | 1,02421578 | 214 | 1,02901881 |
| 180 | 1,02435270 | 215 | 1,02915637 |
| 181 | 1,02448964 | 216 | 1,02929395 |
| 182 | 1,02462659 | 217 | 1,02943154 |
| 183 | 1,02476356 | 218 | 1,02956916 |
| 184 | 1,02490055 | 219 | 1,02970679 |
| 185 | 1,02503756 | 220 | 1,02984445 |
| 186 | 1,02517459 | 221 | 1,02998212 |
| 187 | 1,02531164 | 222 | 1,03011980 |
| 188 | 1,02544870 | 223 | 1,03025751 |
| 189 | 1,02558578 | 224 | 1,03039524 |
| 190 | 1,02572288 | 225 | 1,03053298 |
| 191 | 1,02586000 | 226 | 1,03067074 |
| 192 | 1,02599714 | 227 | 1,03080852 |
| 193 | 1,02613430 | 228 | 1,03094632 |
| 194 | 1,02627147 | 229 | 1,03108414 |
| 195 | 1,02640866 | 230 | 1,03122197 |
| 196 | 1,02654588 | 231 | 1,03135983 |
| 197 | 1,02668310 | 232 | 1,03149770 |

| Jours = t. | Montant d'une liv. &c. | Jours = t. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|---|---|
| 233 | 1,03163559 | 268 | 1,03647342 |
| 234 | 1,03177350 | 269 | 1,03661197 |
| 235 | 1,03191143 | 270 | 1,03675055 |
| 236 | 1,03204038 | 271 | 1,03688914 |
| 237 | 1,03218734 | 272 | 1,03702775 |
| 238 | 1,03232533 | 273 | 1,03716638 |
| 239 | 1,03246333 | 274 | 1,03730503 |
| 240 | 1,03260135 | 275 | 1,03744370 |
| 241 | 1,03273939 | 276 | 1,03758239 |
| 242 | 1,03287744 | 277 | 2,03773109 |
| 243 | 1,03301552 | 278 | 1,03785982 |
| 244 | 1,03315361 | 279 | 1,03799856 |
| 245 | 1,03329173 | 280 | 1,03813732 |
| 246 | 1,03342986 | 281 | 1,03827609 |
| 247 | 1,03356801 | 282 | 1,03841489 |
| 248 | 1,03370617 | 283 | 1,03855371 |
| 249 | 1,03384436 | 284 | 1,03869254 |
| 250 | 1,03398157 | 285 | 1,03883139 |
| 251 | 1,03412079 | 286 | 1,03897027 |
| 252 | 1,03425903 | 287 | 1,03910916 |
| 253 | 1,03439729 | 288 | 1,03924817 |
| 254 | 1,03453557 | 289 | 1,03938699 |
| 255 | 1,03467387 | 290 | 1,03952594 |
| 256 | 1,03481218 | 291 | 1,03966491 |
| 257 | 1,03495052 | 292 | 1,03980389 |
| 258 | 1,03508887 | 293 | 1,03994289 |
| 259 | 1,03522724 | 294 | 1,04008191 |
| 260 | 1,03536563 | 295 | 1,04022095 |
| 261 | 1,03550404 | 296 | 1,04036001 |
| 262 | 1,03564247 | 297 | 1,04049908 |
| 263 | 1,03578091 | 298 | 1,04063818 |
| 264 | 1,03591938 | 299 | 1,04077729 |
| 265 | 1,03605786 | 300 | 1,04091642 |
| 266 | 1,03619636 | 301 | 1,04105557 |
| 267 | 1,03633488 | 302 | 1,04119474 |

| Jours = t. | Montant d'une liv. &c. | Jours = t. | Montant d'une liv. &c. |
|---|---|---|---|
| 303 | 1,04133393 | 335 | 1,04579777 |
| 304 | 1,04147314 | 336 | 1,04593757 |
| 305 | 1,04161236 | 337 | 1,04607739 |
| 306 | 1,04175160 | 338 | 1,04621723 |
| 307 | 1,04189086 | 339 | 1,04635700 |
| 308 | 1,04203015 | 340 | 1,04649697 |
| 309 | 1,04216944 | 341 | 1,04663686 |
| 310 | 1,04230876 | 342 | 1,04677678 |
| 311 | 1,04244810 | 343 | 1,04691671 |
| 312 | 1,04258245 | 344 | 1,04705667 |
| 313 | 1,04272683 | 345 | 1,04719664 |
| 314 | 1,04286622 | 346 | 1,04733663 |
| 315 | 1,04300563 | 347 | 1,04747664 |
| 316 | 1,04314506 | 348 | 1,04761666 |
| 317 | 1,04328451 | 349 | 1,04775671 |
| 318 | 1,04342397 | 350 | 1,04789677 |
| 319 | 1,04356346 | 351 | 1,04803686 |
| 320 | 1,04370297 | 352 | 1,04817696 |
| 321 | 1,04384249 | 353 | 1,04831708 |
| 322 | 1,04398203 | 354 | 1,04845722 |
| 323 | 1,04412159 | 355 | 1,04859738 |
| 324 | 1,04426117 | 356 | 1,04873756 |
| 325 | 1,04440077 | 357 | 1,04887775 |
| 326 | 1,04454038 | 358 | 1,04901797 |
| 327 | 1,04468002 | 359 | 1,04915820 |
| 328 | 1,04481967 | 360 | 1,04929845 |
| 329 | 1,04495934 | 361 | 1,04943872 |
| 330 | 1,04509803 | 362 | 1,04957901 |
| 331 | 1,04523874 | 363 | 1,04971932 |
| 332 | 1,04537847 | 364 | 1,04985965 |
| 333 | 1,04551822 | 365 | 1,04999999 |
| 334 | 1,04565798 | | *ou* 1,05. |

Je crois que je n'ai rien à dire sur l'usage de ces Tables, puisqu'il est évident que celui qui comprend les

opérations des exemples précédens, à *six pour cent*, ne sçauroit manquer de comprendre l'usage de ces tables, à *cinq pour cent*, selon l'occasion.

C'est assez parler des *annuités* ou *fermes*, &c. qui sont limitées par un tems déterminé, & c'est tout ce qu'on peut calculer par théorêmes, ou certaines régles; néanmoins on ne sera pas fâché de trouver ici un petit détail de l'estimation qui a été faite avec beaucoup de vraisemblance par deux sçavans sur la proportion ou différence de la vie des hommes, selon leurs différens âges; elle peut être fort utile au calcul de la valeur des annuités ou des fermes viageres, &c.

M. *Guillaume Petty* dans un discours qu'il fit en présence de la Société Royale (l'an 1674) sur l'usage de la *proportion doublée* dans la durée de la vie des hommes, dit qu'on a trouvé, par expérience, qu'il y a plus de personnes qui vivent entre l'âge de 16 & de 26 ans que dans tout autre âge ou dixaine d'années de la vie d'un homme (de 70 ou 80 ans). Je ne rapporterai pas ici les raisons qu'il en donne, mais en supposant le fait véritable, il en conclut que les racines de chaque nombre de l'âge des hommes, au dessous de 16 (dont la racine est 4) comparées avec ce nombre 4, donnent la proportion de la probabilité que ces hommes arriveront à l'âge de 70 ans.

Par exemple, il est quatre fois plus vraisemblable qu'un homme de 16 ans vivra 70 ans, qu'un enfant nouveau né. Il est trois fois plus vraisemblable qu'un jeune homme de 9 ans vivra 70 ans, que cet enfant nouveau né, &c.

D'un autre côté, la probabilité est de 5 à 4 qu'un homme de 25 ans mourra avant celui de 16; & de 6 à 5 qu'un homme de 36 ans, mourra avant celui de 25, & ainsi de suite, selon les racines de tous les âges, comparées avec (4,6) racine de 21, qui est l'âge de perfection, selon l'esprit de nos Loix, & celui où les rentes viageres ont le plus de valeur.

2°. Le Docteur *Edmond Halley*, l'un de nos plus grand Mathématiciens ( dans les Transactions philosophiques, *nomb*. 196. ) forme avec beaucoup d'industrie & de génie une estimation de la proportion de la vie des hommes sur les tables qui paroissent tous les mois de la naissance & de la mort des hommes à Breslaw, capitale de la Silesie, ou comme les Allemands l'appellent, de la Schlesie; par où il prouve qu'il y a à parier 80 contre un qu'un homme de 25 ans ne mourra pas dans un an, 5 ½ contre 1, qu'un homme de 40 ans vivra 7 ans, qu'un homme de 30 ans peut raisonnablement espérer de vivre 27 ou 28 ans, &c. D'où il conclut avec raison qu'on doit régler sur ces proportions & autres semblables, le prix de l'assurance de la vie des hommes, y ayant une grande différence entre la vie d'un homme de 20 ans & celle d'un homme de 50. Par exemple, il y a à parier cent contre un, qu'un homme de 20 ans ne mourra pas dans un an, & seulement 38 contre un pour un homme de 50 ans. Et de là dépend aussi l'évaluation des *pensions viageres*; car il est clair que l'acheteur ne doit payer que la partie de la valeur de cette pension proportionnelle à la probabilité du tems qui lui reste à vivre. C'est pour cela que ce sçavant homme a pris la peine ( qui n'est pas petite ) de calculer la Table suivante, qui fait voir la valeur des annuités pour tous les âges de 5 en 5 ans, jusqu'à 70.

| *Ages.* | *Achat des années.* | *Ages.* | *Achat des années.* |
|---|---|---|---|
| 1 | 10,28 | 40 | 10,57 |
| 5 | 13,40 | 45 | 9,91 |
| 10 | 13,44 | 50 | 9,21 |
| 15 | 13,33 | 55 | 8,51 |
| 20 | 12,78 | 60 | 7,60 |
| 25 | 12,27 | 65 | 6,54 |
| 30 | 11,72 | 70 | 5,32 |
| 35 | 11,12 | | |

Le même Auteur va plus loin, & nous apprend à estimer la valeur de deux vies, & ensuite de trois, ce qui étant trop long pour être rapporté ici, je n'en parlerai pas, & j'ajouterai seulement cette observation sérieuse.

Nous avons grand tort de nous plaindre de la brièveté de notre vie, & de nous croire fort maltraités lorsque nous n'arrivons pas à un âge bien avancé, puisqu'il paroît que la moitié de ceux qui naissent meurent dans dix-sept ans; car on trouve par les Billets de mortalité à Breslaw, dont nous venons de parler, que 1238 furent dans cet espace de tems réduits à 616: ensorte qu'au lieu de murmurer de ce que la vie nous paroît trop courte, nous devons regarder comme un grand bonheur que nous ayons survécu, peut-être un grand nombre d'années au dessus de la période de vie, où la moitié des hommes n'arrive pas.

---

## SECTION IV.

*De l'achat des francs-Fiefs ou des biens immeubles, intérêt sur intérêt.*

On suppose que tous les francs-fiefs & biens immeubles sont achetés pour toujours (c'est-à-dire sans aucun tems limité), par conséquent le calcul de leur vraie valeur est fondé sur un rang ou une suite de quantités géométriquement proportionnelles continues & décroissantes à l'infini.

Soient donc $P$, $u$, $R$ les mêmes quantités que dans la derniere section; la suite sera $\frac{u}{R}$, $\frac{u}{RR}$, $\frac{u}{R^3}$, $\frac{u}{R^4}$, $\frac{u}{R^5}$, & ainsi de suite en $\div$ jusqu'au dernier terme $= 0$. Nous aurons donc $P - 0$ (ou $P$) pour la somme de tous les antécedens, & $P - \frac{u}{R}$ pour celle de tous les conséquens; & ainsi $u : \frac{u}{R} :: P : P - \frac{u}{R}$, ce qui produit $PR - u = P$.

Cette équation fournit les théorêmes ſuivans.

Théorême 1. $PR - P = u$.

Théorême 2. $\left\{ \dfrac{u}{R - 1} = P. \right.$

Théorême 3. $\left\{ \dfrac{P + u}{P} = R. \right.$

EXEMPLE.

On veut vendre une Terre de 75 livres de rente annuelle, que vaut-elle en accordant à l'acheteur le ſix pour cent, &c. de ſon argent, intérêt ſur intérêt ?

Dans cette queſtion nous avons $u = 75$, $R = 1{,}06$, on trouvera $P$ par le théorême 2, en cette maniere : $R - 1 = 0{,}06$ ) $75 = u$ ( 1250 liv. $= P$, réponſe requiſe, & ainſi des autres, ſelon l'occurence.

Mais ſi la rente doit être payée par quartiers ou par ſemeſtres, on aura

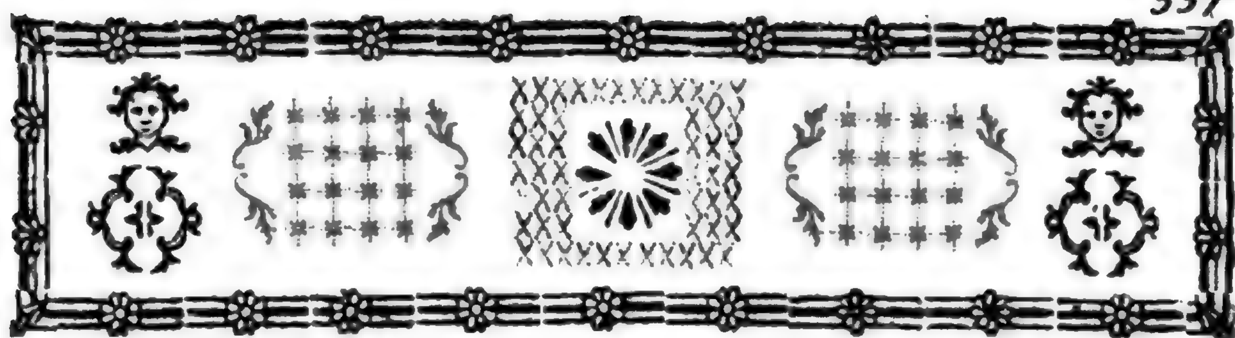
$R = \sqrt{1{,}06}$ } pour les payemens, à ſix pour cent, } par *ſemeſtres*,
Et $R = \sqrt{\sqrt{1{,}06}}$ } par *quartiers*,

ou { $R = 1{,}08$ } pour les payemens, à huit pour cent, } par *ans*,
$R = \sqrt{1{,}08}$ } par *ſemeſtres*,
$R = \sqrt{\sqrt{1{,}08}}$ } par *quartiers*.

On doit entendre la même choſe pour tout autre taux d'intérêt plus grand ou plus petit que ſix pour cent.

L'application de ces Théorêmes à la pratique eſt ſi aiſée, qu'il eſt inutile d'en donner d'autres exemples.

*Fin de la ſeconde Partie.*



# LE GUIDE DES JEUNES MATHÉMATICIENS.

## TROISIEME PARTIE.

## CHAPITRE PREMIER.

### DES DEFINITIONS GEOMETRIQUES, &c.

## SECTION PREMIERE.

### *Des Lignes & Angles.*

1. LE *point* n'a aucune partie, c'est-à-dire que le *point géométrique* n'est pas une quantité, mais seulement une place déterminée dans la quantité, marquée par un point, comme en A & B. ( A. B.

On peut concevoir cette place tellement petite, qu'elle n'ait ni longueur, ni largeur, ni épaisseur, & par conséquent le point n'a aucune partie.

2. La *ligne* est une quantité d'une seule dimension,

parce qu'on peut lui ſuppoſer une longueur, mais ſans largeur ni épaiſſeur, étant formée ou repréſentée à l'œil par le mouvement d'un point, c'eſt-à-dire que ſi le point, qui eſt A, ſe meut (dans le même plan) vers le point qui eſt en B, il décrira une ligne ou droite, ou circulaire, ou courbe, ſelon le mouvement qu'il aura.

Donc les extrémités ou les limites d'une ligne ſont des points.

3. La *ligne droite* eſt celle qui eſt placée également entre les points qui limitent ſa longueur, étant la plus courte qu'on puiſſe mener entre deux points, comme la ligne A ——— B.

Donc entre deux points, on ne peut mener ou tirer qu'une ſeule ligne droite.

4. La *ligne circulaire*, *courbe*, ou *oblique* eſt celle qui monte ou deſcend entre les points qui limitent ſa longueur, comme les lignes C D (*fig* 1.) ou F G, &c.

Il y a différentes ſortes de lignes de cette eſpece, mais celles du cercle, de la parabole, de l'ellipſe, & de l'hyperbole ſont les plus uſitées : nous en donnerons dans la ſuite un détail particulier.

5. Les *lignes paralleles* ſont celles qui ſont également éloignées l'une de l'autre dans toutes leurs parties, c'eſt-à-dire celles qui étant étendues à l'infini (dans le même plan) ne ſe rencontrent jamais, comme les lignes A B & *ab*, ou C D & *cd* (*fig.* 2.).

6. Les *lignes* non *paralleles*, mais inclinées, ou penchées l'une vers l'autre, ſoit que ce ſoit des lignes droites ou des lignes circulaires, ne manqueront pas (ſi elles ſont étendues ou prolongées) de ſe rencontrer & de faire un angle ; le point où elles ſe rencontrent ſe nomme le *point angulaire*, comme A (*fig.* 3); & ſelon que ces lignes ſont plus proches ou plus éloignées l'une de l'autre, l'angle eſt dit plus petit ou plus grand, ſoit que les lignes qui renferment l'angle ſoient longues ou courtes, c'eſt-à-dire que les lignes A*d* & A*f* renferment le même angle que A B & A C, quoique A B ſoit plus longue que A*d*, &c.

7. Tous les angles renfermés entre des lignes droites, se nomment *angles rectilignes*, & ceux qui sont renfermés entre des lignes circulaires, se nomment *angles spheriques*; mais tous les angles, tant rectilignes que spheriques, tombent sous ces trois dénominations;

Sçavoir { l'*angle droit*, l'*angle obtus*, l'*angle aigu*.

8. L'angle droit est celui qui est renfermé entre deux lignes qui se rencontrent l'une & l'autre perpendiculairement, c'est-à-dire, lorsqu'une ligne droite, comme D C (*fig.* 4), rencontre une autre ligne droite, comme AB, si directement qu'elle n'incline ni ne décline pas plus d'un côté que de l'autre, mais qu'elle forme les angles des deux côtés de cette ligne égaux, comme en *x* & *x*; ces angles se nomment *angles droits*, & les lignes qui se rencontrent ainsi, se nomment *perpendiculaires* l'une à l'autre, c'est-à-dire A C & C B sont perpendiculaires à D C, aussi bien que D C à chacune des deux.

9. L'angle obtus est celui qui est plus grand que l'angle droit, tel est l'angle renfermé entre les lignes A C & C B (*fig.* 5).

10. L'angle aigu est celui qui est plus petit que l'angle droit, comme l'angle renfermé entre les lignes CB & CD; ces deux angles se nomment en général *angles obliques*.

---

## SECTION II.

### *Du Cercle, &c.*

AVant que de définir le cercle & ses parties, il est à propos de donner briévement une idée générale des surfaces.

1. La superficie ou surface est le dessus ou l'extérieur de tout ce qui est visible; mais on n'appelle surface en géométrie, que l'extérieur d'une chose, entant qu'il est

fermé par une ou plusieurs lignes, selon la forme ou figure qui est déterminée ; elle se produit ou se forme par le mouvement de la ligne, comme la ligne se décrit par le mouvement du point, en cette maniere :

Supposons que la ligne AB (*fig* 6.) se meuve uniformément (sur le même plan) vers CD, les points qui sont en A & B décriront les deux lignes AC & BD, & par ce moyen ils formeront (ou renfermeront) la superficie ou figure ABCD, qui est une quantité de deux dimensions, c'est-à-dire qu'elle a longueur & largeur, mais sans épaisseur ; par conséquent les bornes ou limites d'une surface sont des lignes.

*Nota.* La superficie d'une figure se nomme ordinairement son *aire.*

2. Le *cercle* est une figure plane réguliere, dont l'aire est bornée ou limitée par une ligne continue, nommée *circonférence* ou *péripherie du cercle*, & que l'on peut décrire ou tracer en cette maniere :

Supposons qu'une ligne droite, comme CB (*fig.* 7.) a un de ses points extrêmes comme C, tellement fixé à un plan, que l'autre point B puisse se mouvoir autour de lui ; si le point B se meut en rond autour de C (sur le même plan) il décrira une ligne, qui dans toutes ses parties, sera également distante du point C, & qui sera la circonférence ou péripherie du cercle ; le point C en sera le centre, l'espace qu'elle renferme sera son aire, & la ligne droite CB, par laquelle le cercle est ainsi décrit, se nomme le *rayon.*

### COROLLAIRE.

De-là il suit évidemment qu'on peut mener du centre d'un cercle un nombre infini de lignes droites qui aboutiront à sa circonférence, & qui seront toutes égales les unes aux autres, parce qu'elles seront toutes égales au rayon.

Et avec un peu d'attention, on comprendra facilement que de chaque point d'un cercle on ne peut tirer que

deux lignes droites égales, qui aboutissent à la circonférence, excepté du centre seul.

3. Les *cercles égaux* sont ceux qui ont leurs rayons égaux ; car il est clair, par la derniere définition, que le même rayon (comme CB) ne peut que décrire des cercles égaux, quelque nombreux qu'ils soient.

4. Le diametre d'un cercle est le rayon doublé, ne faisant qu'une seule ligne droite, comme AB (*fig.* 8.) qui passe par le centre C, & se termine à la circonférence de chaque côté ; c'est-à-dire que le diametre divise le cercle en deux parties égales.

5. Le demi-cercle (ou la moitié du cercle) est une figure comprise entre le diametre & la moitié de la circonférence, coupée par le diametre, comme A D B.

6. Le quart de cercle est la moitié du demi-cercle, & il est formé par le rayon, comme D C (*fig.* 9.) qui est perpendiculaire au diametre au centre C, & qui coupe la circonférence du demi-cercle au milieu, comme en D ; par conséquent le quart de cercle ou la moitié du demi-cercle est la mesure de l'angle droit.

7. La *corde* ou la *sous-tendante* d'un *arc* est une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties inégales, comme la ligne S G, & elle est toujours plus petite que le diametre.

8. Le *segment du cercle* est une figure comprise entre la corde & l'arc de la circonférence, qui est coupé par la corde, & il est ou plus grand ou plus petit que le demi-cercle, comme la figure S M G, ou S D G.

9. Le *secteur* est une figure comprise entre deux rayons du cercle & l'arc de sa circonférence où ils aboutissent, comme A C B (*fig.* 10.) ; l'arc A B est la mesure de l'angle en C, renfermé entre les rayons A C & B C.

*Nota.* Tous les angles des secteurs se nomment angles au centre du cercle.

10. L'angle dans le segment du cercle est celui qui est compris entre deux cordes qui partent d'un même point de la circonférence, comme D, & arrivent aux deux ex-

trémités d'une autre corde, comme F & G, c'eſt-à-dire que les angles en D, en F, & en G, ſe nomment angles à la circonférence, ou angles dans le ſegment du cercle.

---

## SECTION III.

### *Des Triangles.*

Il y a deux ſortes de triangles, les plans & les ſpheriques; mais je ne donnerai pas ici la définition des ſpheriques, parce qu'ils ſe rapportent plus immédiatement à l'Aſtronomie.

1. Le *triangle plan* eſt une figure, dont l'aire eſt bornée par les limites de trois lignes droites, qui ſe nomment *côtés*, & qui forment trois angles, & l'on peut le diviſer & lui donner différens noms, tant par rapport à ſes côtés, que par rapport à ſes angles.

#### *I. Par rapport à ſes côtés.*

2. Le *triangle équilatéral* eſt celui dont les trois côtés ſont égaux, comme ABC (*fig.* 11.), c'eſt-à-dire AB = BC = AC.

3. Le *triangle iſoſcelle* eſt celui qui a ſeulement deux de ſes côtés égaux, comme BDG (*fig.* 12), c'eſt-à-dire BD = DG; mais le troiſiéme côté BG eſt ou plus grand ou plus petit, ſelon les circonſtances.

4. Le *triangle ſcalene* eſt celui qui a ſes trois côtés inégaux; tel eſt le triangle HKM (*fig.* 13).

#### *II. Par rapport à ſes angles.*

5. Le *triangle rectangle* eſt celui qui a un angle droit, c'eſt-à-dire lorſque deux de ſes côtés ſont perpendiculaires l'un à l'autre, comme CA (*fig.* 14) eſt ſuppoſé l'être à BA; par conſéquent l'angle en A eſt un angle droit par la définition 8. ſect. 1.

*Nota.* Le plus long côté de chaque triangle rectangle (comme BC) ſe nomme *hypothenuſe*, & le plus long des

deux autres côtés qui renferment l'angle droit ( comme BA ) se nomme *base* ; le troisiéme côté ( comme CA ) se nomme *catethus* ou *perpendiculaire*.

6. Le *triangle obtusangle* est celui qui a l'un de ses angles obtus, & on le nomme aussi *triangle ambligone* ; tel est le troisiéme triangle HKM ( *fig.* 13 ).

7. Le *triangle acutangle* est celui dont les trois angles sont aigus, & on le nomme *oxygone* ; tels sont le premier & second triangles ABC & BDG ( *fig.* 11 & 12 ).

*Nota.* Tous les triangles qui n'ont point d'angle droit, soit qu'ils soient acutangles ou obtusangles, se nomment généralement *triangles obliques*, sans autre distinction ; & le plus long côté de chaque triangle oblique, se nomme ordinairement la *base* ; les deux autres se nomment seulement *côtés* ou *jambes*.

8. La hauteur d'un triangle plan est la longueur d'une ligne droite qui tombe perpendiculairement de l'un de ses angles sur le côté opposé à l'angle d'où elle tombe, & elle peut se trouver ou en dedans ou en dehors du triangle, selon les circonstances ; on la voit marquée par deux lignes ponctuées dans les triangles ( *fig.* 15 ).

---

## SECTION IV.

### *Des figures à quatre côtés, &c.*

1. Le *quarré* est une figure plane réguliere, dont l'aire est limitée par quatre côtés égaux, tous perpendiculaires l'un à l'autre, c'est-à-dire lorsque AB = BC = CD = DA & que les angles A, B, C, D sont tous égaux ( *fig.* 16 ).

2. Le *rhombe* est une figure qui a quatre côtés égaux, mais point d'angle droit, c'est-à-dire que le rhombe est un quarré que l'on a tiré de sa position droite, comme la figure 17.

3. Le *rectangle* ou *parallelogramme rectangle* ( que l'on appelle souvent *quarré long* ou *oblong* ) est une figure qui

a quatre angles droits, & ses deux côtés opposés égaux; comme B C = H D, & B H = C D (*fig.* 18).

4. Le *rhomboïde* ou *parallelogramme obliqu'angle*, est un parallelogramme tiré de sa droite position, comme la *figure* 19.

5. La hauteur d'un parallelogramme obliqu'angle (c'est-à-dire, ou d'un rhombe ou d'un rhomboïde) est une ligne droite qui tombe perpendiculairement d'un angle sur le côté opposé à cet angle; elle peut tomber ou en dedans, ou en dehors de la figure, comme les lignes ponctuées le marquent dans la *figure* 20.

6. Toutes les figures à quatre côtés qui different des précédentes, se nomment *trapezes*, c'est à dire lorsqu'elles n'ont ni les côtés opposés, ni les angles opposés égaux, comme la *figure* 21.

7. Toute ligne droite menée d'un angle à son angle opposé dans une figure de quatre côtés, se nomme *ligne diagonale*, & elle divise l'aire de la figure en deux triangles; elle est marquée par la ligne ponctuée A C dans la *figure* ci-dessus.

8. Toutes les figures rectilignes qui ont plus de quatre côtés, se nomment *poligones*, soit qu'elles soient régulieres ou irrégulieres.

9. Le *poligone régulier* est celui qui a tous ses côtés égaux, formant entr'eux des angles égaux, & il prend son nom du nombre de ses côtés, ou de ses angles, c'est-à-dire que s'il a cinq côtés égaux, on le nomme *pentagone*, s'il a six côtés égaux, on le nomme *hexagone*, s'il en a sept, *heptagone*, s'il en a huit, *octogone*, &c.

*Nota*. Tous les poligones réguliers peuvent s'inscrire dans un cercle, c'est-à dire que leurs points angulaires, quelque nombreux qu'ils soient, toucheront tous exactement la circonférence d'un cercle.

10. Le *poligone irrégulier* est une figure qui a plusieurs côtés inégaux, formant entr'eux des angles inégaux) comme ceux de la *figure* 22. ou autres) & ces sortes de poligones sont d'une varieté infinie, mais on peut les ré-

duire tous à des figures régulieres, en tirant des lignes diagonales, comme on le fera voir dans la ſuite.

Telles ſont les définitions les plus générales & les plus utiles, concernant la Géométrie plane ou ſuperficielle.

A l'égard de celles qui ſe rapportent aux *ſolides*, je crois qu'il eſt à propos de ne pas les donner ici, parce qu'elles ſeroient plus propres à amuſer le lecteur, & à lui faire perdre du tems, qu'à le perfectionner, avant qu'il ait acquis une connoiſſance ſuffiſante des Théorêmes les plus utiles ſur les ſurfaces; car alors il comprendra mieux & plus aiſément ces définitions, & il ſe formera une idée plus claire des *ſolides reſpectifs*, qu'il n'eſt poſſible de ſe la former au commencement; & ainſi je renvois ces définitions à la cinquiéme Partie.

---

## SECTION V.

### *Des termes uſités en Géométrie.*

TOUT ce que l'on propoſe en Géométrie eſt ou un *Problême* ou un *Théorême*. Euclide renferme l'un & l'autre ſous l'idée générale de *propoſition*.

Le *Problême* eſt une *propoſition* qui apprend à faire quelque choſe, il ſe rapporte plus immédiatement à la *Géométrie pratique*, qu'à la *Géométrie ſpéculative*, c'eſt-à-dire qu'il eſt de nature à être exécuté par quelques régles connues, ou reçues communément, ſans égard à leurs inventions ou démonſtrations

Le *Théorême* eſt une *propoſition* où il s'agit de démontrer une régle communément reçue, ou une nouvelle régle, afin qu'elle puiſſe devenir dans la ſuite une régle certaine, & qu'on puiſſe y compter dans la pratique, ſelon les occaſions; c'eſt pour cela qu'on appelle ſouvent Théorêmes, les régles qui dirigent les *opérations de l'Arithmétique & les concluſions de la Géométrie.*

*Nota.* On entend par démonſtration le degré de preuve le plus élevé, dont la raiſon humaine ſoit capable, par

une suite de raisonnemens tirés des axiomes les plus simples, & d'autres vérités évidentes par elles-mêmes, tellement que ceux qui y font attention ne puissent pas les nier.

Le *Corollaire* est une vérité conséquente qui se tire d'une démonstration.

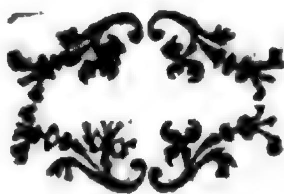
Le *Lemme* est la démonstration de quelques principes ou prémices utiles pour abréger la preuve d'un théorême qui suit.

La *Scholie* est un petit commentaire, ou une remarque sur ce qu'on a dit auparavant.

*Nota.* Je dois avertir les jeunes Géometres de se bien attacher aux *définitions*, c'est-à-dire de ne pas se borner à les parcourir, mais de tâcher de se former une idée claire de ce qu'on a défini, & de le bien comprendre, & c'est pour cela que je me suis plus étendu dans chaque définition qu'on ne le fait ordinairement.

Afin que l'on puisse sçavoir d'où sont dérivés les *problêmes & théorêmes* contenus dans les deux chapitres suivans, j'ai toujours cité la *proposition* & le *Livre* d'Euclide, où ils sont démontrés.

Par exemple, au problême 1. j'ai marqué (3. E. 1.) ce qui signifie que c'est la troisiéme proposition du premier Livre d'*Euclide* : on doit entendre la même chose des théorêmes.



# CHAPITRE II.

## *Premiers Rudimens ou Problêmes préparatoires pour la Géométrie plane.*

POUR bien exécuter les *problêmes* suivans, le jeune Géométre doit se pourvoir d'une *régle* bien droite, de bouis ou de cuivre, & de deux paires de bons *compas*, l'une à trois pointes pour tracer les figures à l'encre & au crayon à plomb de mer, & une autre paire à pointes très-fines pour bien mesurer & couper les distances; il doit aussi avoir un bon *tire ligne*, & alors il peut aller en avant avec cette précaution, qu'il doit toujours se rendre maître d'un problême avant que d'en venir au suivant, c'est-à-dire qu'il doit bien comprendre la méthode, & autant qu'il lui est possible, la raison de chaque problême, & de la maniere d'en venir à bout, & alors un peu de pratique les lui rendra tous aisés, étant tous appuyés sur les demandes suivantes.

### *Demandes.*

1. Qu'on puisse mener une ligne droite d'un point donné à un autre.

2. Qu'on puisse prolonger, augmenter une ligne droite ou la rendre plus longue de part & d'autre de ses deux extrémités.

3. Que d'un point donné (ou centre) & avec une distance donnée (ou avec un Rayon) on puisse décrire un cercle.

### PROBLEME I.

*Deux lignes droites étant données, trouver leur somme & leur difference.* (3. E. 1.

Soient les lignes données AC, CB, prenez la plus courte ligne, comme CB pour rayon, & avec ce rayon décrivez un

cercle; de son centre C, coupez l'autre ligne AC, & joignez ACB par une ligne droite, vous aurez AB = AC + CB, & AD = AC — CB, comme il étoit requis. (*Fig.* 23.)

### PROBLEME II.

*Diviser une ligne droite donnée (comme* AB*) en deux parties égales.* (10. E. 1.)

Des deux extrémités de la ligne donnée A & B (*fig.*24.) avec un rayon plus grand que la moitié de sa longueur, décrivez deux arcs qui se couperont l'un & l'autre en deux points, comme D & F (*même fig.*); joignez ensuite ces points DF par une ligne droite, & elle divisera la ligne AB par le milieu en C, c'est-à-dire qu'elle fera AC = CB, ce qui étoit requis.

### PROBLEME III.

*Diviser un angle rectiligne donné en deux angles égaux.* (9. E. 1.).

Du point angulaire, comme C (*fig.* 25), avec un rayon convenable, décrivez un arc, comme AB, & de ces points A & B, décrivez deux arcs égaux qui se coupent mutuellement comme en D; joignez ensuite les points C & D par une ligne droite CD, & elle divisera également l'arc AB, & par conséquent l'angle comme il étoit requis.

### PROBLEME IV.

*A un point* A *dans une ligne droite donnée* AB, *faire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné* C. (23.E.1.)

Du point angulaire donné C (*fig.* 26), décrivez un arc, comme FD (prenant un rayon CD à volonté), & avec le même rayon, décrivez un arc semblable du point donné A (*fig.* 27), comme *fd*, c'est-à-dire faites l'arc *fd* égal à l'arc FD; joignez ensuite les points A & *f* par une ligne droite, & elle formera l'angle requis.

## PROBLEME V.

*Mener une ligne droite, comme* FD, *parallele à une ligne droite donnée* AB, *laquelle passe par un point déterminée, comme* $x$, *ou qui soit à une distance requise.* (31. E. 1.)

Prenez un point convenable dans la ligne donnée, comme C (*fig.* 28.), le plus éloigné de $x$ est le meilleur; prenez pour rayon C$x$, & avec cette ouverture, décrivez du point C un demi-cercle, comme HM$x$N; faites ensuite l'arc HM égal à l'arc $x$N, & par les points M & $x$ menez la ligne droite FD, qui sera parallele à la ligne AB, comme il étoit requis.

## PROBLEME VI.

*Abaisser une perpendiculaire, comme* C$x$, *sur une ligne droite donnée* AB, *d'un point déterminé hors de cette ligne, comme* C. (12. E. 1.)

Du point donné C (*fig.*29.), décrivez un arc de cercle qui coupe la ligne donnée AB en deux points, comme $d$ & $f$; divisez ensuite également la distance entre ces deux points $df$ (par le problême 2.) comme en $x$; menez la ligne droite C$x$, qui sera la perpendiculaire requise.

## PROBLEME VII.

*Élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne droite donnée, comme en* B, *ou par un autre point déterminé dans cette ligne.* (11. E. 1.)

D'un point (pris au hazard) hors de la ligne donnée, comme C (*fig.* 30.), décrivez un cercle qui passe par le point d'où il faut élever la perpendiculaire, c'est-à-dire prenez CB pour rayon; & du point où le cercle coupe la ligne donnée, comme A, menez le diametre du cercle ACD, ensuite du point D, menez la ligne droite DB, qui sera la perpendiculaire requise.

## PROBLEME VIII.

*Diviser une ligne droite donnée, comme* AB, *en un nombre proposé de parties égales.* (10. E. 6.)

Aux extrémités de la ligne donnée, comme A & B (*fig.* 31.), faites deux angles égaux (par le problême 4), donnant à leurs côtés AD & BC une longueur suffisante, ensuite sur ces côtés, en commençant par les points A & B, coupez le nombre proposé de parties égales (par exemple 5). Si vous menez des lignes droites d'un point à l'autre (qui couperont la ligne donnée), comme dans la figure ci-dessus, ces lignes diviseront la ligne donnée AB en un nombre requis de parties égales.

## PROBLEME IX.

*Décrire un cercle qui passe par trois points donnés, lesquels ne sont pas couchés en ligne droite, comme par les points* A, B, D.

Joignez les points B, A & B, D (*fig.* 32.) par des lignes droites; divisez ensuite également ces lignes (par le problême 2.), le point où les lignes qui divisent les deux premieres se rencontrent, sera le centre requis.

L'opération de ce problême étant bien comprise, il sera aisé d'en venir aux deux suivans sans aucune *figure* nouvelle.

1. *Trouver le centre d'un cercle donné.* (1. E. 3.)

Il est clair par le dernier problême, que si l'on prend trois points quelconques dans la circonférence du cercle donné, comme A, B, D, on trouvera le centre de ce cercle, comme ci-devant.

2. *Un segment d'un cercle étant donné, achever ou décrire tout le cercle; cela peut se faire en prenant trois points dans l'arc du segment donné, & opérant ensuite comme ci-devant.*

## PROBLEME X.

*Sur une droite donnée, comme* AB, *décrire un triangle équilatéral.* (1. E. 1.)

Prenez la ligne donnée pour rayon, avec lequel de chaque extrémité, comme A & B, (*fig.* 33.), vous décrirez un arc, comme BC & AC; joignez ensuite les points A, C & B, C par des lignes droites, elles formeront le triangle requis.

## PROBLEME XI.

*Trois lignes droites étant données, former avec elles un triangle (pourvu que deux de ces lignes, prises ensemble, soient plus longues que la troisiéme).* (22. E. 1.)

Soient les lignes données AB, CB, AC (*fig.* 34.), prenez l'une des deux plus courtes, comme AC pour rayon, & de l'un des deux bouts de la plus longue ligne, comme A, décrivez un arc; prenez ensuite l'autre ligne CB pour rayon, & de l'autre bout du plus grand côté, comme B, décrivez un autre arc qui coupera le premier, comme en C; joignez les points CA & CB par des lignes droites qui formeront le triangle requis.

## PROBLEME XII.

*Sur une droite donnée, comme* AB, *former un quarré.* (46. E. 1.)

Sur l'une des extrémités de la ligne donnée, comme B (*fig.* 35.) élevez la perpendiculaire BD, égale en longueur à la ligne donnée, c'est-à-dire faites BD = AB; ce qui étant fait, prenez la ligne donnée pour rayon, & des points A & D, décrivez des arcs égaux qui se couperont mutuellement, comme en C; joignez ensuite les points CA & CD, & ils formeront le quarré requis.

## PROBLEME XIII.

*Deux lignes droites étant données, former avec elles un parallelogramme rectangle.*

Soient les lignes données AB, BC (*fig.* 36); à l'extrémité de la plus longue ligne, comme B, élevez une perpendiculaire de même longueur que la plus courte BC; ensuite du point C, menez une ligne parallele & égale à AB, c'est-à-dire faites DC = AB; joignez DA par une ligne droite, & elle formera un quarré long ou parallelogramme requis.

Pour ce qui est des *rhombes* & *rhomboïdes* ou *parallelogrammes obliqu'angles*, on les fait de la même maniere que les deux dernieres figures, excepté qu'au lieu d'élever les perpendiculaires, on fait les angles donnés, & ensuite on mene leurs côtés paralleles, &c. comme ci-devant.

### PROBLEME XIV.

*Dans un cercle donné, inscrire ou faire un triangle, dont les angles soient égaux à ceux d'un triangle donné, comme du triangle* FDG. (2. E. 4.)

*Nota.* On dit qu'une figure rectiligne est inscrite dans un cercle, lorsque tous les points angulaires de cette figure touchent exactement la circonférence de ce cercle.

Menez une ligne droite, comme HK (*fig.* 37.) qui touche le cercle en A sans le couper; faites l'angle KAC égal à l'un des angles du triangle donné, comme F, & l'angle HAB égal à un autre angle du triangle, comme G, l'angle BAC sera égal à l'angle FDG; joignez les points B & C par une ligne droite, & elle achevera le triangle requis.

### PROBLEME XV.

*Dans un triangle donné, comme* ABD, *décrire un cercle qui touche ses côtés.* (4. E. 4.)

Divisez également deux des angles du triangle, comme A & B, (*fig.* 38.), & le point où les lignes qui les divisent se rencontrent (comme C) sera le centre du cercle requis, son rayon sera la plus courte distance aux côtés du triangle.

PROBLEME

## PROBLEME XVI.

*Décrire un cercle autour d'un triangle donné.* ( 5. E. 4. )

Ce problême s'exécute à tous égards comme le neuviéme, c'est-à-dire en divisant également deux des côtés du triangle donné par deux lignes. Le point où ces deux lignes se rencontrent, sera le centre du cercle requis.

## PROBLEME XVII.

*Décrire un quarré autour d'un cercle donné.* ( 7. E. 4. )

Menez deux diametres dans le cercle donné, comme D A & E B (*fig.* 39.) à angles droits au centre C, & avec le rayon du cercle, décrivez des extrémités des diametres A, B, D, E des arcs qui se coupent, comme en F, G, H, K; joignez par des lignes droites les points où les arcs se coupent, & elles formeront le quarré requis.

## PROBLEME XVIII.

*Dans un cercle donné, décrire le plus grand quarré qui puisse y être contenu.* ( 6. E. 4. )

Ayant mené les diametres, comme D A & E B, qui se coupent mutuellement à angles droits au centre C ( comme dans la *figure* 39 ); joignez les points A, B, D & E par des lignes droites A B, B D, D E, E A, ce seront les côtés du quarré requis.

## PROBLEME XIX.

*Sur une ligne droite donnée, comme* A B, *décrire un pentagone régulier ou poligone de cinq côtés.*

Prenez la ligne donnée pour rayon, & de chacune de ses extrémités, décrivez un cercle; ensuite par les points où ces cercles se coupent mutuellement, comme G & *x* (*fig.* 40.), menez la droite G *e* *x*. Du point G avec le même rayon, décrivez l'arc H A *e* B D, & ensuite appliquant la régle aux points D, *e*, marquez le point F, où

elle coupe l'autre cercle ; appliquez de même la régle aux points H, *e*, & marquez le point C où elle coupe l'autre cercle ; ensuite des points F & C ( avec le même rayon qu'auparavant ), décrivez des arcs qui se coupent, comme en K ; joignez les points AF, FK, KC & CB par des lignes droites, & elles formeront le pentagone requis, c'est-à-dire AF = FK = KC = CB = AB, & les angles en A, B, C, K, F seront égaux.

PROBLEME XX.

*Dans un cercle donné, décrire un Pentagone régulier.*
( 11. E. 4, & 10. E. 3. )

*Ou plus généralement décrire un Poligone régulier dans un cercle.*

Menez le diametre DA (*fig.* 41.) du cercle, & divisez-le en autant de parties égales que le poligone proposé a de côtés ; prenez ensuite le diametre entier pour rayon, & décrivez les deux arcs CA & CD. Si vous menez une droite du point C à la seconde de ces parties égales, comme à 2, elle déterminera un point dans la circonférence opposée du demi-cercle, comme B ; joignez DB par une ligne droite, & ce sera le vrai côté du Pentagone requis.

Ces vingt *Problêmes* suffisent pour exercer le jeune Praticien, & pour former sa main à bien manier la *régle* & le *compas*. Je dois l'avertir qu'il doit s'y rendre très-habile & très-exact.

A l'égard des raisons pourquoi l'on doit tirer toutes ces lignes de la maniere qu'il est prescrit dans chaque Problême, je me flatte qu'on les comprendra aisément par les théorêmes suivans, & c'est pour cela que ( pour abréger ) je n'ai pas voulu en donner les démonstrations dans ce chapitre, souhaitant que les commençans se bornent à bien comprendre la méthode avant que d'étudier à fonds ce qui est contenu dans le chapitre suivant, alors ils trouveront surement tout cela clair & facile.

# CHAPITRE III.

## *Démonstrations des Théorêmes les plus utiles dans la Géométrie plane.*

*Nota.* POUR abréger la plûpart des démonstrations suivantes, il est nécessaire de supposer ce qui suit.

1. La périferie ( ou circonférence ) de chaque cercle, tant grand que petit, se divise toujours en 360 parties égales, qu'on nomme *degrés*, & chacun de ces degrés en 60 parties égales, qu'on nomme *minute*, &c.

2. Tous les angles se mesurent par l'arc d'un cercle décrit du point angulaire ( voyez la définition 9. section 2. chap. 1. ), & on les estime plus grands ou plus petits, selon le nombre des degrés contenus dans cet arc.

3. Le quart de cercle est toujours de 90 degrés, étant la mesure de l'angle droit ( défin. 6. sect. 2. chap. 1. ), & le demi-cercle est = 180 degrés, étant la mesure de deux angles droits.

4. Les arcs égaux d'un cercle, ou des cercles égaux, mesurent des angles égaux. Aux cinq Axiomes généraux que j'ai déja proposé à la fin du chap. 1. de l'Algébre ( je suppose ici que le lecteur les a bien pénétrés ), il est à propos d'ajouter les suivans, qui commencent leur nombre où les autres finissent.

### *AXIOMES.*

6. Le *tout* est toujours plus grand que sa partie, c'est-à-dire que la ligne totale A B ( *fig.* 42 ) est plus grande que sa partie A C, &c. Le même doit s'entendre des *surfaces* & des *solides*.

7. Le *tout* est égal à toutes ses parties prises ensemble, c'est-à-dire que la ligne totale A B ( *fig.* 43 ) est égale à ses parties $Ac + cd + de + eB$. Cela est également vrai dans les *surfaces* & *solides*.

8. Les choſes qui étant placées l'une ſur l'autre s'ajuſtent ou ſe rencontrent dans toutes leurs parties, ſont égales l'une à l'autre.

Mais la converſe de cet *axiome*, ſçavoir, que les choſes égales étant placées l'une ſur l'autre doivent s'ajuſter parfaitement, n'eſt vraie que pour les lignes & les angles, & non pour les ſurfaces, à moins qu'elles ne ſoient ſemblables, c'eſt-à-dire de la même forme ou figure. Par exemple, l'*aire* d'un cercle peut être égale à celle d'un quarré; mais ſi on les place l'un ſur l'autre, il eſt évident qu'ils ne pourront pas ſe rencontrer dans toutes leurs parties, parce que ce ſont des figures différentes. De même l'aire d'un parallelogramme peut être égale à celle d'un triangle, & l'une & l'autre à celle d'un quarré; mais ſi on les met les uns ſur les autres, ils ne pourront pas ſe rencontrer dans toutes leurs parties, &c.

*Nota*. Outre les caracteres déja expliqués dans la premiere Partie, & en d'autres endroits de ce Traité, il faut ajouter ceux qui ſuivent.

v ſignifie un *angle* en général, & v v ſignifie les *angles*; △ un *triangle*; □ un *quarré*, & ▭ un *parallelogramme*. Lorſqu'un angle eſt déſigné par trois lettres (comme A B C, &c.), celle du milieu (comme B) marque toujours le point angulaire, & les deux autres lettres (comme A B & B C) marquent les lignes ou côtés d'un triangle qui renferment cet angle.

Tout cela étant préſuppoſé, le jeune Géometre doit en venir aux démonſtrations des Théorêmes ſuivans; il y verra qu'il eſt abſolument néceſſaire d'être bien verſé dans pluſieurs matieres qui ont déja été traitées; il lui ſera auſſi très-avantageux de ſe munir de pluſieurs *corollaires* & *lemmes* utiles, comme d'autant de vérités reconnuës; car il arrive ſouvent qu'on ne peut pas démontrer clairement *à priori* une propoſition, ou par elle-même, ſans ſe donner beaucoup de peine, & alors il eſt bon de recourir à ces vérités qui aident à la démonſtration.

THEOREME I.

*Si une ligne droite tombe sur une autre droite (ou la rencontre), & fait avec elle deux angles, ce seront ou deux angles droits ou deux angles égaux, pris ensemble à deux angles droits.* (13. E. 1.)

DEMONSTRATION.

Soient ces deux lignes AB & DC (*fig.* 44) qui se rencontrent au point C; décrivez du point C un cercle à volonté; l'arc AD sera la mesure de l'v*b*, & l'arc DB de v*e*; mais les arcs AD + DB = 180°, c'est-à-dire qu'ils forment le demi-cercle; donc v*b* + v*e* = 180°; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRES.

1. De-là il suit que si v*b* = 90°, alors v*e* = 90°; mais v*b* est obtus, v*e* sera aigu, &c.

2. Par là on comprend aisément que si plusieurs lignes droites tombent sur une autre droite, & la rencontrent toutes au même point, tous les vv, pris ensemble, seront = 180°, ou à deux angles droits.

THEOREME II.

*Si deux lignes se coupent mutuellement, les angles opposés seront égaux.* (15. E. 1.)

DEMONSTRATION.

Soient les deux lignes AB & DE (*fig.* 45) qui se coupent mutuellement au centre C;

on aura $\left\{\begin{array}{l} \text{v}b + \text{v}e = 180^\circ \\ \& \ \text{v}b + \text{v}a = 180^\circ \end{array}\right\}$ par le Théorême 1.

Donc v*b* + v*e* = v*b* + v*a*, par l'*axiome* 5. Otons de part & d'autre de l'équation v*b*, & il restera v*e* = v*a*. De plus v*b* + v*e* = 180°, comme ci-devant, & v*e* + vC = 180°; donc v*e* + vC = v*b* + v*e*. Otons v*e*, & nous aurons vC = v*b*. *Q. E. D.*

### COROLLAIRE.

De-là il ſuit que ſi deux lignes ſe coupent mutuellement, elles formeront quatre angles, qui pris enſemble, ſeront toujours égaux à quatre v v droits.

### THEOREME III.

*Si une ligne droite coupe deux lignes paralleles, elle formera les angles oppoſés égaux l'un à l'autre.* ( 29. E. 1. )

Soient deux lignes paralleles A B & H K (*fig.* 46), & que la droite D G les coupe toutes deux en *c* & *n*. Du point *c* ( avec un rayon quelconque ), décrivez un demi-cercle, & avec le même rayon du point *n*, un autre demi-cercle oppoſé au premier, comme dans cette figure. Il eſt clair, & je crois qu'on le comprendra aiſément, que ſi le centre *c* ſe meut le long de la ligne D G, juſqu'à ce qu'il arrive au centre *n*, les deux lignes A B & H K ſe rencontreront & ſe confondront, ou deviendront une ſeule ligne (car les lignes paralleles ſont comme une ſeule ligne d'une largeur égale) ; donc les deux demi-cercles ſe rencontreront auſſi, & deviendront un cercle entier, ſemblable à celui de la derniere démonſtration. Donc $\left.\begin{array}{l} \text{v}y = \text{v}x = \text{v}a = \text{v}e \\ \text{Et } \text{v}m = \text{v}n = \text{v}b = \text{v}c \end{array}\right\}$ comme ci-devant, par le dernier Théorême *Q. E. D.*

### COROLLAIRE.

De-là il ſuit que ſi *trois*, *quatre*, ou tant qu'on voudra de lignes paralleles, ſont coupées par une ligne droite, tous leurs angles oppoſés ſeront égaux.

### THEOREME IV.

*Les trois angles de chaque triangle plan ſont égaux à deux angles droits* ( 32. E. 1. ) ; *par conſéquent deux angles quelconques d'un triangle plan ſont néceſſairement plus petits que deux angles droits.* ( 17. E. 1. )

### DEMONSTRATION.

Soit proposé le triangle ABC (*fig.* 47), menez la droite HK, parallele au côté AB, & qui touche précisément l'angle vertical C; du même point angulaire C, décrivez un demi-cercle, & prolongez les côtés AC & BC jusqu'à sa circonférence; vous aurez v*b* = vB, v*a* = vA, & v*x* = vC par le dernier théorême; mais v*b* + v*a* + v*x* = 180°, ou à deux angles droits; donc vB + vA + vC = 180°, par l'*axiome* 5. *Q. E. D.*

### COROLLAIRE.

De-là il suit que deux angles aigus de chaque triangle rectangle sont égaux à un angle droit, ou à 90°; par conséquent si l'un des angles aigus est donné, l'autre l'est aussi, puisque 90° — l'v donné = l'autre v.

### THEOREME V.

*Si un côté d'un triangle plan est continué ou prolongé au-delà ou en dehors du triangle, l'angle extérieur sera toujours égal aux deux angles intérieurs opposés.* (32. E. 1.)

### DEMONSTRATION.

Soit le côté AB du △ ABC prolongé hors du △, par exemple en D, comme dans la figure ci-dessus; alors v*z* = vA + vC; car vB + v*z* = 180°, par le théor. 1, & vB + vA + vC = 180°, par le dernier théorême; donc vB + v*z* = vB + vA + vC, par l'axiome 5. Otons vB des deux côtés de l'équation, il restera v*z* = vA + vC, par l'axiome 2. *Q. E. D.*

Par conséquent l'angle extérieur *z* de tout triangle plan doit être nécessairement plus grand qu'aucun des angles intérieurs opposés, c'est-à-dire plus grand que vA ou vC. (16. E. 1.)

### COROLLAIRE.

De-là il suit que si un angle d'un triangle plan est

donné, la somme des deux autres angles est donnée; car 180° — v donné = aux autres deux v v.

## THEOREME VI.

*Dans tout triangle plan, les côtés égaux sous-tendent les angles égaux, ou leur sont opposés* (5. E. 1.); *par conséquent les angles égaux sont opposés aux côtés égaux.* (6. E. 1.)

## DEMONSTRATION.

Soit le △ BCD isocele (*fig.* 48), c'est-à-dire BC = CD; divisez également v C, ou (ce qui revient au même), faites CA perpendiculaire à BD, les v v de chaque côté seront droits (c'est-à-dire v BAD & v DAC).

Donc $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\text{ v C} + \text{v B} = 90^\circ \\ \frac{1}{2}\text{ v C} + \text{v D} = 90^\circ \end{array}\right\}$ par le coroll. du théor. 4.

Par conséquent $\frac{1}{2}$ v C + v B = $\frac{1}{2}$ v C + v D, par l'axiome 5. Otez $\frac{1}{2}$ v C des deux côtés de l'équation, & il restera v B = v D, par l'axiome 2.

## COROLLAIRE.

De-là il suit que les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux entr'eux.

## THEOREME VII.

*Dans chaque triangle plan le plus long côté est opposé au plus grand angle*; (18. E. 1.) *par conséquent le plus grand angle de tout triangle plan est opposé au plus long côté.*

Ce Théorême est évident par la seule inspection; car soit prolongé un des côtés d'un triangle plan, comme CB vers E (*fig.* 49); joignez DE par une ligne droite, il est évident que CE étant devenu plus long que le côté CB, v en D est devenu plus ouvert qu'il n'étoit auparavant de tout l'v BDE, & il est clair que si le côté CE étoit devenu plus long, l'v en D auroit été plus ouvert.

## THEOREME VIII.

*Si les côtés de deux triangles ſont égaux, les angles oppoſés à ces côtés égaux ſeront égaux.* ( 8. E. 1. )

La vérité de ce théorême eſt évidente par les deux triangles renfermés dans le ſixiéme théorême ; car ils ont leurs côtés reſpectifs égaux BC = CD, BA = DA & CA commun aux deux triangles, & l'on a prouvé que les angles oppoſés aux côtés égaux ſont égaux, &c. ce qui n'a pas beſoin d'autre preuve.

*Nota.* La converſe de ce théorême n'eſt pas véritable, car les angles de deux triangles peuvent être égaux, & leurs côtés oppoſés inégaux, comme on le verra dans le théorême 12.

### COROLLAIRE.

De-là il ſuit que les triangles mutuellement équilateres ſont auſſi mutuellement équiangles, & que les triangles mutuellement équilateres ſont égaux à l'autre. ( 4 & 26. *E.* 1. )

## THEOREME IX.

*L'angle au centre d'un cercle eſt toujours double de l'angle à la circonference, lorſque les deux angles ſont appuyés ſur le même arc.* ( 20. E. 3. )

Ce théorême a trois variétés ou trois cas.

### DEMONSTRATION.

*Premier cas.* Soient le diametre DA & la ligne DB (*fig.* 50), deux lignes qui forment l'v à la circonference, menez le rayon BC, vBCA ſera v au centre ; mais vBCA = vD + vB, par le théor. 5, & parce que BC = DC, on a vD = vB, par le théor. 6 ; donc vBCA = 2vD.

*Second cas.* Si l'angle BCF (*fig.* 51) au centre eſt en dedans de vBDF à la circonférence ; menez le diametre

D A, vous aurez v B C A = 2 v B D A, & v F C A = 2 v F D A, par le premier cas ; & joignant ces deux équations, on aura v B C A + v F C A = 2 v B D A + 2 v F D A, par l'axiome 1 ; mais v B C A + v F C A = v B C F, & 2 v B D A + 2 v F D A = 2 v B D F ; donc v B C F = 2 v B D F.

*Troisiéme cas.* Si v B C F (*fig.* 52) au centre est hors de v B D F à la circonférence du point angulaire D à la circonférence, menez le diametre D A ; vous aurez

v F C A = 2 v F D A } par le premier cas.
Et v B C A = 2 v B D A }

Otez cette derniere équation de la premiere, & il restera v F C A — v B C A = 2 v F D A — 2 v B D A, par l'axiome 2 ; mais v F C A — v B C A = v F C B, & 2 v F D A — 2 v B D A = 2 v F D B ; donc v F C B = 2 v F D B. *Q. E. D.*

### COROLLAIRE.

Par où il est évident que tous les angles qui sont sur le même segment ou arc de cercle, ou sur des arcs égaux, sont égaux entr'eux. (21. E. 3.)

### THEOREME X.

*L'angle dans le demi-cercle est droit* (31. E. 3) ; *c'est-à-dire si le diametre d'un cercle est le côté d'un triangle, & que l'angle opposé à ce côté soit en quelque point que ce soit de la circonference du cercle, cet angle sera droit.*

### DEMONSTRATION.

Soit D A le diametre, & B D A le △ (*fig.* 53) : je dis que v B = 90°, menez le rayon B C, nous avons v D B A = v D + v A ; car v C B D = v D, & v C B A = v A, par le théorême 6. Donc v D B A = v C B D + v C B A, par l'axiome 5. De plus v D B A + v D + v A = 180°, par le théor. 4. Donc v D B A = 90°, ou à un angle droit. *Q. E. D.*

### COROLLAIRE.

1. Par là on comprend aiſément qu'un angle fait dans un ſegment, moindre que le demi-cercle, doit être obtus ou plus grand qu'un angle droit.

2. Et un angle fait dans un ſegment plus grand que le demi-cercle doit par conſéquent être aigu.

### THEOREME XI.

*Dans tout triangle rectangle, le quarré qui eſt fait ſur l'hypothenuſe ou côté oppoſé à l'angle droit, eſt égal aux quarrés qui ſont faits ſur les côtés qui renferment l'angle droit.* ( 47. E. 1.)

Il y a pluſieurs moyens de démontrer ce beau Théorême, mais je crois qu'il n'y en a point de plus aiſé à comprendre par un commençant, que celui que je vais propoſer ici, & pour cela, il eſt à propos de faire précéder les Lemmes ſuivans.

### *LEMME I.*

Une ligne droite eſt dite multipliée par une autre ligne droite, lorſqu'on fait de ces deux lignes un quarré ou un autre parallelogramme rectangle, c'eſt-à-dire que l'aire d'un parallelogramme rectangle eſt égale au produit des nombres qui expriment la meſure de ſes côtés.

Par exemple, ſi $AB = 6$ pouces, & $AC = 3$ pouces (*fig.* 54), nous aurons $AB \times AC = 6 \times 3 = 18$ pouces quarrés, qui eſt l'aire du parallelogramme A B C D.

### *LEMME II.*

Si une ligne droite eſt diviſée en deux parties quelconques, le quarré de la ligne totale ſera égal aux quarrés de chaque partie, & au double rectangle ou parallelogramme fait ſous les deux parties ( 4. E. 2.); c'eſt-à-dire ſi la ligne S eſt diviſée en deux parties B & C (*fig.* 55), nous aurons $S = B + B$; mais ſi nous

quarrons les deux côtés de cette équation, nous aurons SS = BB + 2BC + CC.

### LEMME III.

L'aire de chaque triangle rectangle est la moitié du parallelogramme fait sous la base & sous la perpendiculaire ; car BC ( *fig.* 56 ) = l'aire de tout le parallelogramme, par le premier lemme, & △ BCH + △ *bc*H = parallelogramme ; mais B = *b*, & C = *c*. Donc $\frac{1}{2}$ BC = aire de chaque triangle, ou $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ *bc* = BC. Tout cela étant supposé, soit le triangle BCH rectangle, ou le côté C perpendiculaire au côté B ; je dis que BB + CC = HH.

### DEMONSTRATION.

Faites un quarré, dont le côté soit = B + C (*fig.* 57), & un autre en dedans, dont le côté = H, comme dans cette figure. L'aire du grand quarré sera égale à l'aire de quatre triangles + HH ; mais l'aire de chaque △ = $\frac{1}{2}$ BC, par le lemme 3. Donc ces 4 △ = $\frac{4}{2}$ BC = 2BC ; donc l'aire du grand quarré est HH + 2BC, quarrez B + C, & vous aurez BB + CC = aire du grand quarré, par le lemme 3. Donc HH + 2BC = BB + 2BC + CC, par l'axiome 5. Otez 2BC des deux côtés de l'équation, & il restera HH = BB + CC.

Pour éclaircir par les nombres ce théorême,
Soit C = 3, B = 4, & H = 5,
on aura CC = 9, BB = 16, & HH = 25.
Donc BB + CC = HH = 16 + 9 = 25.

### COROLLAIRE.

On tire de ce Théorême admirable ( qu'on dit avoir été inventé par *Pythagore* ) la méthode d'ajouter & soustraire les quarrés, parallelogrammes, cercles, &c.

### THEOREME XII.

*Dans tout triangle rectangle, une perpendiculaire abaissée*

*de l'angle droit sur l'hypothenuse, divisera le triangle en deux triangles rectangles qui seront tous deux semblables l'un à l'autre, & au premier △.* ( 8. E. 6. )

*Nota.* Tous les triangles plans sont dits semblables, lorsque chacun des angles d'un triangle est égal à chacun des angles de l'autre; mais si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre, le troisiéme angle sera égal au troisiéme, par le théor. 4.

1. Dans le △ rectangle BAC ( *fig.* 58 ), soit AP perpendiculaire à l'hypothenuse BC, nous aurons ∨ BAP = ∨ C; car ∨ BAP = ∨ B = 90°, & ∨ B + ∨ C = 90°, par le coroll. du théor. 4. Donc ∨ BAP = ∨ C, par l'axiome 5.

De plus, ∨ PAC + ∨ C = 90°, & ∨ C + ∨ B = 90°. Donc ∨ PAC = ∨ B, &c; par conséquent le triangle BAP est semblable au △ APC, & chacun est semblable au total △ BAC.

2. Ou si l'on mene une droite parallele à l'un des côtés d'un triangle plan ( c'est-à-dire en dedans du △ ), elle coupera un triangle semblable au triangle total, en cette maniere :

Menez dans le triangle ABD ( *fig.* 59 ) la droite *ab* parallele au côté AB: le triangle renfermé *a*D*b* sera semblable au △ ADB; car ∨ *a* = ∨ A, & ∨ *b* = ∨ B, par le théorême 3, & l'angle D est commun aux deux triangles. Donc, &c.

## THEOREME XIII.

*Si deux triangles sont semblables, leurs côtés seront proportionnels, c'est-à-dire les côtés opposés aux angles égaux, & ceux qui sont autour des angles égaux seront proportionnels les uns aux autres; & par conséquent si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, leurs angles seront égaux.*

( 4, 5, 6, 7. E. 6. )

Soient les triangles semblables dans la figure du dernier théorême que je propose encore ici. Nous aurons

BP : AP :: AP : CP, selon ce théorême; donc BP × CP = AP × AP.

DEMONSTRATION.

Supposons que le précédent △ rectangle BAC soit coupé par la perpendiculaire AP (*fig.* 60), & ensuite ouvert jusqu'à ce que les côtés BA deviennent une ligne droite, que les côtés BP & CP soient continués jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en E; achevez les parallelogrammes, en menant des lignes paralleles GLC, HAP & LAP, comme dans cette figure. Il est évident que le △ BHA = △ BPA, & le △ CPA = △ CLA, que de même le △ BEC = △ BGC, à cause que leurs côtés respectifs sont égaux: mais le △ BHA + △ CLA + ▭ HGLA = △ BPA + △ CPA + □ APEP. Et si des deux côtés de cette équation on ôte les triangles égaux, il restera HGLA = BP × CP, & □ APEP = AP × AP; par conséquent BP : AP :: AP : CP, ce qu'il falloit prouver.

Ou autrement, en cette maniere :

Soit le △ BAC (*fig.* 61) rectangle en A. Du point v C, avec le rayon CA, décrivez un cercle, & continuez l'hypothenuse BC en Z; joignez ZA & AD par des lignes droites, le triangle BAD sera semblable au △ BZA; car v DAB + v DAC = 90°, par la construction, & v ZAC + v DAC = 90°, par le théor. 10. Donc v DAB + v DAC = v ZAC + v DAC. Otons v DAC des deux côtés de l'équation, & il restera v DAB = v ZAC; mais v ZAC = v CZA, par le théor. 6, & v B est commun aux deux triangles. Donc v BDA = v BAZ, par le théor. 5; par conséquent △ BAD est semblable △ BZA.

Soient les côtés $\left\{ \begin{array}{l} BA = b \\ BC = h \\ CA = c \end{array} \right\}$ on aura $bb + cc = hh$, par le théor. 11; par conséquent $bb = hh - cc$; ce qui donne l'analogie suivante.

$b : b + c :: b - c : b$, c'eſt-à-dire BA : BZ :: BC : BA. *Q. E. D.*

### COROLLAIRES.

1. Par là il eſt évident que dans tout triangle rectangle, la perpendiculaire abaiſſée de l'angle droit ſur l'hypothenuſe ſera moyenne proportionnelle entre les ſegmens de l'hypothenuſe, c'eſt-à-dire BP : PA :: PA : PC.

2. La baſe B A (*fig.* 62) eſt moyenne proportionnelle entre l'hypothenuſe (BC), & le ſegment de l'hypothenuſe contigue à la baſe (qui eſt BP) c'eſt-à-dire BC : BA :: BA : BP.

3. Le cathetus (AC) eſt moyen proportionnel entre l'hypothenuſe (BC), & le ſegment de l'hypothenuſe contigu au cathetus (qui eſt PC), c'eſt-à-dire BC : AC :: AC : PC,

### SCHOLIE.

Je me ſuis plus étendu ſur cet excellent théorême, & j'en ai donné une double démonſtration, parce qu'il eſt d'un uſage univerſel dans toutes les parties des Mathematiques; car toute la Trigonometrie (tant plane que ſpherique) en dépend entiérement; & par conſéquent on peut dire avec vérité, que l'*Aſtronomie*, la *Gnomonique*, la *Navigation*, l'*Arpentage*, l'*Optique*, *&c.* dépendent de la juſte application de ce Théorême.

Quant à ſon uſage en Géométrie, *Deſcartes* en donne une idée particuliere, comme on le voit dans l'Algébre du Docteur *Pell*, pag. 65, qui s'exprime en ces termes:

„ *Deſcartes* dans une Lettre, qui n'eſt pas encore im-
„ primée, dit: En cherchant la ſolution des *queſtions*
„ *géométriques*, je me ſers toujours des lignes paralleles
„ & perpendiculaires, autant qu'il eſt poſſible (il veut
„ dire d'autant de lignes qu'il eſt néceſſaire), & je n'em-
„ ploie point d'autres théorêmes que ces deux; (les côtés
„ des triangles ſemblables ont une proportion ſemblable),
„ (dans le triangle rectangle, le quarré du plus grand
„ côté eſt égal aux quarrés des deux autres côtés), &
„ je ne crains pas de ſuppoſer pluſieurs quantités incon-

„ nues pour pouvoir tellement réduire la queſtion pro-
„ poſée, qu'elle ne dépende que de ces deux théorêmes.

J'ai cru qu'il étoit à propos d'inſerer ici cette Lettre, pour faire voir aux jeunes commençans combien le grand *Deſcartes* eſtimoit ces deux Théorêmes, qui ſont le dernier & le Théorême 11, & il eſt vrai que tous les autres qui précédent ne ſont ( pour ainſi dire ) que des préparations à ces deux là.

Ce dernier théorême démontre la raiſon de la méthode dont on ſe ſert pour trouver des *lignes proportionnelles*, comme dans les trois Problêmes ſuivans.

### PROBLEME I.

*Deux lignes droites étant données, en trouver une troiſiéme qui leur ſoit proportionnelle.* ( 11. E. 6. )

Soient les deux lignes AB, AD ( *fig.* 63 ) ; faites avec les deux lignes données un angle au point A, & prolongez la ligne AB en C, faiſant BC = AD ; joignez les points BD par une ligne droite, & menez CF parallele à BD, vous aurez le △ ABD ſemblable au △ ACF. Donc AB : BC ( = AD ) :: AD : DF, qui eſt la troiſiéme proportionnelle requiſe.

### PROBLEME II.

*Deux lignes droites étant données, trouver entr'elles une moyenne proportionnelle.* ( 13. E. 6. )

Soient les lignes données BP, PC ( *fig.* 64 ) ; joignez les deux lignes données bout à bout, c'eſt-à-dire, faites BC = BP + PC, & ſur BC comme diametre, décrivez un demi-cercle (*même fig.*) ; enſuite du point P, où les deux lignes ſe rencontrent, élevez une perpendiculaire qui touche la circonférence du cercle, comme PA, ce ſera la moyenne proportionnelle requiſe, puiſque BP : AP :: AP : PC.

Il eſt aiſé par ce problême de comprendre comment on peut faire un quarré égal à un parallelogramme donné. ( 14. *E.* 6. )

(14. E. 6.) ; car si B P est la longueur & P C la largeur du parallelogramme donné, A P sera le côté du quarré égal à l'aire de ce parallelogramme.

PROBLEME III.

*Trois lignes droites étant données, trouver une quatriéme ligne qui leur soit proportionnelle.* (12. E. 6.)

Soient les trois lignes A B, A D, D C (*fig.* 65) sur la plus longue ligne A B, coupez la suivante moyenne AD, c'est-à-dire, faites D B = A B — A D ; ensuite au point D placez l'autre ligne D C, qui fasse un angle, ou droit ou oblique, & menez la droite A C, en lui donnant une longueur suffisante ; faites B F parallele à D C, & ce sera la quatriéme proportionnelle requise, c'est-à-dire A D : D C : : A B : B F.

THEOREME XIV.

*Si un angle d'un triangle plan est divisé également (ou en deux angles égaux) par une ligne droite (comme on suppose que* C A *divise l'angle* B C D*), elle coupera le côté opposé* BD *proportionnellement aux autres deux côtés du triangle.* (3.E.6.)

DEMONSTRATION.

Prolongez le côté D C (*fig.* 66) jusqu'à ce que C Z = C B ; joignez les points Z B par une droite, & menez la ligne F C parallele à B D. Le ▵ C Z F sera semblable au triangle D C A, car v B C D extérieur au ▵ B C Z est égal aux deux intérieurs B & Z, par le théor. 5. qui sont égaux entr'eux, par le théor. 6. Donc la moitié v A C D = v Z ; mais v Z C F = v D ; donc v ZFC = v CAD, & F C = B A. Donc B A (= F C) : B C (= Z C) : : A D : C D. *Q. E. D.*

THEOREME XV.

*Si deux droites (menées de quelque façon que ce soit) en dedans d'un cercle se coupent mutuellement, le rectangle fait*

A a

*sous les segmens ( ou parties ) d'une ligne, sera égal au rectangle fait sous les segmens ( ou parties ) de l'autre ligne* ( 35. E. 3. ) ; *c'est-à-dire si deux lignes ( comme* AB & CD ) *se coupent l'une & l'autre en quelque point, comme en x, on on aura* Ax × Bx = Dx × Cx.

### DEMONSTRATION.

Joignez les points AC & BD ( *fig.* 67 ) par des lignes droites, vous aurez le triangle C*x*A semblable au v B*x*D ; car vB = v C, & vA = vD, par le corol[illegible] du théor. 9. & v A*x*C = v B*x*D, par le théor. 2. Donc on aura A*x* : D*x* :: C*x* : B*x*, par le théor. 13 ; donc A*x* × B*x* = D*x* × C*x*. *Q. E. D.*

### THEOREME XVI.

*Si deux droites sont tellement tirées en dedans du cercle, qu'étant continuées, elles se rencontrent dans un point hors de la circonference du cercle, le rectangle sous une ligne totale & sous sa partie hors du cercle sera égal au rectangle sous l'autre ligne totale & sous sa partie hors du cercle* (36, 37. E. 3 ); *c'est-à-dire si les lignes* AC & DB *sont continuées jusqu'au point z, on aura* AZ × CZ = DZ × BZ.

### DEMONSTRATION.

Menez les lignes AB & CD ( *fig.* 68 ) le triangle CZD sera semblable au Δ BZA ; car v A = v D & v Z est commun aux deux triangles. Donc v ABZ = v DCZ, par le théor. 4. Donc AZ : BZ :: DZ : CZ. Donc AZ × CZ = DZ × BZ.

### THEOREME XVII.

*Si d'un angle d'un triangle plan, inscrit dans un cercle, on abaisse une perpendiculaire au côté opposé ( comme* DP ) *cette perpendiculaire est en proportion à l'un des côtés qui renferment l'angle, comme l'autre côté qui renferme cet angle est au diametre du cercle.*

### DEMONSTRATION.

Soit BCD le triangle proposé (*fig.* 69) de ∠D, menez le diametre DA ; nous aurons ∠A = ∠B, parce qu'ils sont l'un & l'autre appuyés sur le même arc DC, & ∠DCA = 90°, par le théor. 10. Donc ∠ADC = ∠BDP, par le théor. 4 ; donc △DCA est semblable au △DPB ; donc DP : DB :: DC : DA, ou DP : DC :: DB : DA. *Q. E. D.*

### THEOREME XVIII.

*Si un quadrilatere (c'est-à-dire un* trapeze*) est inscrit dans un cercle, les deux angles opposés pris ensemble, sont égaux à deux angles droits, c'est-à-dire à* 180°. (22. E. 3.) *C'est-à-dire dans le quadrilatere* ABCD ∠A + ∠C = 180°, *&* ∠B + ∠D = 180°.

### DEMONSTRATION.

Menez deux diagonales AC & BD (*fig.* 70) vous aurez ∠BDA = ∠BCA, & ∠BDC = ∠BAC, par le coroll. du théor. 9. Mais ∠ABC + ∠BCA + ∠BAC = 180°, par le théor. 4, & ∠BDA + ∠BDC = ∠ADC. Donc ∠ABC + ∠ADC = 180° ; & par le même raisonnement, on prouvera que ∠BAD + ∠BCD = 180°. *Q. E. D.*

### THEOREME XIX.

*Si dans un quadrilatere inscrit dans un cercle on mene deux diagonales, comme* AC *&* BD, *le rectangle sous les deux diagonales sera égal aux deux rectangles sous les côtés opposés du quadrilatere, c'est-à-dire* AC × BD = AB × CD + AD × BC.

### DEMONSTRATION.

Faites l'arc DG = arc BC, & des points A & G menez la ligne A*f*, elle formera le △A*f*D semblable au △ABC ; car ∠*f*AD = ∠BAC, parce que les arcs DG

& BC ſont égaux. De plus v $f$ D A = v B C A, parce qu'ils s'appuient tous deux ſur l'arc A B. Donc v A $f$ D = v A B C, par le théor. 4; on aura donc AC : BC : : AD : D$f$, par le théor. 13. Donc $\frac{BC \times AD}{AC} = Df$.

Mais les △ B A $f$ (*fig.* 71), & △ A C D ſont ſemblables; car v A B $f$ = v A C D, & v B A $f$ = v C A D, parce que v $f$ A D = v B A C, & v C A $f$ eſt commun aux deux triangles. Donc v A $f$ B = v A D C; donc A C : CD : : A B : B$f$, par le théor. 13. Donc $\frac{CD \times AB}{AC} = Bf$. Mais D$f$ + B$f$ = B D; donc BC × AD + CD × AB = BD × AC. *Q. E. D.*

## THEOREME XX.

*Tous les parallelogrammes ( ſoit rectangles ou obliqu'angles ) qui ſont ſur la même baſe, ou ſur baſes égales, & entre les mêmes paralleles, ſont égaux entr'eux* ( 35 & 36. E. 1.); *C'eſt-à-dire* ▭ A B C D = ▭ *ab* C D.

### DEMONSTRATION.

Puiſque A B (*fig.* 72) = CD = *ab* par la ſuppoſition; donc A*a* = B*b*; car B*a* eſt commun aux deux; & puiſque A C = B D, & v A = v B, donc le △ A C*a* = △ B D*b*, & ſi des deux triangles on ôte le △ B*xa*, commun aux deux, il reſtera le trapeze A B *x* C = *a b x* D, par l'axiome 5. Mais le trapeze A B *x* C + △ C *x* D = ▭ A B C D, & le trapeze *a b x* D + △ C *x* D = ▭ *a b* C D. Donc ▭ A B C D = ▭ *a b* C D. *Q. E. D.*

### COROLLAIRE.

Par là on conçoit aiſément que tous les triangles qui ſont ſur la même baſe, ou ſur des baſes égales, & entre les mêmes paralleles ( c'eſt-à-dire qui ont la même hauteur ) ſont égaux entr'eux ( 37 & 38 E. 1. ); car tous les triangles ſont les moitiés de leurs parallelogrammes circonſcrits; & par conſéquent ſi les tous ſont égaux, leurs moitiés ſeront auſſi égales.

## THEOREME XXI.

*Les parallelogrammes ( & par conséquent les triangles ) qui ont la même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases.* ( 1. E. 6. )

### DEMONSTRATION.

Menez AF (*fig.* 73) parallele à BG & AB, CD, FG perpendiculaires aux deux, vous aurez BD × AB = $\square$ ABCD, & parce que CD = AB, donc DG × AB = $\square$ CDFG. Mais BD : DG :: BD × AB : DG × AB; & par conséquent △ ABD : △ CDG :: BD : DG, &c. *Q. E. D.*

## THEOREME XXII.

*Les triangles semblables sont en raison doublée de celle de leurs côtés homologues* ( 19. E. 6. ); *c'est-à-dire les aires des triangles semblables sont l'une à l'autre comme les quarrés de leurs côtés semblables.*

### DEMONSTRATION.

Supposons que les △ BCD (*fig.* 74) & △ *bcd* soient semblables, & que leurs côtés semblables soient ceux qui sont marqués par les mêmes lettres. Soient A & *a* les perpendiculaires aux deux bases D & *d*; nous aurons

$\frac{1}{2}$ DA = aire du △ BCD } par le *lemme* 3, ci-devant.
Et $\frac{1}{2}$ *da* = celle du △ *bcd* }

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mais | 1 | B : *b* :: D : *d* | &c. par le théor. 13. |
| Et | 2 | B : *b* :: A : *a* | |
| Donc | 3 | D : *d* :: A : *a* | |
| 3 :: | 4 | D*a* = *d*A | |
| 4 × $\frac{1}{2}$ D*d* | 5 | $\frac{1}{2}$ DD*da* = $\frac{1}{2}$ D*dd*A, par l'axiome 3. | |
| 5, donc | 6 | DD : *dd* :: $\frac{1}{2}$ DA : $\frac{1}{2}$ *da*, & ainsi des autres côtés. *Q. E. D.* | |

## THEOREME XXIII.

*Dans chaque triangle obtus-angle* ( *comme* BCD ) *le quarré*

*du côté opposé à l'angle obtus ( comme* D ) *surpasse les quarrés des deux autres côtés* ( B & C ) *d'un double rectangle , sous l'un des côtés* ( *comme* B ), *&* *sous le segment ou partie de ce côté prolongé* ( *comme* $a$ ) *jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire* ( P ) *qui tombe sur lui* ( 12. E. 2. ) ; *c'est-à-dire* $DD = BB + CC + 2Ba$.

### DEMONSTRATION.

| | | |
|---|---|---|
| 1°. | 1 | $DD$ (*fig.* 75) $= PP + aa + 2Ba + BB$ |
| & | 2 | $CC = PP + aa$ |
| 1 — 2 | 3 | $DD - CC = 2Ba + BB$ |
| 1 + CC | 4 | $DD = BB + CC + 2Ba$. *Q. E. D.* |

### COROLLAIRE.

De-là il suit évidemment que si les côtés d'un triangle obtus angle sont donnés, le segment ($a$) du côté prolongé ( ou la perpendiculaire P ) se trouveront aisément.

### THEOREME XXIV.

*Si une perpendiculaire ( comme* P ) *tombe dans un triangle acutangle ( comme* BCD ) *le quarré de l'un des deux côtés ( comme* D ) *est moindre que les quarrés de l'autre côté , & de celui sur lequel la perpendiculaire tombe ( sçavoir* C *&* B ) , *& la difference est un double rectangle sous le côté* B , *& sous le segment ou partie* ($a$) *de ce côté , qui est vers* C (13.E.2.) ; *c'est-à-dire* $DD + 2Ba = BB + CC$.

### DEMONSTRATION.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nous avons | 1 | $DD$ (*fig.* 76) $= PP + ee$ | par le théor. 11. |
| Et | 2 | $CC = PP + aa$ | |
| Mais | 3 | $B - a = e$ par la figure | |
| 3 ⊙ 2 | 4 | $BB - 2Ba + aa = ee$ | |
| 4 — $aa$ | 5 | $BB - 2Ba = ee - aa$ | |
| 1 — 2 | 6 | $DD - CC = ee - aa$ | |
| 5 , 6 | 7 | $DD - CC = BB - 2Ba$ | |
| 7 ± | 8 | $DD + 2Ba = BB + CC$. | |

COROLLAIRE.

De-là il ſuit que ſi l'on connoît les côtés d'un triangle acutangle, on trouvera aiſément la perpendiculaire P, & les ſegmens du côté où elle tombe, ſçavoir *a* & *e*.

---

# CHAPITRE IV.

## *Solution de pluſieurs Problêmes faciles dans la Géométrie plane, où les commençans pourront (en partie) comprendre l'application ou l'uſage des Théorêmes précédens.*

*Nota.* Lorſqu'une ligne où le côté d'un triangle plan eſt coupé de quelque maniere que ce ſoit en deux, ou pluſieurs parties, ſoit par une perpendiculaire qui tombe ſur lui, ou autrement, ces parties ſe nomment ordinairement *ſegmens*, & l'excès de l'une de ces parties ſur l'autre, ſe nomme *difference des ſegmens.*

Lorſqu'un côté d'un triangle, ou un ſegment de ce côté eſt donné, on le déſigne ordinairement par une petite ligne qui le coupe, en cette maniere : ——|——
Et les côtés ou parties de côtés que l'on cherche ſont marqués par quatre points, en cette maniere : ——∷——.

PROBLEME I.

*Couper ou diviſer une droite donnée (comme S) en extrême & moyenne proportion* (11. E. 2.); *c'eſt-à-dire diviſer une ligne, enſorte que le quarré du plus grand ſegment (ou partie) x, ſoit égal au rectangle ſous la ligne totale S, & ſous le moindre ſegment y.*

| | | |
|---|---|---|
| On a donc | 1 | $Sy = xx$, par le *Problême.* |
| Et | 2 | $S - x = y$, car $S = x + y$ |
| 1 ÷ | 3 | $\frac{xx}{S} = y$ |

| | | |
|---|---|---|
| 2 & 3 | 4 | $\frac{xx}{S} = S - x$, par l'*axiome* 5. |
| 4 × S | 5 | $xx = SS - Sx$ |
| 5+Sx | 6 | $xx + Sx = SS$ |
| 6, résolu | 7 | $x = \sqrt{SS + \frac{1}{4} SS} - \frac{1}{2} S$. Voyez la solution des équations quadratiques. |

*Nota.* Ce problême ne peut pas se résoudre toujours exactement en nombres, mais on le résout géométriquement en cette maniere :

1°. Faites un quarré, dont le côté soit $= S$, ligne donnée (*fig.* 77), & divisez également un de ses côtés au milieu C. Du point C décrivez un demi-cercle qui passe par les points les plus éloignés du quarré, & achevez son diametre.

2°. Chaque partie du diametre, vers chaque bout du côté S sera $= x$, qui est le plus grand segment requis; car $x + S : S :: S : x$, par le théor. 13. Donc $xx + Sx = SS$; ce qu'il falloit faire.

## PROBLEME II.

*La base d'un triangle rectangle, & la difference entre l'hypothenuse & le cathetus étant données, trouver le cathetus.*

| | | |
|---|---|---|
| Soient { | 1 | $b = 72$ (*fig.* 78) |
| | 2 | $d = 32$ |
| Et | 3 | $x =$ cathetus requis. |
| on aura | 4 | $bb + xx = dd + 2dx + xx$, par le théor. 11. |
| 4 — xx | 5 | $bb = dd + 2dx$ |
| 5 — dd | 6 | $2dx = bb - dd$ |
| 6 ÷ 2d | 7 | $x = \frac{bb - dd}{2d} = 65$ |
| ou | 8 | $b : d + 2x :: d : b$, par le théor. 13. |
| 8 ∵ | 9 | $bb = dd + 2dx$, comme ci-dev. au 5[e] cas. |

On voit ici que l'une & l'autre route produisent la même équation; aussi n'y a-t'il point de méthode ou

route conſtante à obſerver pour la ſolution des *Problêmes géométriques* ; mais chacun fait uſage des principes & théorêmes qui lui viennent d'abord en eſprit, le réſultat étant toujours le même, quelque voie que l'on prenne.

## PROBLEME III.

*La difference entre la baſe & l'hypothenuſe d'un triangle rectangle, & la difference entre le cathetus & l'hypothenuſe étant données, trouver le triangle.*

| | | |
|---|---|---|
| Soient | 1 | $d = 32$ (*fig.* 79 |
| | 2 | $c = 25$ |
| & | 3 | $d + c + x =$ l'hypothenuſe ; |
| enſuite | 4 | $d + x = y$ } par le problême. |
| | 5 | $c + x = z$ } |
| 4 ⊙ 2 | 6 | $dd + 2dx + xx = yy$ |
| 5 ⊙ 2 | 7 | $cc + 2cx + xx = zz$ |
| 3 ⊙ 2 | 8 | $dd + 2cd + cc + 2dx + 2cx + xx =$ □ hypothenuſe. |
| 6 + 7 | 9 | $dd + 2dx + 2xx + cc + 2cx = yy + zz.$ |

Ces deux derniers cas ſont égaux, par le théor. 11 ; par conſéquent ſi les choſes qui ſont égales de part & d'autre ſont retranchées, les reſtes ſeront égaux.

| | | |
|---|---|---|
| C'eſt-à-dire | 10 | $xx = 2cd = 1600$ |
| 10 ▱ 2 | 11 | $x = \sqrt{2cd} = 40$ |
| 1 + 11 | 12 | $d + x = 72 = y$, la baſe. |
| 2 + 11 | 13 | $c + x = 65 = z$, le cathetus. |
| 1 + 2 + 11 | 14 | $d + c + x = 97$, l'hypothenuſe. |

## PROBLEME IV.

*L'hypothenuſe & la ſomme des deux côtés d'un triangle rectangle étant données, trouver par là les côtés.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $H = 97$ (*fig.* 80) |
| & | 2 | $x + z = S = 137$ |
| par la fig. | 3 | $xx + zz = HH$ |
| 2 ⊙ 2 | 4 | $xx + 2xz + zz = SS$ |

| | | |
|---|---|---|
| 4 — 3 | 5 | $2xz = SS - HH$ |
| 3 — 5 | 6 | $xx - 2xz + zz = 2HH - SS$ |
| 6 ▱ 2 | 7 | $x - z = \sqrt{2HH - SS}$ |
| 2 + 7 | 8 | $2x = S + \sqrt{2HH - SS} = 144$ |
| 8 ÷ 2 | 9 | $x = \frac{S + \sqrt{2HH - SS}}{2} = 72$, base requise. |
| 2 — 9 | 10 | $z = \frac{S - \sqrt{2HH - SS}}{2} = 65$, le cathetus. |

## PROBLEME V.

*L'hypothenuse & la difference des deux autres côtés d'un triangle rectangle étant données, trouver les côtés.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $h = 97$, comme ci-devant. |
| Et | 2 | $x - z = d = 7$; on cherche $x$ (*fig.* 81). |
| Par la fig. | 3 | $xx + zz = hh$ |
| 2 ⊙ 2 | 4 | $xx - 2zx + zz = dd$ |
| 3 — 4 | 5 | $2zx = hh - dd$ |
| 3 + 5 | 6 | $xx + 2xz + zz = 2hh - dd$ |
| 6 ▱ 2 | 7 | $x + z = \sqrt{2hh - dd}$ |
| 2 + 7 | 8 | $2z - d + \sqrt{2hh - dd} = 144$ |
| 8 ÷ 2 | 9 | $z = 72$ |
| 7 — 2 | 10 | $2z = \sqrt{2hh - dd} - d = 130$ |
| 10 ÷ 2 | 11 | $z = 65$. |

## PROBLEME VI.

*Dans un triangle rectangle, la base ou le cathetus, & le segment alternatif de l'hypothenuse (fait par une perpendiculaire abaissée de l'angle droit) étant donnés, trouver l'autre segment.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $c = 45$, le cathetus (*fig.* 82). |
| Et | 2 | $b = 48$, le segment alternatif. |
| On aura | 3 | $b : z :: z : x$ |
| 3 ∵ | 4 | $bx = zz$ |
| De plus | 5 | $cc - xx = zz$, par le théor. 11. |
| 4, 5 | 6 | $cc - xx = bx$ |

| | | |
|---|---|---|
| $6 + xx$ | 7 | $cc = bx + xx$ |
| $7, C \square$ | 8 | $xx + bx + \frac{1}{4}bb = cc + \frac{1}{4}bb$ |
| $8 \boxed{} 2$ | 9 | $x + \frac{1}{2}b = \sqrt{cc + \frac{1}{4}bb}$ |
| $9 - \frac{1}{2}b$ | 10 | $x = \sqrt{cc + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b = 27$, & ainsi de ſuite pour $z$, &c. |

Je vais maintenant donner la *conſtruction géométrique* (ou *ſolution*) des trois cas des *équations quadratiques* que j'ai promiſe à la fin du chap. 8e de l'Algébre. Soit le premier exemple, celui du problême précédent $xx + bx = cc$, *premier cas.*

Faites avec le coefficient $b$ (*fig.* 83) & la racine du nombre à réſoudre (qui eſt ici) $c$, un *parallelogramme rectangle.* Et du point du milieu, du côté $b$, décrivez un demi-cercle qui paſſe par les points ou angles les plus éloignés du parallelogramme, achevant ſon diametre, comme dans cette figure.

L'une des parties du diametre de chaque côté de $b$ ſera $= x$, & l'autre partie $= x + b$, & le côté $c$ ſera moyen proportionnel entre les deux, c'eſt-à-dire $x + b : c :: c : x$, par le théor. 13 ; par conſéquent $xx + bx = cc$, ce qu'il falloit faire.

PROBLEME VII.

*La difference entre la baſe & le cathetus d'un triangle rectangle, & la perpendiculaire abaiſſée de l'angle droit ſur l'hypothenuſe étant données, trouver l'hypothenuſe, &c.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $d = 15$, différence des côtés (*fig.* 84). |
| Et | 2 | $p = 36$ |
| on cherche $x$ | 3 | $x =$ l'hypothenuſe. |
| Par la figure | 4 | $d + z : p :: x : z$ |
| $4 \because$ | 5 | $dz + zz = px$ |
| De plus | 6 | $dd + 2dz + 2zz = xx$, par le théor. 11. |
| $5 \times 2$ | 7 | $2dz + 2zz = 2px$ |
| $6 - z$ | 8 | $dd = xx - 2px$, ſecond *cas.* |
| $8\ C \square$ | 9 | $xx - 2px + pp = dd + pp = 1521$ |
| $9 \boxed{} 2$ | 10 | $x - p = \sqrt{dd + pp} = 39$ |
| $10 + p$ | 11 | $x = p + \sqrt{dd + pp} = 75$, &c, & ainſi pour $z$, par le *cas* 5. |

La construction géométrique de ce second cas, $xx - 2px = dd$, peut se faire de la même maniere que celle du premier, c'est-à-dire en faisant un parallelogramme rectangle du coefficient $2p$, & de $\sqrt{dd}$ qui est $d$, &c. (*fig.* 85).

La plus grande partie du diametre à l'une des extrémités du parallelogramme sera $= x$, & la moindre partie sera $x - 2p$; car $x : d :: d : x - 2p$, par le théor. 13; par conséquent $xx - 2px = dd$; ce qu'il falloit faire.

### PROBLEME VIII.

*L'hypothenuse d'un triangle rectangle & la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypothenuse étant données, trouver le plus grand segment de l'hypothenuse, &c.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $h = 75$, l'hypothenuse (*fig.* 86). |
| Et | 2 | $p = 36$ |
| ensuite | 3 | $x + z = h$, on demande $x$; |
| Par la fig. | 4 | $x : p :: p : z$ |
| 4 ∵ | 5 | $\frac{pp}{x} = z$ |
| 3 $-$ $x$ | 6 | $h - x = z$ |
| 5, 6 | 7 | $h - x = \frac{pp}{x}$ |
| 7 $\times$ $x$ | 8 | $hx - xx = pp$, troisiéme *cas.* |
| 8 $\pm$ | 9 | $xx - hx = -pp$ |
| 9 $\overline{C}$ □ | 10 | $xx - hx + \frac{1}{4}hh = \frac{1}{4}hh - pp = 110,25$ |
| 10 ▱ 2 | 11 | $x - \frac{1}{2}h = \sqrt{\frac{1}{4}hh - pp} = 10,5$ |
| 11 $+ \frac{1}{2}h$ | 12 | $x = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{\frac{1}{4}hh - pp} = 48$, ou $x = 27$ (*fig.* 87). |

---

La construction géométrique du troisiéme cas, $hx - xx = pp$ se peut faire ainsi : menez une droite (d'une longueur convenable à volonté), & vers son milieu, élevez une perpendiculaire $= p$ c'est-à-dire de la même longueur que la racine du nombre à résoudre. Du point le plus élevé de cette perpendiculaire, coupez la moitié du

coefficient, c'est-à-dire $\frac{1}{2} b$, & au point où $\frac{1}{2} b$ touche la premiere ligne ( avec la même distance ), décrivez un demi-cercle ; son diametre $b$ sera coupé par la perpendiculaire en deux segmens, qui seront les deux valeurs de la racine $x$, la plus grande & la plus petite ; car les deux ensemble sont toujours égales au coefficient ( voyez la *scholie* à la fin du chap. 8. de l'Algébre ) : en effet $b - x : p :: p : x$, par le théor. 13. Donc $bx - xx = pp$ ; ce qu'il falloit trouver.

## PROBLEME IX.

*Le perimetre, ou la somme des trois côtés d'un triangle rectangle & son aire, étant donné, trouver chaque côté.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $x + z + y = s = 234$, somme de tous les côtés ( *fig* 88 ). |
| & | 2 | $\frac{1}{2} zx = A$, l'aire $= 2340$. |
| De plus | 3 | $xx + zz = yy$, par la figure. |
| $2 \times \overline{4}$ | 4 | $2zx = 4A$ |
| $3 + 4$ | 5 | $xx + 2zx + zz = yy + 4A$ |
| $1 - y$ | 6 | $x + z = s - y$ |
| 6 ⊙ 2 | 7 | $xx + 2xz + zz = ss - 2sy + yy$ |
| 5, 7 | 8 | $yy + 4A = ss - 2sy + yy$ |
| 8 ± | 9 | $2sy = ss - 4A = 45396$ |
| $9 \div 2s$ | 10 | $y = \frac{ss - 4A}{2s} = \frac{1}{2} s - \frac{2A}{s} = 97$, *hypoth.* |
| 6, 10 | 11 | $x + z = s - y = 137$ |
| $3 - 4$ | 12 | $xx - 2xz + zz = yy - 4A = 49$ |
| 12 ▱ 2 | 13 | $x - z = \sqrt{49} = 7$ |
| $11 + 13$ | 14 | $2x = 137 + 7 = 144$ |
| $13 \div 2$ | 15 | $x = 72$, la *base*. |
| $11 - 15$ | 16 | $z = 137 - 72 = 65$, le *cathetus*. |

## PROBLEME X.

*Dans un triangle rectangle, ayant abaissé une perpendiculaire de l'angle droit sur l'hypothenuse, si la somme de chaque segment ajouté à son côté contigu est donnée, trouver par là les segmens & les côtés.*

| | | |
|---|---|---|
| C'est-à-dire si | 1 | $x + u = s = 108$ (*fig.* 89). |
| | 2 | $z + y = b = 72$ |
| il faut trouver | | $x, z, u, y$ & $p$ |
| 1 — $x$ | 3 | $u = s - x$ |
| 3 ⊙ 2 | 4 | $uu = ss - 2sx + xx$ |
| 4 — $xx$ | 5 | $uu - xx = ss - 2sx = pp$ |
| 2 — $z$ | 6 | $y = b - z$ |
| 6 ⊙ 2 | 7 | $yy = bb - 2bz + zz$ |
| 7 — $zz$ | 8 | $yy - zz = bb - 2bz = pp$ |
| 5, 8 | 9 | $bb - 2bz = ss - 2sx$ |
| Par la figure | 10 | $x : p :: p : z$ |
| 10 ∵ | 11 | $zx = pp$ |
| 5, 11 | 12 | $zx = ss - 2sx$ |
| 12 ÷ $x$ | 13 | $z = \frac{ss - 2sx}{x}$ |
| 13 × $2b$ | 14 | $2bz = \frac{2bss - 4bsx}{x}$ |
| 9 + 14 | 15 | $bb = ss - 2sx + \frac{2bss - 4bsx}{x}$ |
| 15 × $x$ | 16 | $bbx = ssx - 2sxx + 2bss - 4bsx$ |
| 16 ± | 17 | $2sxx + bbx + 4bsx - ssx = 2bss$ |
| 17 ÷ $2s$ | 18 | $xx + \frac{bbx}{2s} + 2bx - \frac{1}{2}sx = bs$ |
| Substituant | 19 | $2m = \frac{bb}{2s} + 2b - \frac{1}{2}s = 114$ |
| Donc | 20 | $xx + 2mx = bs = 7776$ |
| 20 C □ | 21 | $xx + 2mx + mm = bs + mm = 11025$ |
| 21 ▱ 2 | 22 | $x + m = \sqrt{bs + mm} = 105$ |
| 22 — $m$ | 23 | $x = \sqrt{bs + mm} - m = 48$ |
| 1 — 23 | 24 | $u = 60$, la *base*. |
| par 13 | 25 | $z = \frac{ss}{x} - 2s = 27$ |
| 2 — 25 | 26 | $y = 45 =$ *cathetus*. |
| 23 + 25 | 27 | $x + z = 75$, $=$ l'*hypothenuse*. |

## PROBLEME XI.

*La difference des côtés d'un triangle plan obliqu'angle, la difference des segmens de la base, & la difference entre le plus grand côté & la base étant données, trouver la base, &c.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $d$ = différence des côtés = 405 (*fig.* 90). |
| | 2 | $b$ = différence des segmens = 495 |
| | 3 | $c = 165$, différence du plus grand côté & de la base. |
| Et | 4 | $x$ = moindre côté. |
| Donc | 5 | $d + x + c$ = base. |
| Et | 6 | $d+x+c : d+2x :: d : b$, par le théor. 16. |
| 6 $\because$ | 7 | $db + bx + bc = dd + 2dx$ |
| 7 $\pm$ | 8 | $2dx - bx = db + bc - dd$ |
| 8 $\div$ $2d-b$ | 9 | $x = \frac{db + bc - dd}{2d - b} = \frac{118125}{215} = 375$ |
| 1 + 9 | 10 | $d + x = 780$ = plus grand côté. |
| 3 + 10 | 11 | $d + x + c = 945$ = la base. |

## PROBLEME XII.

*La difference des côtés d'un triangle plan, celle des segmens de la base, & la perpendiculaire abaissée de l'angle du sommet étant données, trouver tous les côtés.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $d = 405$ (*fig.* 91). |
| | 2 | $b = 495$ |
| | 3 | $p = 300$ |
| on demande | 4 | $x$ = moindre segment. |
| Donc | 5 | $b + 2x : d + 2z :: d : b$ |
| 5 $\because$ | 6 | $bb + 2bx = dd + 2dz$ |
| 6 $-$ $dd$ | 7 | $bb - dd + 2bx = 2dz$ |
| Substitution | 8 | $2m = bb - dd = 81000$ |
| 7, 8 | 9 | $2m + 2bx = 2dz$ |
| 9 $\div$ $2d$ | 10 | $\frac{m + bx}{d} = z$ |
| Mais | 11 | $pp + xx = zz$, par le théor. 11. |

| | | |
|---|---|---|
| 10 ⊙ 2 | 12 | $\frac{mm + 2mbx + bbxx}{dd} = zz$ |
| 11, 12 | 13 | $\frac{mm + 2mbx + bbxx}{dd} = pp + xx$ |
| 13 × $dd$ | 14 | $mm + 2mbx + bbxx = ppdd + ddxx$ |
| 14 ± | 15 | $bbxx - ddxx + 2mbx = ppdd - mm$ |
| 8, 15 | 16 | $2mxx + 2mbx = ppdd - mm$ |
| 16 ÷ 2$m$ | 17 | $xx + bx = \frac{ppdd - mm}{2m}$ |
| 17 C □ | 18 | $xx + bx + \frac{1}{4}bb = \frac{ppdd - mm}{2m} + \frac{1}{4}bb$ |
| 18 ▱ 2 | 19 | $x + \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{ppdd}{2m}} - \frac{1}{2}m$ |
| 19 − ½$b$ | 20 | $x = \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{ppdd}{2m}} - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}b = 225$ |
| 20 × $\bar{2}$ | 21 | $2x = 450$ |
| 2 + 21 | 22 | $b + 2x = 495$, la baſe. |
| 10 en nomb. | 23 | $z = 375$, le moindre côté. |
| 11 + 23 | 24 | $d + z = 780$ = plus grand côté. |

## PROBLEME XIII.

*La ſomme de deux côtés d'un triangle plan, la difference des ſegmens de la baſe, & la perpendiculaire abaiſſée de l'angle du ſommet ſur la baſe étant données, trouver la baſe & les côtés.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $s = 1155$, ſomme des côtés (*fig.* 92). |
| | 2 | $d = 495$, différence des ſegmens. |
| | 3 | $p = 300$, perpendiculaire. |
| Et | 4 | $x$ = moindre ſegment. |
| | 5 | $z$ = moindre côté. |
| Donc | 6 | $d + 2x$ = la baſe. |
| & | 7 | $s - 2z$ = différence des côtés. |
| Par la fig. | 8 | $d + 2x : s :: s - 2z : d$ |
| | 9 | $xx + pp = zz$ |
| 9 ▱ 2 | 10 | $\sqrt{xx + pp} = z$ |
| 8 ∵ | 11 | $dd + 2dx = ss - 2sz$ |

| | | |
|---|---|---|
| 11 ± | 12 | $2sz = ss - dd - 2dx$ |
| Supposons | 13 | $2m = ss - dd$ |
| Donc | 14 | $2sz = 2m - 2dx$ |
| 14 ÷ 2s | 15 | $z = \frac{m - dx}{s}$ |
| 10, 15 | 16 | $\frac{m - dx}{s} = \sqrt{xx + pp}$ |
| 16 ⊙ 2 | 17 | $\frac{mm - 2mdx + ddxx}{ss} = xx + pp$ |
| 17 × ss | 18 | $mm - 2mdx + ddxx = ssxx + sspp$ |
| 18 ± | 19 | $ssxx - ddxx + 2mdx = mm - sspp$ |
| 13, 19 | 20 | $2mxx + 2mdx = mm - sspp$ |
| 20 ÷ 2m | 21 | $xx + dx = \frac{1}{2}m - \frac{sspp}{2}$, &c. comme ci-devant. |
| 21, de là | 22 | $x = 225$ |
| 22 × 2 | 23 | $2x = 450$ |
| 2 + 23 | 24 | $d + 2x = 495$, la base. |
| 10 en nomb. | 25 | $z = 375$, moindre côté. |
| 1 — 25 | 26 | $s - z = 780$, grand côté. |

## PROBLEME XIV.

*L'aire d'un triangle plan obliqu'angle, la différence des côtés, & la différence des segmens de la base, étant données, trouver la base, &c.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $A = 141750 =$ l'aire (*fig.* 93); |
| | 2 | $d = 405$ |
| | 3 | $b = 495$ |
| Faisons | 4 | $y =$ la perpendiculaire. |
| | 5 | $x =$ la base. |
| Donc | 6 | $\frac{1}{2}xy = A$ |
| Par la fig. | 7 | $x : d + 2z :: d : b$ |
| 7 ∵ | 8 | $bx = dd + 2dz$ |
| 8 — dd | 9 | $bx - dd = 2dz$ |

| | | |
|---|---|---|
| 9 ⊙ 2 | 10 | $bbxx - 2bddx + d^4 = 4ddzz$ |
| Par la fig. | 11 | $\frac{x - b}{2} = u$, moindre segment de la base. |
| 11 ⊙ 2 | 12 | $\frac{xx - 2bx + bb}{4} = uu$ |
| 6 × $\bar{2}$ | 13 | $xy = 2A$ |
| 13 ÷ $x$ | 14 | $y = \frac{2A}{x}$ |
| 14 ⊙ 2 | 15 | $yy = \frac{4AA}{xx}$ |
| Par la fig. | 16 | $yy + uu = zz = \frac{4AA}{xx} + \frac{xx - 2bx + bb}{4}$ |
| 10 ÷ $4dd$ | 17 | $\frac{bbxx - 2bddx + d^4}{4dd} = zz$ |
| 16, 17 | 18 | $\frac{bbxx - 2bddx + d^4}{4dd} = \frac{4AA}{xx} + \frac{xx - 2bx + bb}{4}$ |
| 18 × $xx$ | 19 | $\frac{bbx^4 - 2bddx^3 + d^4xx}{4dd} = 4AA + \frac{x^4 - 2bx^3 + bbxx}{4}$ |
| 19 × $4dd$ | 20 | $bbx^4 - 2bddx^3 + d^4xx = 46AAdd + ddx^4 - 2bddx^3 + bbddxx$ |
| 20 ± | 21 | $bbx^4 - ddx^4 + d^4xx - bbddxx = 16AAdd$ |
| 21 ÷ | 22 | $x^4 - ddxx = \frac{16AAdd}{bb - dd}$ |
| 22 C □ | 23 | $x^4 - ddxx + \frac{1}{4}d^4 = \frac{16AAdd}{bb - dd} + \frac{1}{4}d^4$ |
| 23 ▱ 2 | 24 | $xx - \frac{1}{2}dd = \sqrt{\frac{16AAdd}{bb - dd} + \frac{1}{4}d^4}$ |
| 24 + $\frac{1}{2}dd$ | 25 | $xx = \frac{1}{2}dd + \sqrt{\frac{16AAdd}{bb - dd} + \frac{1}{4}d^4}$ |
| 25 ▱ 2 | 26 | $x = \sqrt{\frac{1}{2}dd + \sqrt{\frac{16AAdd}{bb - dd} + \frac{1}{4}d^4}} = 945.$ |

## PROBLEME XV.

*Il y a un triangle plan obliqu'angle, où l'on a abaiſſé une perpendiculaire de l'angle du ſommet ſur la baſe ; le moindre côté & la baſe ſont donnés ; & le rectangle ſous la difference des côtés, & ſous le moindre côté, eſt égal au quarré de la différence des ſegmens de la baſe ; il eſt queſtion de trouver les ſegmens de la baſe, &c.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $c = 56 =$ moindre côté. |
| | 2 | $B = 92 =$ la baſe. |
| Et | 3 | $x + 2z = B$ |
| Faiſons | 4 | $y =$ différence des côtés. |
| Nous aurons | 5 | $cy = xx$, par la queſtion. |
| Par la fig. | 6 | $B : 2c + y :: y : x$ ; car $B = x + 2z$ (*fig.* 94) |
| 6 ∵ | 7 | $Bx = 2cy + yy$ |
| $5 \times \bar{2}$ | 8 | $2cy = 2xx$ |
| $7 - 8$ | 9 | $Bx - 2xx = yy$ |
| $5 \odot 2$ | 10 | $ccyy = x^4$ |
| $10 \div cc$ | 11 | $yy = \frac{x^4}{cc}$ |
| 9, 11 | 12 | $Bx - 2xx = \frac{x^4}{cc}$ |
| $12 \times cc$ | 13 | $ccBx - 2ccxx = x^4$ |
| $13 \div x$ | 14 | $ccB - 2ccx = x^3$ |
| $14 + 2ccx$ | 15 | $x^3 + 2ccx = ccB$ |
| 15 en nom. | 16 | $x^3 + 6272x = 288512$. |

La valeur de $x$ dans cette derniere équation peut ſe trouver, comme dans les exemples de la ſection 3. du chap. 10. de l'Algebre, en prenant $r + e = x$, &c. & l'on aura, comme dans ces exemples, $x = 37,55502$, &c.

## PROBLEME XVI.

*Les trois cordes ou ſous-tendantes des trois arcs qui forment le demi-cercle, étant chacune données, trouver le dia-*

*metre du cercle, c'est-à-dire un trapeze étant inscrit dans un demi-cercle, si l'un de ses côtés est le diametre, & que les autres trois côtés soient donnés, trouver le diametre ou quatriéme côté.*

| | | |
|---|---|---|
| Soient | 1 | $b = 3$ } les trois côtés (*fig.* 95) |
| | 2 | $c = 4$ |
| | 3 | $d = 5$ |
| on demande | 4 | $x =$ diametre requis. |
| | | Menez les deux diagonales $z$ & $y$. |
| Donc | 5 | $cx + bd = zy$, par le théor. 19. |
| Et | 6 | $xx - bb = yy$ } par les théor. 10 & 11. |
| | 7 | $xx - dd = zz$ |
| 5 ⊙ 2 | 8 | $ccxx + 2bcdx + bbdd = zzyy$ |
| 6 × 7 | 9 | $x^4 - bbxx - ddxx + bbdd = zzyy$ |
| 8 = 9 | 10 | $ccxx + 2bcdx = x^4 - bbxx - ddxx$ |
| 10 . x | 11 | $x^3 - bbx - ddx = ccx + 2bcd$ |
| 11 — ccx | 12 | $x^3 - bbx - ddx - ccx = 2bcd$ |
| 12, nomb. | 13 | $x^3 - 50x = 120$. |

Cette équation étant résolue en nombres, comme dans l'exemple 2. sect. 3. chap. 10. de l'Algebre, donnera $x = 8,05581$, &c.

### PROBLEME XVII.

*Dans un triangle rectangle, l'aire & la somme de l'hypothenuse ajoutée à l'un des côtés étant données, trouver les côtés, &c.*

| | | |
|---|---|---|
| Soient | 1 | $\frac{xz}{2} = A = 1350$, l'aire (*fig.* 96). |
| | 2 | $y + z = s = 120$, somme, &c. |
| | 3 | On demande $x$, $z$ & $y$. |
| 1 × $\overline{2}$ | 4 | $xz = 2A$ |
| 4 ÷ x | 5 | $z = \frac{2A}{x}$ |
| Par la fig. | 6 | $xx + zz = yy$ |

| | | |
|---|---|---|
| $2 - z$ | 7 | $y = s - z$ |
| $5, 7$ | 8 | $y = s - \frac{2A}{x}$ |
| $8 \odot 2$ | 9 | $yy = ss - \frac{4sA}{x} + \frac{4AA}{xx}$ |
| $5 \odot 2$ | 10 | $zz = \frac{4AA}{xx}$ |
| $10 + xx$ | 11 | $xx + zz = \frac{4AA}{xx} + xx$ |
| $6, 9, 11$ | 12 | $\frac{4AA}{xx} + xx = yy = ss - \frac{4sA}{x} + \frac{4AA}{xx}$ |
| 12, c'est-à-dire | 13 | $xx = ss - \frac{4sA}{x}$ |
| $13 \times x$ | 14 | $x^3 = ssx - 4sA$ |
| $14 \pm$ | 15 | $ssx - x^3 = 4sA$ |
| 15 en nomb. | 16 | $14400x - x^3 = 648000$. |

La valeur de $x$ dans cette équation se trouve comme dans le troisiéme exemple, sect. 3. chap. 10. de l'Algebre, faisant $r + e = x$, &c. & l'on aura $x = 60$.

### PROBLEME XVIII.

*Il y a un triangle plan obliqu'angle, ou une perpendiculaire étant abaissée de l'angle du sommet sur la base, la somme de chaque segment de la base, ajouté à son côté adjacent ou voisin, & l'aire du triangle étant données, il faut trouver la perpendiculaire & chaque côté.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Soient | 1 | $y + z = c = 1500$ | on demande $y$, $z$, $r$ & $u$ (*fig.* 97). |
| | 2 | $r + u = s = 600$ | |
| | 3 | $A = \text{aire} = 141750$ | |
| Et | 4 | $x =$ la perpendiculaire requise. | |
| Donc | 5 | $\overline{y + r} \times \frac{1}{2}x = A$ | |
| $5 \times 2 \div x$ | 6 | $y + r = \frac{2A}{x}$ | |
| Par la fig. | 7 | $yy + xx = zz$ | |
| | 8 | $rr + xx = uu$ | |
| $1 - y$ | 9 | $z = c - y$ | |

| | | |
|---|---|---|
| 2 $-$ r | 10 | $u = s - r$ |
| 9 ⊙ 2 | 11 | $zz = cc - 2cy + yy$ |
| 10 ⊙ 2 | 12 | $uu = ss - 2sr + rr$ |
| 7, 11 | 13 | $xx = cc - 2cy$ |
| 8, 12 | 14 | $xx = ss - 2sr$ |
| 13 $\pm$ | 15 | $cc - xx = 2cy$ |
| 14 $\pm$ | 16 | $ss - xx = 2sr$ |
| 15 $\div$ 2c | 17 | $\frac{cc - xx}{2c} = y$ |
| 16 $\div$ 2s | 18 | $\frac{ss - xx}{2s} = r$ |
| 17 + 18 | 19 | $\frac{cc - xx}{2c} + \frac{ss - xx}{2s} = y + r$ |
| 6, 19 | 20 | $\frac{cc - xx}{2c} + \frac{ss - xx}{2s} = \frac{2A}{x}$ |
| 20 $\times$ 2c | 21 | $cc - xx + \frac{css - cxx}{s} = \frac{4cA}{x}$ |
| 21 $\times$ s | 22 | $ccs - sxx + css - cxx = \frac{4csA}{x}$ |
| 22 $\times$ x | 23 | $ccsx - sx^3 + cssx - cx^3 = 4csA$ |
| 23 en nom. | 24 | $900000x - x^3 = 243000000$. |

(Lignes 17 & 18 :) Ayant trouvé la valeur de $x$ par le 24[e] *cas*, on trouvera aisément $r$ & $y$ par ces deux équations, & $zu$ par les *cas* 9 & 10.

On trouve ici $x = 300$, comme dans le dernier problême.

## PROBLEME XIX.

*Il y a un triangle rectangle, ou une droite est menée parallelement au cathetus ; le cathetus est donné avec le segment de l'hypothenuse proche du cathetus & le segment alterne de la base ; on demande la base, &c.*

| | | |
|---|---|---|
| Soit | 1 | $b = 20$, $c = 24$, & $h = 15$ (*fig.* 98) ; |
| ensuite | 2 | $b + x =$ base ; on cherche $x$. |
| Par la fig. | 3 | $b + x : c :: x : z$, |
| & par fig. | 4 | $xx + zz = hh$ |
| 3 ∴ | 5 | $\frac{cx}{b + x} = z$ |

| | | |
|---|---|---|
| 5 ⊙ 2 | 6 | $\frac{ccxx}{bb+2bx+xx} = zz$ |
| 4 — $xx$ | 7 | $zz = bb - xx$ |
| 6, 7 | 8 | $\frac{ccxx}{bb+2bx+xx} = bb - xx$ |
| 8×$bb$+&c. | 9 | $ccxx = bbbb - bbxx + 2bbbx - 2bx^3 + bbxx - x^4$ |
| 9 ± | 10 | $x^4 + 2bx^3 + ccxx + bbxx - bbxx - 2bbbx = bbbb$ |
| ou | 11 | $x^4 + 40x^3 + 751xx - 9000x = 90000.$ |

Pour la solution de cette équation, faisons $x^4 + bx^3 + cxx - dx = C$, dans laquelle $\begin{cases} b = 40 & c = 751 \\ d = 9000, & C = 90000 \end{cases}$

Soit $r + e = x$,

on aura $\left\{\begin{array}{l} r^4 + 4r^3e + 6rree = x^4 \\ br^3 + 3brre + 3bree = bx^3 \\ crr + 2cre + cee = cxx \\ -dr - de = -dx \end{array}\right\} = C = 90000$

Soit $r = 10$,

nous aurons $\left\{\begin{array}{l} 10000 + 4000e + 600ee \\ +40000 + 12000e + 1200ee \\ +75100 + 15020e + 751ee \\ -90000 - 9000e \end{array}\right\} = C = 90000$

C'est-à-dire $35100 + 22020e + 2551ee = 90000.$

D'où il suit $22020e + 2551ee = 54900.$

Par conséquent $8,63e + ee = 21,52 = D.$

Et $\frac{D}{8,63+e} = e.$

*Opération.* $8,63\ )\ 21,52\ (\ 2,1 = e$

| | | |
|---|---|---|
| $+e = 2,1$ | 20 | Premier $r = 10$ |
| 1. *Divis.* = 10 | 1,52 | $+e = 2,1$ |
| 2. *Divis.* = 10,7 | 1,07 | $r + e = 12,1 = r$ |
| | 45, &c. | |

pour une seconde opération, lequel étant substitué donnera ces nombres :

$$\left.\begin{array}{l} +\ 21435,8881 + 7086,24e + 878,46ee \\ +\ 70862,4400 + 17569,20e + 1452,00ee \\ +\ 109953,9100 + 18174,20e + 751,00ee \\ -\ 108900,0000 - 9000,00e \end{array}\right\} = C,$$

ou $93352,2381 + 33829,64e + 3081,46ee = 90000$

Comme ici $93352,2381 > 90000$, nous avons $12,1 > x$, & par conséquent il faut faire $r - e = x$, ce qui produit les mêmes nombres, excepté seulement que le second terme doit être changé en cette maniere :

$$93352,238 - 33829,64e + 3081,46ee = 90000,$$

d'où résulte cette équation :

$$+ 33829,64e - 3081,46ee = 3352,2381;$$

par conséquent $10,9784e - ee = 1,0878332 = D.$

| | | |
|---|---|---|
| *Opération.* | 10,9784 ) | 1,08787332 ( 0,0999 = e |
| — e = | ,0999 | 9792 |
| 1. *Diviseur* | 10,88 | 108673 |
| 2. *Diviseur* | 10,879 | 97911 |
| 3. *Diviseur* | 10,8785 | 1076232 |
| | | 979065 |
| | | *&c.* |

Le dernier $r = 12,1$
$- e = 0,0999$

$r - e = 12,0001 = x.$

PROBLEME XX.

*Dans le triangle obliqu'angle* CAD, *le côté* AD *est donné avec la somme des côtés* AC + CD; *la ligne* AB *perpendiculaire au côté* CA *est aussi donnée en dedans du triangle; on demande le côté* CA, *&c.*

Soient $\left\{\begin{array}{l|l} 1 & CA + CD = s = 51 \\ 2 & AD = d = 32 \\ 3 & AB = b = 21 \end{array}\right.$ (*fig.* 99).

| | | |
|---|---|---|
| & | 4 | $CA = x$, requis. |
| Donc | 5 | $s - x = CD$. Supposons DF parallele à AB, & CA prolongé en F. |
| & | 6 | BC : CA : : DC : CF, les △ CAB, CFD seront semblables : |
| mais | 7 | $BC = \sqrt{bb + xx}$ : soit $AF = z$ & $FD = y$ |
| 6, 7 | 8 | $\sqrt{bb + xx} : x :: s - x : x + z$ |
| 8 ∵ | 9 | $\frac{sx - xx}{\sqrt{bb + xx}} = x + z$ |
| 5 ⊙ 2 | 10 | $ss - 2sx + xx = \square CD$ |
| Par la fig. | 11 | $ss - 2sx + xx = xx + 2xz + zz + yy = \square CF + \square FD$ |
| 11 − xx | 12 | $ss - 2sx = 2zx + zz + yy$; |
| mais | 13 | $dd = zz + yy$ |
| 12 − 13 | 14 | $ss - 2sx - dd = 2zx$ |
| Soit | 15 | $2m = ss - dd$ |
| 14, 15 | 16 | $m - sx = zx$ |
| 16 ÷ x | 17 | $\frac{m - sx}{x} = z$ |
| 17 + x | 18 | $\frac{m - sx + xx}{x} = z + x$ |
| 9 ⊙ 2 | 19 | $\frac{ssxx - 2sx^3 + x^4}{bb + xx} = \overline{x + z}^2$ |
| 18 ⊙ 2 | 20 | $\frac{mm - 2msx + ssxx + 2mxx - 2sx^3 + x^4}{xx} = \overline{z + x}^2$ |
| 18, 19 | 21 | $\frac{ssxx - 2sx^3 + x^4}{bb + xx} = \frac{mm - 2msx + ssxx + 2mxx - 2sx^3 + x^4}{xx}$. |

Cette équation étant délivrée des fractions & changée en nombres, devient $- 2018x^4 + 125409x^3 - 2464230,25xx + 35468307x = 274183922,25$,

laquelle étant divisée par 2019, coefficient de la plus haute puissance de $x$, deviendra $-x^4+62,1456x^3 - 1221,125xx + 17575,9697a = 135869,138875$, &c. & par là on peut trouver la valeur de $x$, comme dans le dernier problême, ayant égard aux signes de chaque terme.

Cette opération de réduire ou préparer les équations à la solution par la division, a toujours été enseignée, tant par les *anciens* que par les *modernes Algébristes*, comme étant si nécessaire, qu'ils ne viennent jamais à la solution d'une équation affectée sans son secours.

Mais il arrive souvent qu'en divisant tous les termes d'une équation, quelques-uns de leurs quotients forment non seulement une longue suite, mais encore des fractions imparfaites (comme dans l'équation précédente), ce qui rend la solution également ennuyeuse & imparfaite.

Pour remédier à cette imperfection, je vais faire voir comment on peut résoudre cette équation (& par conséquent toute autre) sans une telle division ou réduction.

Soit $b=2018$, $c=125409$, $d=2464230,25$, $f=35468307$, & $G=274183922,25$, & l'équation précédente deviendra $-bx^4+cx^3-dx^2+fx=G$.

Soit $r+e=x$, comme auparavant ;.

$$\text{nous aurons}\left\{\begin{array}{ll} -br^4-4br^3e-6br^2e^2 & =-bx^4 \\ +cr^3+3crre+3cree & =+cx^3 \\ -drr-2dre-dee & =-dxx \\ +fr+fe\ldots\ldots & =+fx \end{array}\right\}=G.$$

Cela est clair & se comprend aisément ; ce qui reste à faire est d'estimer la premiere valeur de $r$, & pour en venir à bout, il faut diviser $G$ par $b$, seulement aussi loin qu'il sera nécessaire pour trouver combien le quotient doit contenir de figures en nombres entiers, & par conséquent combien il doit y avoir de *points* (selon le degré de l'équation).

Ainsi $b = 2018$ ) $G = 274183922,25$ ( 130000
2018
7238, &c.

Par là on peut aussi aisément conjecturer quelle est la valeur de $r$, que si tous les termes avoient été divisés, c'est-à-dire supposant $r = 10$, & le substituant ou élevant aux puissances marquées par les lettres, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} -\ 20180000 - 8072000e - 1210800ee \\ +\ 125409000 + 376227000e + 3762270ee \\ -\ 246423025 - 49284605e - 2464230,25ee \\ +\ 354683070 + 35468307e \end{array}\right\} = G,$$

ou $213489045 + 15734402e + 87239,75ee =$ 2741839, &c.

Donc $15734402e + 87239,75ee = 60694877,25$ ; par conséquent $180,3e + ee = 695,72 = D$, & $\frac{D}{180,3 + e} = e$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Opération.* 180,3 ) | 695,72 ( 3,7 = $e$ | | |
| $+ e =$ 3,7 | 549 | | |
| 1[er] *Diviseur* 183 ) | 146,72 | Premier $r =$ | 10 |
| 2[e] *Diviseur* 184,0 | 128,80 | $+ e =$ | 3,7 |
| | &c. | $r + e =$ | 13,7 = $r$ |

pour une seconde opération qu'il faut faire, comme dans le dernier problême, & ainsi de la troisiéme opération, si l'occasion demande une si grande exactitude ; mais cela doit suffire pour faire voir la méthode de résoudre toute *équation affectée* sans la réduire ; ce qui est non seulement fort exact, mais aussi fort commode pour la pratique, comme on le verra clairement dans le dernier chapitre de cette Partie, au sujet de la *circonférence* & de l'*aire* du *cercle*, &c. où l'on trouvera une méthode plus facile pour la solution numérique des équations élevées, que toutes celles que l'on a publiées jusqu'ici.

# CHAPITRE V.

## *Problêmes, pratiques, ou regles pour trouver les capacités superficielles ou les aires des figures rectilignes.*

AVANT que d'en venir aux problêmes suivans, il est à propos d'avertir les commençans que la surface ou l'aire d'une figure, soit qu'elle soit rectiligne ou circulaire, est composée de quarrés, grands ou petits, selon les différentes mesures dont on se sert pour prendre ou mesurer les dimensions des figures; c'est-à-dire que si l'on prend les dimensions des figures en pouces, l'aire sera composée de *pouces quarrés*; si on les prend en pieds, elle sera composée de *pieds quarrés*; si c'est en toises, ce sera en toises quarrées; si l'on prend les dimensions en *verges*, *perches*, &c. (comme dans l'arpentage des terres, l'aire sera en verges, perches quarrées, &c; cela étant bien compris, avec les définitions du chap. 1, les régles suivantes deviendront fort aisées.

### PROBLEME I.

*Trouver la capacité superficielle ou l'aire d'un quarré, ou d'un parallelogramme rectangle.*

### REGLE.

*Multipliez la longueur par la largeur, & le produit sera l'aire requise.* Voyez le lemme 1. du chap. 3.

### EXEMPLE.

Soit la ligne AB (*fig.* 100) = 6 toises, & la largeur AC ou BD = 3 toises; nous aurons AB × AC = 6 × 3 = 18, nombre des toises quarrées contenues dans l'aire du parallelogramme ABCD: cela est si évi-

dent par la ſeule figure, que la démonſtration eſt inutile.

PROBLEME II.

*Trouver l'aire d'un parallelogramme obliqu'angle, c'eſt-à-dire ou d'un rhombe, ou d'un rhomboïde.*

REGLE.

*Multipliez la longueur par la hauteur perpendiculaire, (ou largeur) & le produit ſera l'aire requiſe.*

C'eſt-à-dire que le côté AB (*fig.* 101) $\times$ BP $=$ aire du rhombe ABCD; car ſi BP eſt perpendiculaire à CD, & AG parallele à BP, on aura GC $=$ PD, & GP $=$ CD; par conſéquent $\triangle$ AGC $=$ $\triangle$ BPD, & $\square$ ABPG $=$ rhombe ABDC: mais AB $\times$ BP $=$ $\square$ ABGP. Donc AB $\times$ BP, ou CD $\times$ BP $=$ l'aire du rhombe ABCD.

EXEMPLE.

Soit le côté AB de 23 pouces, & la perpendiculaire BP $=$ 17,5 pouces (c'eſt la plus courte diſtance entre les deux côtés AB, & CD), nous aurons AB $\times$ BP $= 23 \times 17{,}5 = 402{,}3$ pouces quarrés, aire du rhombe: on fait la même choſe pour tous les rhomboïdes, dont la longueur & la largeur perpendiculaire ſont données.

PROBLEME III.

*Trouver la capacité ſuperficielle, ou l'aire de tout triangle plan; chaque triangle plan eſt égal à la moitié de ſon parallelogramme circonſcrit* (41. E. 1.); *ce qui fournit la regle ſuivante.*

REGLE.

*Multipliez la baſe du triangle donné par la moitié de ſa hauteur perpendiculaire, ou la moitié de la baſe par toute la perpendiculaire, & le produit ſera l'aire.*

C'eſt-à-dire BD $\times \frac{1}{2}$ CP (*fig.* 102) ou $\frac{1}{2}$ BD $\times$ CP $=$ aire du $\triangle$ BCD; car AC $=$ BP, AB $=$ CP, & BC

est commun aux $\triangle\triangle$. Donc $\triangle ABC = \triangle BCP$; & par la même raison $\triangle CFD = \triangle CPD$. Donc $\triangle BCP + \triangle CPD = \frac{1}{2} \square ABDF$; par conséquent $\frac{1}{2} BD \times CP$, ou $BD \times \frac{1}{2} CP$ sera l'aire du $\triangle BCD$.

### *Exemple.*

Soit la base $BD = 32$ pouces, & la hauteur perpendiculaire $CP = 14$ pouces, on aura $\frac{1}{2} BD \times CP = 16 \times 14 = 224$, ou $BD \times \frac{1}{2} CP = 32 \times 7 = 224$; ou bien $32 \times 14 = 448$ & 2 ) 448 ( 224 = aire du triangle BCD en pouces quarrés.

## PROBLEME IV.

*Trouver la surface ou l'aire d'un trapeze.*

1°. Divisez le trapeze donné en deux triangles, en menant une diagonale de l'un de ses angles aigus à l'angle opposé, & abaissez sur la diagonale deux perpendiculaires (des deux autres angles), comme dans la *fig.* 103.

### Regle.

2°. *Multipliez la moitié de la diagonale par la somme des deux perpendiculaires, ou la demi-somme des perpendiculaires par la diagonale, & le produit sera l'aire requise.*

C'est-à-dire $\frac{1}{2} AC$ (*fig.* 103) $\times \overline{BP + ED}$, ou $AC \times \overline{\frac{1}{2} BP + \frac{1}{2} ED}$ = aire du trapeze ABCD; car le $\triangle$ ABC est la moitié de son parallelogramme circonscrit, & le $\triangle$ ACD est aussi la moitié de son parallelogramme circonscrit, comme on l'a prouvé dans le dernier problême; par conséquent $\overline{BP + ED} \times \frac{1}{2} AC$, ou $\overline{\frac{1}{2} BP + \frac{1}{2} ED} \times AC$ sera l'aire du trapeze, comme auparavant.

### *Exemple.*

Soit la diagonale $AC = 33$ pieds, la perpendiculaire $BP = 15$ pieds, & la perpendiculaire $ED = 14$ pieds; ensuite $BP + ED = 29$ pieds, & $\overline{BP + ED} \times \frac{1}{2} AC$

$= 29 \times 16,5 = 478,5$, ou $AC \times \overline{\frac{1}{2} BP + \frac{1}{2} ED} = 33 \times \frac{29}{2} = 478,5$, ou bien $29 \times 33 = 957$, & 2) 957 ( 478,5, chacun de ces produits sera l'aire du trapeze A B C D.

PROBLEME V.

*Pour trouver la capacité superficielle ou l'aire d'un poligone irrégulier, ou figure de plusieurs côtés, il faut la diviser en triangles* ( fig. 104 ) A B C D F G, *par laquelle il est évident que la somme des aires de tous ces triangles, trouvées comme dans le dernier problême, &c. sera l'aire de leur poligone circonscrit.*

PROBLEME VI.

*Trouver l'aire ou la surface d'un poligone régulier, comme pentagone, hexagone, heptagone, octogone, &c.*

REGLE GENERALE.

*Multipliez la moitié de la somme de ses côtés par le rayon du cercle inscrit, ou la moitié de ce rayon par la somme des côtés, & le produit sera l'aire requise.*

C'est-à-dire $\frac{AB + BD + DE + EF + FG + GH + HK + KA}{2} \times CP$ (*fig.* 105) = aire de l'octogone ci-joint, où l'on voit évidemment que son aire est composée d'autant de triangles isoscelles égaux qu'il y a de côtés dans le poligone, c'est-à-dire ici de huit triangles isoscelles, dont les bases sont les côtés de l'octogone; sçavoir $AB = BD = DE$, &c. & les côtés de ces triangles C A, CB, CD, &c. sont les rayons du cercle circonscrit, & leurs hauteurs perpendiculaires, comme C P, sont les rayons du cercle inscrit.

Mais l'aire de chacun de ces triangles est $\frac{1}{2} AB \times CP$ ( par le problême 3 ). Donc la somme de toutes les aires sera le produit de C P par la moitié de la somme de toutes les bases, comme ci-devant.

Cela étant également évident dans tous les poligones

réguliers quelconques, rend la régle générale pour trouver leurs aires.

Mais comme il eſt queſtion de trouver le rayon du cercle inſcrit dans le poligone, je vais joindre ici (& démontrer) les proportions qui ſe trouvent entre les côtés de pluſieurs poligones réguliers, & les rayons des cercles qui leur ſont inſcrits & circonſcrits; les unes ſerviront à décrire le poligone (s'il en eſt queſtion), & les autres ſerviront à trouver ſon aire.

Et premiérement, celles du triangle équilatéral.

Le côté d'un triangle plan équilatéral eſt au rayon de ſon cercle { circonſcrit, comme 1 : 0,57735027, &c.
inſcrit, comme 1 : 0,28867513, &c.

Et à ſa hauteur perpendicul. :: 1 : 0,86602540, &c.

C'eſt-à-dire { AB : CD :: 1 : 0,57735027
AB : CG :: 1 : 0,28867513
Et AB : AG :: 1 : 0,86602540

### DÉMONSTRATION.

Soit AB (*fig.* 106) = BD = 1; donc BG = GD = 0,5; mais $AB^2 - BG^2 = AG^2$, par le théor. 11, c'eſt-à-dire $1 - 0{,}25 = 0{,}75 = AG^2$, par conſéquent $\sqrt{0{,}75} = 0{,}86602540 = AG$; mais AG : AB :: AB : AH, par le théor. 13, c'eſt-à-dire 0,8660254 : 1 :: 1 : 1,15470054, &c. = AH, & $\frac{1}{2}$ AH = 0,57735027 = AC. De plus AG : DG :: DG : CG, c'eſt-à-dire 0,8660254 : 0,5 :: 0,5 : 0,28867513 = CG. *Q. E. D.*

Maintenant par le moyen de la premiere de ces proportions, il ſera aiſé de réſoudre le problême ſuivant.

### PROBLEME VII.

*Le côté d'un triangle plan équilatéral étant donné, trouver ſon aire.*

### EXEMPLE.

Soit le côté du triangle propoſé ABC de 25 pouces, c'eſt-à-dire AB (*fig.* 107) = BC = CA = 25, nous

aurons

aurons 1 : 0,8660254 :: AB = 25 : 21,650635 = BP; ensuite AP ( $= \frac{1}{2}$ CA ) × BP = aire du △ ABC, par la régle du problême 3, c'est-à-dire 12,5 × 21,650635 = 270,6329, aire en pouces quarrés ; ou bien on peut résoudre autrement ce problême en cette maniere :

Soit $b = AP = \frac{1}{2} AC$ : donc $2b = AB$ ; mais $AB^2 - AP^2 = BP^2$, par le théor. 11, c'est-à-dire $4bb - bb = 3bb = BP^2$. Donc $BP = \sqrt{3bb}$, & $b\sqrt{3bb} = BP \times \frac{1}{2} AC$, ou $\sqrt{3bbbb}$ = aire du triangle.

Secondement, pour le Pentagone.

Le côté d'un pentagone est en proportion au rayon de son cercle { circonscrit, comme 1 : 0,85065080, &c. inscrit, comme 1 : 0,68819096, &c.
Et a sa hauteur perpendiculaire :: 1 : 1,53884176, &c.

C'est-à-dire { AB : AC :: 1 : 0,85065080
AB : CH :: 1 : 0,68819096
AB : AH :: 1 : 1,53884176

DEMONSTRATION.

Soit AB (*fig.* 108) = 1, menez les diagonales AD, AF & DG qui seront égales entr'elles, & vous aurez $AG \times DF + AD \times GF = AF \times GD$, par le théor. 19 ; par conséquent $AG \times DF = AF \times GD - AD \times GF$, c'est-à-dire $AB^2 = AD^2 - AD \times GF = 1$ ; d'où suit $AD = 1,61803398$. Ensuite $AD^2 - DH^2 = AH^2$, par le théor. 11. Mais $DH = \frac{1}{2} AB$ ; donc $\sqrt{AD^2 - \frac{1}{4} AB^2} = AH = 1,53884176$. De plus $AH : AD :: AD : Ax = 2AC$ ; car △ AHD & △ ADx sont semblables. Donc $\frac{AD^2}{AH} = 2AC = 1,70130161$ ; donc $AC = 0,85065080$. Mais $AH - AC = CH = 0,68819096$, &c ; par-là il sera facile de résoudre le problême suivant.

PROBLEME VIII.

*Le côté d'un pentagone régulier étant donné, trouver son aire.*

### EXEMPLE.

Soit le côté donné de 15 pouces de longueur, nous aurons 1 : 1,53884176 :: 15 : 22,0826264, hauteur perpendiculaire, & par la regle générale, $22,0826264 \times \frac{15}{2} = 165,619698$, aire requise.

### Troisiémement, pour l'Octogone.

Le côté d'un octogone régulier est en proportion au rayon de son cercle $\begin{cases} \text{circonscrit} :: 1 : 1,30656296, \&c. \\ \text{inscrit} :: 1 : 1,20710678, \&c. \end{cases}$

C'est-à-dire $\begin{cases} BA : CA :: 1 : 1,30656296 \\ BA : CP :: 1 : 1,20710678. \end{cases}$

### DEMONSTRATION.

Menez la droite DB (*fig.* 109) & du point B, abaissez la perpendiculaire $Bx$ sur le diametre DA, nous aurons $\triangle$ DBA, & $\triangle$ $DxB$ semblables, par les théor. 10 & 12.

Soit $\begin{cases} b = BA = 1, \; x = CA \\ z = DB \;\&\; y = Bx. \end{cases}$

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $2x : b :: z : y$, ou $DA : BA :: DB : Bx$ |
| 1 :: | 2 | $\frac{2xy}{b} = z = DB$ |
| 2 ⊙ 2 | 3 | $\frac{4xxyy}{bb} = zz = DB^2$ |
| Mais | 4 | $4xx - \frac{4xxyy}{bb} = bb$, c'est-à-dire $DA^2 - DB^2 = BA^2$, par le théor. 11. |
| $4 \times bb$ | 5 | $4bbxx - 4xxyy = b^4$ |
| De plus | 6 | $\frac{1}{2}xx = yy$; car $Cx = Bx$, & $Cx^2 + 2Bx^2 = CB^2 = xx$ |
| 5, 6 | 7 | $4bbxx - 2x^4 = b^4$, ou $2x^4 - 4bbxx = -b^4$ |
| 7 ÷ 2 | 8 | $x^4 - 2bbxx = -\frac{b^4}{2}$ |
| 8 C □ | 9 | $x^4 - 2bbxx + b^4 = b^4 - \frac{1}{2}b^4 = \frac{1}{2}b^4$ |

| | | |
|---|---|---|
| 9 ▱ 2 | 10 | $xx - bb = \sqrt{\frac{1}{2} b^4}$ |
| 10 + bb | 11 | $xx = bb + \sqrt{\frac{1}{2} b^4}$ |
| 11 ▱ 2 | 12 | $x = \sqrt{bb + \sqrt{\frac{1}{2} b^4}} = 1,30656296$, &c. $= CA$ |
| ensuite | 13 | $xx - \frac{1}{4} bb = CP^2$ ; car $CH^2 - HP^2 = CP^2$ |
| 13 ▱ 2 | 14 | $\sqrt{xx - \frac{1}{4} bb} = 1,20710678$, &c. $= CP$. |

Par-là on trouvera aisément l'aire d'un octogone.

## PROBLEME IX.

*Le côté d'un Octogone régulier étant donné, trouver son aire.*

### EXEMPLE.

Soit le côté donné de 12 pouces de longueur.

1°. 1 : 1,20710678 :: 12 : 14,48528136 = rayon de son cercle inscrit.

2°. 12 × 4 = 48, moitié de la somme de ses côtés, & 48 × 14,48528136 = 695,2935, aire requise.

Quatriémement, pour un Décagone.

Le côté d'un décagone régulier (c'est-à-dire d'un poligone de dix côtés égaux) est en proportion au rayon de son cercle { circonscrit, comme 1 : 1,61803398, &c. inscrit, comme 1 : 1,53884176, &c.

C'est-à-dire { BA : CA :: 1 : 1,61803398
BA : CP :: 1 : 1,53884176 }

### DEMONSTRATION.

Soit $b$ (*fig.* 110) = BA = 1, $x$ = CA, $z$ = DB, & $y$ = B$x$.

| | | |
|---|---|---|
| Nous aurons | 1 | $2x : b :: z : y$, c'est-à-dire DA : BA :: DB : B$x$ |
| 1 :: | 2 | $2xy = bz$, $2y = \frac{bz}{x}$. |
| Mais | 3 | $2y : z :: 1 : 1,61803398$. Voyez le pentagone. |

| | | |
|---|---|---|
| 3 ∵ | 4 | $\frac{1z}{1,61803398} = 2y = \frac{bz}{x} = \frac{1z}{x}$ |
| 4 ÷ 1z | 5 | $1,61803398 = x = CA$ |
| De plus | 6 | $xx - \frac{1}{4}bb = CP^2$, ou $CF^2 - PF^2 = CP^2$, par le théor. 11. |
| C'est-à-dire | 7 | $\sqrt{2,61803396 - 0,25} = 1,53884176 = CP$. |

PROBLEME X.

*Le côté d'un Décagone régulier étant donné, trouver son aire.*

EXEMPLE.

Soit le côté donné de 14 pouces de long ; dites, comme 1 : 1,53884176 : : 14 : 21,543784 = rayon du cercle inscrit, & 14 × 5 = 70, demi-somme de ses côtés. Enfin 21,543784 × 70 = 1508,06488, aire requise.

Cinquiémement, pour un Dodécagone.

Le côté d'un dodécagone régulier ( ou poligone de douze côtés égaux ) est en proportion au rayon de son cercle { circonscrit : : 1 : 1,93185165, &c. / inscrit : : 1 : 1,86632012, &c.

ou { BA : CA : : 1 : 1,93185165 / BA : CP : : 1 : 1,86632012.

DEMONSTRATION.

Soit $b$ (*fig.* 111) $= BA = 1$, $x = CA$, comme ci-devant, & $z = xA$ ; donc $x - z = Cx$.

| | | |
|---|---|---|
| Nous avons | 1 | $bb - Bx^2 = zz$, par la figure. |
| Mais | 2 | $Bx = \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}x$ |
| 2 ⊙ 2 | 3 | $Bx^2 = \frac{1}{4}xx$ |
| 1, 3 | 4 | $bb - \frac{1}{4}xx = zz$. |
| 4 ▱ 2 | 5 | $\sqrt{bb - \frac{1}{4}xx} = z$. |
| De plus | 6 | $xx - \frac{1}{4}xx = xx - 2xz + zz$, ou $CB^2 - Bx^2 = Cx^2$. |

| | | |
|---|---|---|
| 5 × 2x | 7 | $2x\sqrt{bb-\frac{1}{4}xx}=2zx$ |
| 4 − 7 | 8 | $bb-\frac{1}{4}xx-2x\sqrt{bb-\frac{1}{4}xx}=zz-2zx$ |
| 7 , 8 | 9 | $xx-\frac{1}{4}xx=xx+bb-\frac{1}{4}xx-2x\sqrt{bb-\frac{1}{4}xx}=zz-2xz$ |
| 9 $\pm$ | 10 | $2x\sqrt{bb-\frac{1}{4}xx}=bb$ |
| 10 $\odot$ 2 | 11 | $4xxbb-x^4=b^4$ |
| 11 $\pm$ | 12 | $x^4-4bbxx=-b^4$ |
| 12 C $\square$ | 13 | $x^4-4bbxx+4b^4=3b^4=3$ |
| 1 ▱ 2 | 14 | $xx-2bb=\sqrt{3}=1,7320508075$ |
| 14 + 2bb | 15 | $xx=2bb+\sqrt{3}=3,7320508075$ |
| 15 ▱ 2 | 16 | $x=\sqrt{3,7320508075}=1,93185165=CA$. |
| De plus | 17 | $xx-\frac{1}{4}bb=CP^2$ ; car $CF^2-PF^2=CP^2$ |
| 17 ; donc | 18 | $CP=\sqrt{xx-\frac{1}{4}bb}=1,86632012$. Q. E. D. |

## COROLLAIRE.

Donc si le côté d'un Dodécagone régulier est donné, on trouvera aisément le rayon de son cercle inscrit, & par conséquent son aire, comme dans le dernier problême.

L'opération des poligones précédens étant bien comprise, conduira le jeune Géometre à la découverte des proportions semblables pour les autres, s'il en est curieux ; elle l'aidera même à se former une vraie idée de la *circonférence* du *cercle* & de son *aire*, conformément à la méthode que je vais donner dans le chapitre suivant, pour trouver l'une & l'autre.

# CHAPITRE VI.

*Méthode nouvelle & aisée pour trouver la circonférence du cercle & son aire dans toute l'exactitude (ou nombre de figures) qui sera requise ; avec une méthode nouvelle & facile de calculer les Sinus naturels & les Tangentes.*

NOUS supposerons (ce qui se conçoit aisément) que l'aire du cercle est composée d'un très-grand nombre de triangles plans isosceles, dont les angles les plus aigus se rencontrent tous au centre du cercle. Imaginons aussi que les bases de ces triangles sont si petites, que leurs côtés & leurs hauteurs perpendiculaires, qui sont les rayons des cercles circonscrits & inscrits (voyez le problême 6.) s'approchent si fort en longueur les uns des autres, que l'on peut prendre les uns pour les autres sans aucune erreur sensible ; par conséquent les circonférences des cercles circonscrits & inscrits deviendront (sans se confondre entiérement l'une avec l'autre) si proches l'une de l'autre, qu'on pourra prendre l'une ou l'autre indifféremment pour un seul & même cercle.

Mais de trouver les côtés de ce poligone (ou les bases de ces triangles isosceles) d'une petitesse aussi grande qu'il est nécessaire pour déterminer & fixer la proportion entre le diametre du cercle & sa circonférence (dans toute l'exactitude que l'on peut exiger), ç'a été jusqu'à présent un ouvrage qui a demandé beaucoup de soin & beaucoup de tems pour en venir à bout, comme on peut en juger aisément par la nature des méthodes qu'ont employé tous ceux qui ont poussé fort loin cette opération, comme *Archimede*, *Snellius*, *Hughens*, *Metius*, *Van Culen*, *&c.* ils se sont attachés à diviser également un arc, & à trouver la valeur de sa corde jusqu'à un nombre

convenable de figures dans chaque bisection, répétant leurs opérations, jusqu'à ce qu'ils ayent approché de la corde déterminée.

C'est la méthode que l'illustre *Wallis* a choisi dans son Traité d'*Algebre*, où après nous avoir donné un grand détail des différents que plusieurs (très-habiles Mathématiciens) ont faits pour trouver des méthodes plus aisées & plus expéditives pour approcher de la circonférences du cercle, comme dans les chap. 82, 84, 85, 86, & en plusieurs autres endroits; il en vient à ce résultat (page 360).

» Il est vrai, dit-il, que l'on pourroit opérer de même » par une continuelle trisection, quinquisection, ou » autre section, si l'on avoit pour ces sections des mé» thodes aussi commodes que celles que l'on a pour la » bisection : mais comme *Euclide* nous apprend à diviser » géométriquement un arc en deux parties égales, mais » non pas en trois, &c. & qu'on peut y parvenir (algé» briquement) par la solution d'une équation quadrati» que, au lieu que les autres sections ne peuvent se » trouver que par des équations plus composées; c'est » pour cela que je choisis la bisection continuelle, &c. Ensuite il donne les regles suivantes.

| | | |
|---|---|---|
| La sous-tendante de $\frac{1}{6}$ | $1$ | par 6 |
| de $\frac{1}{12}$ | $\sqrt{:2-\sqrt{3}}$ | par 12 |
| de $\frac{1}{24}$ | $\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{3}}}$ | par 24 |
| de $\frac{1}{48}$ | $\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{3}}}}$ | par 48 |
| de $\frac{1}{96}$ | $\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{3}}}}}$ | par 96 |
| *&c.* | $\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{3}}}}}}$ | 102 |
| | $\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{3}}}}}}}$ | 384 |
| | $\sqrt{:2-\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{:2+\sqrt{3}}}}}}}}$ | 768 |

*&c.*

Je laisse à penser à ceux qui ont fait l'expérience de ce calcul, ou qui par curiosité voudront se donner la peine

de l'éprouver, combien l'opération de ces extractions compliquées est ennuyeuse & pénible.

Outre cela, dans la page 389, le Docteur *Wallis* donne une méthode proposée par *Leibnitz*, & publiée dans les *Actes* de *Leipsick* du mois de Février 1682, pour trouver l'*aire* du *cercle*, & par conséquent sa *circonférence*, qui est celle-ci : Comme 1 est à $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19}$, &c. à l'infini. Ainsi le quarré du diametre est à l'aire du cercle ; mais cette suite est si peu convergente, qu'elle ne mérite pas qu'on perde le tems à en faire le calcul.

Je vais proposer ici une nouvelle méthode de mon invention, par laquelle on peut s'approcher à l'infini de la circonférence du cercle, & par conséquent de son aire, avec beaucoup plus de facilité & de promptitude que par celle de la Bisection ou celle de *Leibnitz*, ou par aucune autre de celles que j'ai vu jusqu'à présent, celle-ci ne consistant que dans la résolution d'une seule équation, laquelle se tire aisément de la propriété du cercle (connue de tout le monde), qui est celle qui suit.

Le rayon de chaque cercle est égal à la corde de la sixiéme partie de sa circonférence ; c'est-à-dire $AD = DH = HG$, cordes du tiers du demi-cercle, sont chacune égales au rayon $AF$. Ensuite si l'on divise en trois parties égales l'arc $AD$, on aura $AB = BZ = ZD$. Soit $R = AF = 1$, $c = AD = 1$, $x = AB$ ; on demande $x$.

| | | |
|---|---|---|
| Nous avons | 1 | $R : x :: x \frac{xx}{R} = Be$ (*fig.* 112). |
| Et | 2 | $R : x :: R - \frac{xx}{R} : c - 2x$; |
| c'est-à-dire car | 3 | $FB : BZ :: Fe ; ex = AD - 2x$ ; △ $AFB$, & △ $BAe$ sont semblables, & $AB = Ae = Dx$ |
| 2 ∵ | 4 | $Rc - 2Rx = Rx - \frac{x^3}{R}$ |
| 4 × &c. | 5 | $3R^2x - x^3 = RRC$, c'est-à-dire $3x - x^3 = 1$. |

Ici $x$ = corde de $\frac{1}{18}$, partie du cercle ; car $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

Ensuite pour diviser en trois parties égales l'arc A B,

| | | |
|---|---|---|
| soit | 1 | $3y - y^3 = x$, derniere corde. |
| 1 ⊙ 3 | 2 | $27y^3 - 27y^5 + 9y^7 - y^9 = x^3$ |
| 1 × $\bar{3}$ | 3 | $9y - 3y^3 = 3x$ |
| 3 — 2 | 4 | $9y - 30y^3 + 27y^5 - 9y^7 + y^9 = 3x - x^3 = 1$. |

Ici $y$ = la corde de $\frac{1}{54}$, partie du cercle.

De plus pour diviser en trois l'arc, dont $y$ est la corde,

| | | |
|---|---|---|
| soit | 1 | $3x - x^3 = y$ |
| 1 ⊙ 3 | 2 | $27x^3 - 27x^5 + 9x^7 - x^9 = y^3$ |
| 1 ⊙ 5 | 3 | $243x^5 - 405x^7 + 270x^9 - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15} = y^5$ |
| 1 ⊙ 7 | 4 | $2187x^7 - 5103x^9 + 5103x^{11} - 2835x^{13} + 945x^{15} = y^7$ |
| 1 ⊙ 9 | 5 | $19683x^9 - 59049x^{11} + 78732x^{13} - 61236x^{15} = y^9$ |
| 1 × $\bar{9}$ | 6 | $27x - 9x^3 = 9y$ |
| 2 × $\overline{30}$ | 7 | $910x^3 - 810x^5 + 270x^7 - 30x^9 = 30y^3$ |
| 3 × $\overline{27}$ | 8 | $6561x^5 - 10935x^7 + 7290x^9 - 2430x^{11} + 405x^{13} + 27x^{15} = 27y^5$ |
| 4 × $\bar{9}$ | 9 | $19683x^7 - 45927x^9 + 45927x^{11} - 25515x^{13} + 8505x^{15} = 9y^7$ |
| 6 — 7 + 8 — 9 + 5 | 10 | $27x - 819x^3 + 7371x^5 - 30888x^7 + 72930x^9 - 107406x^{11} + 104652x^{13} - 69768x^{15} = 1$. |

Ici $x$ = la corde de $\frac{1}{162}$, partie du cercle.

En continuant par cette méthode à diviser en trois l'arc de chaque nouvelle corde, & réunissant toujours les équations à une seule, comme dans les deux dernieres trisections, il ne sera pas difficile d'avoir la cordede tout arc déterminé, quelque petit qu'il soit.

Mais pour faciliter l'opération de pousser ces *équations*

à un degré fort élevé, il eſt à propos de joindre ici quelques obſervations ſur leur nature & ſur les méthodes abrégées dont on peut ſe ſervir avec ſureté. Si on les entend bien, l'opération en deviendra fort aiſée.

1°. J'ai obſervé que chaque triſection ne gagne qu'une figure, ou n'avance que d'une figure dans la circonférence du cercle ; par conſéquent il faudra répéter autant de triſections que l'on voudra avoir de figures exactes dans l'expreſſion de la circonférence, ce qui donnera une équation pour avoir la corde qui répond à ce deſſein.

2°. J'ai auſſi trouvé que toutes les puiſſances ſupérieures ( de $x$ ) dont les expoſans ſont plus grands que le nombre des triſections ( ou dont les expoſans ſont plus grands que le nombre des figures que l'on veut avoir ) peuvent être entiérement rejettées comme de nulle valeur.

3°. Lorſqu'on a une fois déterminé le nombre des triſections, & par conſéquent la plus haute puiſſance ( de $x$ ), on peut prendre la troiſiéme triſection comme une régle fixe & conſtante ; car par ſon moyen, & par la ſeule Multiplication, on peut achever toutes les triſections ſuivantes ( quelques nombreuſes qu'elles ſoyent) ſans répéter les différentes involutions.

4°. En élevant & ajoutant les coefficients des différentes puiſſances ( de $x$ ), il ſuffit de retenir autant de figures ſignificatives ( devant $x^3$ ) que l'on a déterminé de figures dans la circonférence ( ou tout au plus encore deux, & à toutes les puiſſances ſupérieures ſuivantes, il faut diminuer de deux figures ſignificatives ; mais il faut bien obſerver de ſuppléer par des zero aux places vacantes, ou aux figures omiſes, autrement toute l'opération ſeroit erronée.

Mais il convient de marquer le nombre de ces zero qui tiennent la place des figures omiſes, par des figures enfermées entre deux parentheſes, en cette maniere : 576 ( 8 ) $x^3$ peut ſignifier $576000000000x^3$, comme on verra dans les *équations* ſuivantes : on fera la même

chose pour les fractions décimales, en cette maniere : (,7) 658, signifiera ,000000658, &c. ce que l'on trouvera très-utile dans la solution de ces équations, & des autres semblables.

On peut, sans rien craindre, se servir des abrégés précédens, parce que toutes les puissances supérieures de $x$, qui doivent être rejettées, aussi-bien que les nombres que l'on néglige dans les coefficients ( & dont on remplit la place par des zero ) produiroient des figures si éloignées de l'unité, qu'elles ne pourroient faire aucun changement dans la corde proposée, c'est-à-dire qu'elles n'affecteroient pas la corde dans la place où l'on a dessein de terminer le nombre des figures de la circonférence, comme on le verra en partie dans l'exemple suivant.

Si l'on comprend bien toutes ces regles, on trouvera qu'il est aisé de former une équation qui produise le côté d'un poligone régulier, dont le nombre des côtés soit aussi grand que l'on voudra, & qui soit par conséquent un côté presque infiniment petit ; mais je crois qu'il suffit dans un exemple de chercher le côté d'un poligone qui en ait 25828026 égaux, c'est-à-dire la corde de $\frac{1}{25828026}$, partie de la circonférence du cercle, ce qui ne demande que seize trisections, lesquelles étant faites par la méthode précédente, donneront cette équation.

$$43046721x - 3323601794869686 12(4)x^3$$
$$+ 7698376531997 14(20)x^5 - 84912185328 41(35)x^7$$
$$+ 5463333 1143(50)x^9 - 230083348(66)x^{11}$$
$$+ 6830988(78)x^{13} - 15072(94)x^{15} = 1.$$

Ici la valeur de $x$ doit avoir 23 figures vraies, c'est-à-dire que les côtés des poligones inscrits & circonscrits doivent être exactement les mêmes jusqu'à la 23^e^ place des fractions décimales, & non au delà ; ce qui se trouvera aisément par deux opérations. Et pour la premiere, il suffira de prendre seulement trois termes de l'équation, ce qui donnera le moyen de l'abréger encore plus, en cette maniere :

Soit $\left\{ \begin{array}{l} 43046721x - 33236017 94(12)x^3 \\ + 76983765(27)x^5 \end{array} \right\} = 1.$

Et soit $r + e = x$; ensuite rejettant toutes les puissances de $e$ qui viendront par involution au dessus de $eee$, nous aurons $r^3 + 3rre + 3ree + eee = x^3$, & $r^5 + 5r^4e + 10r^3ee + 10rreee = x^5$; après quoi la premiere valeur simple de $r$ peut se trouver en cette maniere :

$43046721)1,00000000(,00000002 = r$, $ee$,00000002 $= r$ étant substitué avec ses coefficients respectifs, produira

$+,86093441 + 43046721e$
$-,02658881 - 3988322e - 199416(9)ee - 3324(18)eee$
$+,00024635 + 61587e + 6159(9)ee + 308(18)eee = 1,$

ou,$83459196 + 39119986e - 193257(9)ee - 3016(18)eee = 1$. Donc $39119986e - 193257(9)ee - 3016(18)eee = 0,16540804$.

Tous les termes de cette derniere *équation* étant divisés par 193257 (9), coefficient de $ee$, elle deviendra

$,0000002024e - ee - 156(5)eee$
$= ,0000000000000008558968 = D$; par conséquent

$$\frac{D + 156(5)eee}{,0000002024 - e} = e.$$

*Opération.*

$,0000002024)\ ,0000000000000008558968\ (,000000004 = e$
$-e = ,0000000043 + ,0000000000000000009984 = 156(5)eee$

1. Di. $,000000198)\ ,0000000000000008568952\ [,000000004327$
2. Di. $,0000001981$

792
6489
5943
5465
3962
&c.

Premier $r = ,00000002$
$+ e = ,000000004327$

$x = r + e = ,000000024327$ Ou plutôt nouveau $r$ pour une seconde opération.

Maintenant si cette 1[e] valeur de $x = ,000000024327$ ne devoit pas être continuée à un plus grand nombre de figures par une seconde opération, mais seulement multipliée par le nombre des cordes, on auroit $000000024327 \times 258280326 = 6,28318539$, &c. circonférence du cercle, dont le diametre est 2, plus approchante que la proportion d'*Archimede* ou de *Metius*; car *Archimede* la trouve, 6,285714, en prenant la proportion de 7 à 22, & *Metius* la fait de 6,28318584, &c. c'est-à-dire comme 113 à 355.

Mais si l'on prend maintenant toute l'équation proposée ci-devant, & si l'on en vient à une seconde opération, on augmentera la valeur de $x$ de douze figures, & on les aura par la seule Division simple.

Soit donc $r + e = x$, comme auparavant, & soient maintenant rejettées toutes les puissances de $e$ comme de nulle valeur;

$$\text{on aura} \left\{ \begin{array}{l} r + e = x \\ r^3 + 3r^2e = x^3 \\ r^5 + 5r^4e = x^5 \\ r^7 + 7r^6e = x^7 \end{array} \right\} \text{Et} \left\{ \begin{array}{l} r^9 + 9r^8e = x^9 \\ r^{11} + 11r^{10}e = x^{11} \\ r^{13} + 13r^{12}e = x^{13} \\ r^{15} + 15r^{14}e = x^{15} \end{array} \right.$$

Les différentes puissances de $r = ,000000024327$ étant formées & multipliées par leurs coefficients respectifs, produiront les nombres suivans.

$$\left. \begin{array}{lrlr} + & 1,047197581767 & + & 43046721e \\ - & ,047849196598394865 & - & 5900751e \\ + & ,000655906484595355 & + & 134810e \\ - & ,000004281440413375 & - & 1232e \\ + & ,000000016302517863 & + & 6e \\ - & ,000000000040631167 & - & 0e \\ + & ,000000000000071388 & + & 0e \\ - & ,000000000000000093 & - & 0e \end{array} \right\} = 1.$$

$$\text{ou } 1,000000026474745106 + 37279554e = 1.$$

$$\text{Donc } 37279554e = -,000000026474745106 = D,$$

ou plutôt $-37279554e = ,00000002647474 5106 = D$.

Donc $\frac{D}{37279554} = -e$.

*Opération.*

37279554 ) ,00000002647474 5106 ) ( ,15 ) 710167967 = − e
260956878

37905730
37279554

62617660
37279554

&c.

Le dernier $r = ,000000024327$
$-e = ,000000000000000710167967$

$r - e = ,0000000243269992898321 33 = x$, corde ou côté du poligone requis.

Voici une opération pour examiner combien il doit y avoir de figures vraies dans la circonférence du cercle. Pour cela soit $x$ représenté par la corde B$b$ (*fig.* 113), & B = F$b$. Nous aurons $BF = \frac{1}{2}x = (,7)\ 1216349964491601 65$, & $BC^2 - BF^2 = CF^2$, soit le rayon $BC = 1$, comme auparavant.

Donc $\sqrt{BC^2 - BF^2} = CF = ,9999999999999999$, &c. Mais CF : BF : : CA : AB par la *fig*. Ou CF : B$b$ :: CA : D$d$. Donc D$d$ = ( ,7 ) 243269992898326354, côté du *poligone circonscrit*, & $x \times 258280326$ sera la circonférence du *poligone inscrit*; D$d \times 258280326$ celle du *poligone circonscrit*, c'est-à-dire 6,28318530717958 59 = circonférence du poligone inscrit.

Et 6,283185307179586 5 = celle du poligone circonscrit.

On voit par-là clairement que la circonférence du cercle, dont le diametre est 2 est 6,283185307179586 4 vraie, parce que les circonférences des poligones inscrit & circonscrit, approchent si fort l'une de l'autre qu'elles se confondent, ou sont la même.

Peut-être que quelqu'un trouvera cette opération ennuyeuse & pénible ; mais on n'a qu'à faire attention que s'il falloit trouver cette circonférence par la méthode précédente de bisection, il faudroit faire les extractions suivantes.

$\sqrt{}: 2 - \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 3$, multipliée par 402809984

Ici la premiere racine, qui est $\sqrt{3}$, doit être extraite au moins jusqu'à cent & deux figures ; la seconde racine, qui est ( $\sqrt{}: 2 + \sqrt{3}$ ), doit avoir *99* figures ; la troisiéme ( $\sqrt{}: 2 + \sqrt{}: 2 + \sqrt{3}$ ) en doit avoir *96*, &c. chaque extraction diminuant de trois figures, afin que la derniere racine ( qui est la corde requise ) ait 24 figures, comme ci-devant.

Or je crois que quiconque fera réflexion à la difficulté de ces *extractions*, si souvent répétées, trouvera ma méthode fort utile. Pour moi lorsque je fais attention au tems immense qu'il a fallu employer pour un si grand travail, je ne puis qu'admirer la patience de l'infatigable *Van Culen*, qui continua toutes ces extractions jusqu'à ce qu'il eût trouvé *36* figures dans la circonférence du cercle, qui sont *6,28318530717958647692528676655900576*.

On dit que ces nombres ont été gravés sur son tombeau dans l'Eglise de S. Pierre à Leide, pour perpétuer la mémoire d'un si grand travail.

Lorsqu'on a ainsi trouvé la *circonférence du cercle*, on trouve aisément son *aire* ( avec le même nombre de figures ) par le problême *6*. C'est-à-dire que si l'on multiplie la demi-circonférence d'un cercle par son demi-diametre, le produit en sera l'aire, comme on le verra mieux dans la suite ; par conséquent 3,141592653589793 sera l'aire du cercle, dont le diametre est 2.

C'est donc ainsi que j'ai appris au jeune Géometre à

trouver la *circonférence* & l'*aire* du *cercle* avec toute l'exactitude dont il voudra s'approcher, car il ne peut pas la trouver parfaitement exacte, malgré les prétentions d'un François, qui (dans le Journal des Sçavans) a publié qu'après vingt-cinq ans d'études il a trouvé la *quadrature* du *cercle*; mais s'il avoit lu le chapitre 83 de l'Algébre de Wallis, il auroit reconnu son erreur, ou l'impossibilité de sa prétention; car il est aussi impossible de quarrer le *cercle* (c'est-à-dire de trouver son aire véritable) que de trouver la *racine* d'un *nombre sourd*.

*Nota*. Ce que j'ai proposé ici, & exécuté par la trisection d'un arc, peut se faire aussi aisément & beaucoup plus promptement par la quinquisection ou septisection, &c. Mais comme la figure pour la trisection est plus simple & plus aisée à comprendre que celles des autres sections (surquoi voyez mon *Abrégé d'Algébre*, p. 76 & 79) j'ai préféré la trisection aux autres.

Pour ce qui est de la proportion des cercles entr'eux, & avec l'ellipse, &c. j'en traiterai à fonds dans la cinquiéme Partie.

Avant que de finir cette Partie, je vais faire usage de la *circonférence* ci-devant trouvée, pour avoir la quantité des angles; ce qui se fait par le moyen des lignes droites, que l'on nomme *sinus* & *tangentes*, & dont on a calculé la longueur par un travail immense pour chaque degré & minute du quart de cercle. Je vais donc faire voir comment on peut trouver le sinus naturel (& par conséquent la tangente naturelle) d'un arc ou angle proposé, par le moyen de deux équations, sans le secours d'aucun sinus précédent, comme on le pratique ordinairement; ce que j'ai communiqué il y a quelques années à M. *Joseph Raphson* qui l'a approuvé, jusqu'au point d'en former le 20 & 21$^{e}$ problêmes dans la seconde édition de son *Analyse universelle des Équations*.

Et comme pour trouver la *quantité* des *angles*, on suppose chaque cercle divisé en 360 parties égales, qu'on nomme *degrés*, chaque degré en 60 parties, qu'on nomme

nomme *minutes*, chaque minute en 60 *secondes*, &c.

Il faut donc 360 ) 6,2831853, &c. ( 0,0174532925, &c. arc de la circonférence égal à un degré, & 60 ) 0,0174532925, &c. ( 0,0002908882, &c. = arc d'une minute.

Ensuite si l'arc ( ou angle ) donné est moindre que 45 degré, il faut le réduire en minutes, & multiplier ces minutes par ce multiplicateur constant, 0,0002908882, nommant $p$ le produit, & soit $x$ le sinus requis, on aura $-x^4 + 12px^3 - 195xx - 36ppxx + 240px = 45pp$.

### EXEMPLE.

On veut trouver le sinus de 19°, 13′ = 1153′. Nous avons 0,0002908882 × 1153 = 0,3353940946 = $p$. Et $-x^4 + 4{,}024729x^3 - 199{,}049611xx + 80{,}494583x = 5{,}06201394$.

Soit $r + e = x$, on aura $rr + 2re + ee = x$, $r^3 + 3rre + 3ree = x^3$ $r^4 + 4rrre + 6rree = x^4$.

*Nota.* En ce cas le premier $r$ peut toujours être pris égal à la premiere figure dans le produit $= p$. Par exemple, ici $r = 0{,}3$, qui étant substitué, & ses puissances multipliées par les coefficients respectifs de l'équation, on

$$\text{aura}\left\{\begin{array}{llll} +\ 24{,}1483 & +\ 80{,}49e & & \\ -\ 17{,}9144 & -\ 119{,}43e & -\ 190{,}05ee & \\ +\ 0{,}1080 & +\ 1{,}08e & +\ 3{,}62ee & \\ -\ 0{,}0081 & -\ 0{,}11e & -\ 0{,}54ee & \end{array}\right\} = 5{,}06201394$$

$$\text{ou}\quad 6{,}3344 - 37{,}97e - 195{,}97ee = 5{,}06201.$$

Donc $37{,}97e + 195{,}97ee = 1{,}27239$.

Et $0{,}193e + ee = 0{,}006492 = D$.

Théorême $\dfrac{D}{193 + e} = e$.

*Opération.* 0,193 ) 0,006492 ( 0,029 = $e$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $+e =$ | ,029 | 42 | Premier $r = 0{,}3$ |
| 1<sup></sup>er *Diviseur* | ,21 | 2292 | $+e = 0{,}029$ |
| 2e *Diviseur* | ,222 | 1098 | $r + e = 0{,}329 = r$ |

pour une seconde opération, lequel étant substitué, multiplié, &c. comme auparavant, produira ces nombres:

$$+26{,}48271781+80{,}49458e$$
$$-21{,}54532894-130{,}97464e-199{,}0496ee$$
$$+0{,}14332578+1{,}30692e+3{,}9724ee$$
$$-0{,}01171611-0{,}14244e-0{,}6494ee,$$

ou $5{,}06899854-49{,}31558e-195{,}7266ee=5{,}06201394$.

Donc $49{,}31558e+195{,}7266ee=,0069846$, qui étant divisé par $195{,}7266$, coefficient de $ee$, donne $25196e+ee=,000035 6854=D$.

Donc $\frac{D}{,25196+e}=e$.

*Opération.* 0,25196 ) ,0000356854 ( 0,0001415 = e

+ e = 0,00014     2520

1. *Divis.* = 0,2520     104854

2. *Divis.* = 0,25210     100840

40140

25210

*&c.*

Le dernier $r=0{,}329$

$+e=0{,}0001415$

$r+e=x=0{,}3291415$, sinus naturel de 19°. 13' requis.

On peut trouver ainsi le sinus droit de tout arc ou angle moindre que 45 degrés; mais si l'arc donné est plus grand que 45°, il faut prendre son complément à 90°, c'est-à-dire l'ôter de 90 degrés, & réduire le reste en minutes, comme auparavant.

Ensuite on multipliera le quarré de ces minutes par ce multiplicateur constant, 0,000000084616, nommant leur produit $p$, & prenant $x$ pour le sinus requis, comme auparavant, & on aura $x^4+28x^3+195xx+36pxx+108px-28x=196-81p$.

### EXEMPLE.

On demande le ſinus de 75°. 32′ (ou ce qui revient au même) le coſinus de 14°. 28′ = 868′, dont le quarré 753424 × 0,0000000084616 = 0,063751172518 = $p$; ainſi l'équation en nombres ſera

$$x^4 + 28x^3 + 197,295062x^2 - 21,114814x = 190,836110 2588.$$

Soit $r - e = x$, & $r = 1$.

$$\text{Nous aurons} \begin{cases} rr - 2re + ee = xx \\ r^3 - 3rre + 3ree = x^3 \\ r^4 - 4r^3e + 6rree = x^4. \end{cases}$$

*Nota.* Je prends ici $r = 1$, parce que l'arc approche de 9°, & c'eſt pour cela que je fais $r - e = x$.

$$\text{Enſuite} \begin{Bmatrix} - 21,1148 + 21,11e \\ + 197,2956 - 394,59e + 197,29ee \\ + 28,0000 - 84,00e + 84,00ee \\ + 1,0000 - 4,00e + 6,00ee \end{Bmatrix} = 190,8361$$

C'eſt-à-dire $205,1808 - 461,48e + 287,29ee = 190,8361.$

Donc $461,48e - 287,29ee = 14,3447.$

Et $1,606e - ee = ,049930 = D.$

Théorême $\dfrac{D}{1,606 - e} = e.$

*Opération.* 1,606 ) ,049930 ( 0,031 = $e$.
— $e$ = ,031 471

| | | |
|---|---|---|
| 1er *Diviſeur* | 1,57 | 2830 |
| 2. *Diviſeur* | 1,575 | 1575 |
| | | &c. |

Premier $r = 1,000$
$-e = 0,031$

$r - e = 0,969 = r$ pour la ſeconde opération qui donne les nombres ſuivans :

$$
\begin{array}{l}
-\ 20,460254766+21,11481e \\
+185,252368710-382,35783e+197,2951ee \\
+\ 25,475889852-\ 78,87272e+\ 81,5960ee \\
+\ \ 0,881647759-\ \ 3,63941e+\ \ 5,6337ee \\
\hline
\end{array}
$$

ou $191,149651515-443,75515e+284,5248ee=190,836110259$.

Donc $443,75515e-284,5248ee=0,313541256$.

Et $1,55963e-ee=,0011019821=D$.

Donc $\dfrac{D}{1,55963-e}=e$.

| | | |
|---|---|---|
| *Opération.* | 1,55963 ) | 0,0011019821 ( 0,0007068 |
| $-e=$ | ,00070 | 109123 |
| 1. *Diviſeur* | 1,5589 | 1075210 |
| 2. *Diviſeur* | 1,55893 | 935358 |
| | | 1398520 |
| | | 1247144 |
| | | &c. |

Le dernier $r=0,969$
$-e=0,0007068$

$r-e=x=0,9682932$, ſinus de $75^{\circ}.32''$ requis.

Ayant trouvé le *ſinus* & le *coſinus* d'un *arc*, on trouve ordinairement ſa tangente par cette proportion :

Comme le coſinus d'un arc eſt au ſinus de cet arc, ainſi le rayon eſt à la tangente du même arc.

Car ſuppoſant B C (*fig.* 114) = B D le rayon, A C le ſinus de l'arc D C, A B ſera le coſinus, & F D la tangente du même arc ; mais B A : C A : : B D : F D, &c.

Cette proportion ſuppoſe que le ſinus & le coſinus de l'arc ſoyent donnés pour trouver la tangente.

Il eſt vrai que ſi le rayon & le ſinus, ou le coſinus, l'un des deux eſt donné, on trouvera l'autre en cette maniere : $\sqrt{BC^2-CA^2}=BA$, ou $\sqrt{BC^2-BA^2}=CA$. Mais ſi l'un des deux eſt donné, on trouvera plus aiſément la tangente par les théorêmes ſuivans.

Soit $BC = 1$, $CA = S$, $BA = x$, & $FD = T$. Si S est donné, on trouvera T par ce Théorême $\sqrt{\frac{SS}{1 - SS}} = T$, ou si $x$ est donné, on trouvera T par ce Théorême $\sqrt{\frac{xx}{1 - xx}} = T$.

Soit donné le sinus de 19°. 13′ (trouvé ci-devant) $= 0,3291415 = S$; on trouvera la tangente du même arc, en faisant

1°. $0,3291415 \times ,3291415 = 0,108334127 = SS$.

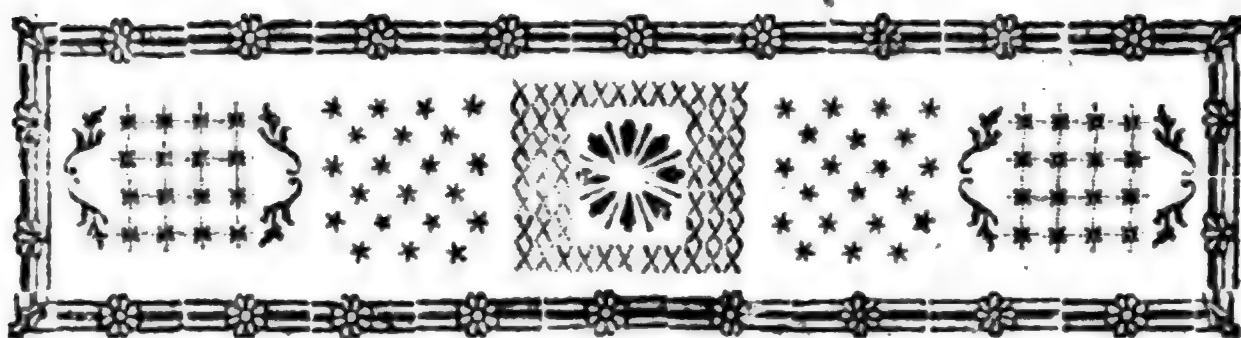
2°. $1 - 0,108334127 = 0,891665873 = 1 - SS$; ensuite $0,891665873$ ) $0,108334127$ ( $0,121496325$, $\sqrt{0,121496325} = 0,348563 2 = T$ tangente requise de 19°. 13′.

Et l'on opérera de même pour trouver $T =$ la tangente losque $x =$ cosinus est donné.

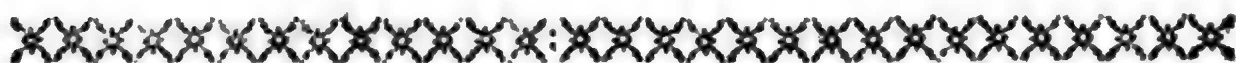
On s'attend peut-être que je démontre (ou au moins que j'insinue ici) les proportions qui ont produit les équations précédentes des sinus; mais je les renvoie (aussi bien que leur usage pour calculer les *côtés* & les *angles* des triangles plans sans le secours des Tables) à un autre Traité que je donnerai au Public, si le tems & la santé me le permettent.

Ce que j'ai fait ici suffit pour faire voir que le calcul des sinus, par des routes aussi longues & pénibles que celles qu'on a employées jusqu'ici, est tout-à-fait excessif, & que je puis, avec justice, m'attribuer celui-ci.

*Fin de la troisiéme Partie.*



# LE GUIDE
## DES JEUNES
## MATHÉMATICIENS.



## QUATRIEME PARTIE.

## CHAPITRE PREMIER.
### *Définitions du Cone & de ses Sections.*

On a donné plusieurs définitions du *cone* ; le sçavant Docteur *Barrow* sur *Euclide*, donne celle-ci :

» Le cone ( dit-il ) est une figure qui se forme lors-
» qu'un côté d'un triangle rectangle ( c'est-à-dire un des
» côtés qui comprennent l'angle droit ) restant fixe, le
» triangle tourne tout autour, jusqu'à ce qu'il revienne
» à l'endroit d'où il étoit parti. Si la ligne droite fixe est
» égale à l'autre ligne qui forme l'angle droit, le cone
» est un cone rectangle ; mais si elle est moindre, c'est
» un cone obtus-angle ; & si elle est plus grande, le cone
» est acutangle. L'axe du cone est la ligne fixe, autour
» de laquelle le triangle se meut ; la base du cone est

» le cercle qui est décrit par la ligne droite qui se meut » autour de l'axe. ( *Défin*. 18, 19, 20, *Euclid*. 11 ).

M. *Jonas Moor*, dans son Traité des *Sections coniques* ( tiré des Œuvres de *Mydorgius* ) le définit ainsi :

» Si une ligne de la longueur, qui sera nécessaire, » est attachée à un point fixe au dessus du plan d'un cer- » cle, ensorte qu'elle se meuve autour de ce cercle, » jusqu'à ce qu'elle revienne au point d'où elle étoit » partie, la surface formée par une telle ligne, se nom- » me *surface conique*, & la figure solide, comprise en » dedans de cette surface & du cercle, se nomme *cone*. » Le point fixe & immobile se nomme le *sommet* du » *cone*, &c.

Quoique ces deux définitions soyent également vraies, & qu'avec un peu d'attention, on puisse les comprendre fort aisément, je vais cependant ici en proposer une fort différente de ces deux-là, & je me flatte qu'on la trouvera plus simple & plus intelligible, surtout pour les commençans.

Si l'on décrit un cercle sur une feuille de papier ( ou sur toute autre matiere pliable ) de la grandeur que l'on voudra, & si on le coupe en deux, trois ou plusieurs secteurs, égaux ou inégaux, & que l'un de ces secteurs soit tellement roulé, que ses rayons se rencontrent exactement, il formera une surface conique, c'est-à-dire si le secteur H V G (*fig*. 115) est séparé du cercle, & qu'on le roule, ensorte que ses rayons V H & V G s'ajustent parfaitement dans tous leurs points, il formera un cone tel que le centre V deviendra un point de ce solide, que l'on nomme *sommet du cone*; le rayon V H étant le le même de tous les côtés, sera le côté du cone, & l'arc H G deviendra un cercle, dont l'aire se nommera *base* du *cone*.

La ligne droite, que l'on suppose passer du sommet ou point V, (*fig*. 116) au centre de la base du cone, comme en C, cette ligne ( V C ) sera l'axe ou la hauteur perpendiculaire du cone.

Si l'on donne exactement cette forme à un ſolide, ce ſera un cone parfait, que j'appellerai dans la ſuite *cone droit*, parce que ſon axe V C eſt à angles droits ſur le plan de ſa baſe HG, & que ſes côtés ſont partout égaux entr'eux.

Le cone dont l'axe n'eſt pas à angles droits avec le plan de ſa baſe, peut ſe nommer proprement *cone imparfait*, parce que ſes côtés ne ſont pas égaux de toutes parts (*fig.* 117), ce cone imparfait ſe nomme ordinairement *cone ſcalene* ou *oblique*.

Tout cone ſolide peut ſe couper par des plans (que je prendrai dans la ſuite pour des lignes droites) en cinq ſections.

---

## SECTION PREMIERE.

Si l'on coupe directement un cone droit par ſon axe, le plan ou la ſurface de cette ſection ſera un triangle plan iſoſcele, comme HVG (*fig.* 116), & les côtés (HV & VG) du cone ſeront les côtés du triangle. Le diametre (HG) de la baſe du cone ſera la baſe du triangle, & (VC) ſon axe ſera la hauteur perpendiculaire du triangle.

---

## SECTION II.

Si l'on coupe (en quelque endroit que ce ſoit) un cone droit par une ligne droite parallele à ſa baſe, comme *hg* (*fig.*118), il eſt aiſé de comprendre que le plan de cette ſection ſera un cercle, parce que la baſe du cone en eſt un, dans lequel il faut bien concevoir une choſe que je vais donner comme un lemme néceſſaire à la démonſtration des propriétés qui conviennent aux ſections ſuivantes.

### *LEMME.*

Si deux lignes droites, inſcrites dans un cercle, ſe coupent mutuellement, comme *hg* & *bb* (*fig. ci-deſſus*),

le rectangle ſous les ſegmens de l'une de ces lignes ſera égal au rectangle ſous les ſegmens de l'autre. ( Voyez le Théorême 15 des Elémens de Géométrie ) ; c'eſt-à-dire $ba \times ag = ba \times ab$, & $HA \times AG = BA \times AB$, &c ; par conſéquent ſi $ba = ab$, & ſi $BA = AB$, on aura $ha \times ag = ba^2$, & dans la baſe du cone $HA \times AG = BA^2$.

---

## SECTION III.

SI l'on coupe ( en quelque endroit que ce ſoit ) un cone droit par une ligne droite, qui ſe termine à ſes deux côtés, mais qui ne ſoit pas parallele à ſa baſe ( comme TS, *fig.* 119 ), le plan de cette ſection ſera une *ellipſe* ( que l'on nomme vulgairement une *ovale* ), c'eſt-à-dire un cercle oblong ou imparfait, qui a pluſieurs diametres différens, & deux centres particuliers ; ſçavoir,

1°. Toute ligne droite qui diviſe l'ellipſe en deux parties égales, ſe nomme *diametre*, & parmi eux on diſtingue ſurtout le plus long & le plus court, comme étant d'un plus grand uſage, les autres ne ſervant qu'à quelques cas particuliers.

2°. Le plus long diametre, comme TS ( *fig. ci-deſſus* ) ſe nomme *grand diametre* ou *grand axe*, c'eſt la ligne droite, qui paſſant par le milieu de l'ellipſe, fixe ou détermine ſa longueur.

3°. Le plus court diametre, nommé *petit axe* ou *diametre conjugué*, eſt une ligne droite qui coupe à angles droits le grand axe au milieu ou au centre commun de l'ellipſe ( comme N*n* ), & qui détermine la largeur de l'ellipſe.

4°. Les deux points que j'appelle centres particuliers de l'ellipſe ( par la raiſon que je donnerai ci-après ) ſont deux points du grand diametre à égales diſtances du petit, & qu'on nomme ordinairement *foyers* ou *points brûlans*.

5°. Toutes les lignes droites en dedans de l'ellipſe qui ſont paralleles entr'elles, & diviſées en deux parties

égales par un diametre, se nomment *ordonnées* à ce diametre qui les divise ainsi ; & si elles sont paralleles au petit axe, ou à angles droits avec le grand axe, on les nomme *ordonnées appliquées* à angles droits ; & les deux qui passent par les foyers se distinguent de toutes les autres, parce qu'étant égales & semblablement situées, on leur donne un même nom, qui est celui de *côté droit* ou de *parametre droit*, lequel sert à régler ou à évaluer toutes les autres ordonnées, comme on le verra dans la suite.

---

## SECTION IV.

SI l'on coupe un cone en deux parties par une ligne droite parallele à l'un de ses côtés, comme S A (*fig.* 120) le plan de cette section (qui est S *b* B A *b* B S) se nomme *parabole*.

1°. La ligne droite menée par le milieu de la parabole (comme S A) se nomme son *axe* ou *diametre*.

2°. Toutes les lignes droites qui coupent l'axe à angles droits (comme B B & *b b* sont supposées couper S A) se nomment *ordonnées appliquées* (comme dans l'ellipse) & la plus grande ordonnée, comme B B, qui limite la longueur de l'axe de la parabole S A, se nomme ordinairement *base* de la *parabole*.

3°. L'ordonnée qui passe par le foyer ou point brûlant de la parabole, se nomme *côté droit* ou *parametre*, (comme dans l'ellipse) parce qu'il régle toutes les autres ordonnées qui se trouvent par le moyen du parametre.

4°. Le foyer ou point brûlant de la parabole est un point de son axe (mais non pas un centre comme dans l'ellipse) éloigné du sommet de la section (ou de S) précisément de $\frac{1}{4}$ du parametre, comme on le fera voir dans la suite.

5°. Toutes les droites menées en dedans de la parabole parallelement à son axe, se nomment *diametres*, & chaque

droite coupée par un de ces diametres en deux parties égales, se nomme *ordonnée* au diametre qui la divise également.

---

## SECTION V.

SI une droite coupe un cone en quelque endroit que ce soit, ou parallelement à son axe, comme S A (*fig.* 121) ou autrement, comme $x$N, ensorte que la ligne coupante étant continuée par un côté du cone (comme S ou $x$) rencontre l'autre côté du cone prolongé, au delà du sommet V, comme en T; le plan de cette section (qui est la figure S *b* B B *b* S) se nomme une *hyperbole*.

1°. La droite menée par le milieu de l'hyperbole ou en dedans de la section (comme S A ou $x$N) se nomme l'*axe* ou le *diametre intercepté* (comme dans la parabole) & la partie de l'axe qui est continuée ou prolongée hors de la section, jusqu'à la rencontre de l'autre côté prolongé du cone, comme T S ou T$x$, se nomme *grand diametre* ou *axe transversal* de l'*hyperbole*.

2°. Toutes les droites menées en dedans de l'hyperbole à angles droits sur son axe, se nomment *ordonnées appliquées*, comme dans l'ellipse & la parabole.

3°. L'ordonnée qui passe par le foyer de l'hyperbole, se nomme *côté droit* ou *parametre*, par la même raison que dans les autres sections.

4°. Le milieu du grand diametre se nomme centre de l'*hyperbole*; par ce point on mene deux droites (hors de la section) qui se nomment *assymptotes*, parce qu'elles s'inclinent toujours, ou s'approchent de plus en plus de l'hyperbole, chacune de son côté, sans pouvoir jamais la rencontrer ou la toucher, quand même elles seroient toutes deux continuées avec les deux côtés de l'hyperbole à l'infini, comme on le verra clairement en son lieu.

Ces cinq sections, le *Triangle*, le *Cercle*, l'*Ellipse*, la *Parabole*, & l'*Hyperbole* comprennent tous les plans qu'il

eſt poſſible de tirer d'un cone ; mais il n'y a que les trois dernieres qui ſoient nommées proprement *ſections coniques*, tant par les Anciens, que par les modernes Géometres.

### SCHOLIE.

Outre les définitions précédentes, je ne dois pas oublier d'ajouter, par maniere d'obſervation, qu'une ſection peut ( ou plutôt doit ) changer ou dégénérer en une autre. L'*ellipſe* étant le plan d'une ſection du cone, qui eſt le *cercle* & la *parabole*, on conçoit aiſément qu'on peut dans un même cone produire une grande variété d'ellipſes, & que la ſection devenant exactement parallele à un côté du cone, l'ellipſe doit changer & dégénérer en parabole ; mais la parabole étant une ſection, dont le plan eſt toujours exactement parallele au côté du cone, ne peut pas varier autant que l'ellipſe ; car auſſitôt qu'elle commence à ſortir de cette poſition ( qui eſt d'être parallele au côté du cone ), elle dégénere ou en *ellipſe*, ou en *hyperbole* ; c'eſt-à-dire que ſi la ſection incline vers le plan de la baſe du cone, elle devient une ellipſe, mais ſi elle incline vers le ſommet du cone, elle devient une hyperbole, qui eſt le plan d'une ſection faite entre la parabole & le triangle ; & par conſéquent il peut y avoir autant de variétés d'hyperboles produites dans un même cone, qu'il peut y avoir d'ellipſes.

En un mot, le *cercle* peut ſe changer en ellipſe, l'ellipſe en parabole, la parabole en hyperbole, & l'hyperbole en triangle plan iſoſcele. Le centre du cercle, qui eſt ſon foyer ou point brûlant, ſe diviſe en deux foyers auſſitôt que le cercle commence à dégénérer en ellipſe ; mais lorſque l'ellipſe ſe change en parabole, l'une de ſes extrémités s'ouvre d'elle-même, & l'un de ſes foyers diſparoît ; l'autre foyer s'avance avec la parabole, lorſqu'elle dégénere en hyperbole ; & lorſque l'hyperbole dégénere en triangle plan iſoſcele, ce foyer devient le point vertical du triangle ( ou le ſommet du cone ) :

enſorte qu'on peut dire, avec vérité, que le centre de la baſe du cone paſſe graduellement par toutes les ſections, juſqu'à ce qu'il ſoit arrivé au ſommet du cone, en traînant toujours avec lui le parametre; car le diametre du cercle étant une ligne droite qui paſſe par ſon centre ou foyer, & qui régle ou évalue toutes les autres lignes droites que l'on peut mener au dedans du cercle, peut ſe nommer, avec raiſon, le parametre du cercle; & quoiqu'il perde ſon nom de diametre, lorſque le cercle dégénere en ellipſe, il retient toujours le nom de parametre avec toutes ſes propriétés primitives dans toutes les ſections, devenant toujours plus court par degrés, à meſure que le foyer s'avance d'une ſection à l'autre, juſqu'à ce qu'il vienne à ſe confondre avec le foyer, & à ſe terminer au ſommet du cone.

Je me ſuis plus étendu dans ces *définitions* qu'on ne le fait ordinairement dans les Livres ſur cette matiere; ce qui ſera, comme je l'eſpere fort utile, ſurtout aux commençans; & quoiqu'elles leur paroiſſent d'abord un peu nouvelles & difficiles à comprendre, cependant lorſqu'ils les auront bien examinées & comparées avec le cone coupé de toutes les manieres qui ont été déterminées, non ſeulement on les trouvera vraies, mais elles ſerviront à donner une idée claire & préciſe de chaque ſection.

---

## CHAPITRE II.

### *Des principales propriétés de l'Ellipſe.*

*Nota.* SI le grand diametre d'une *ellipſe*, comme T S, eſt diviſé en deux par une *appliquée*, aux points A, C, *a*, &c. ces parties T A, T C, T *a*, & S A, S C, S *a*, &c. ſe nomment ordinairement *abſciſſes* (ce qui ſignifie lignes ou parties coupées), & par le rectangle ſous les deux *abſciſſes*, on entend le rectangle ſous les

deux parties, qui étant ajoutées ensemble, sont égales au grand diametre, ou diametre transversal.

Comme $TA + SA = TS$, & $TC + SC = TS$, ou $Ta + Sa = TS$, &c,

---

## SECTION PREMIERE.

CHaque *ellipse* est proportionnée, & toutes les lignes qui lui sont rapportées sont réglées par le moyen de ce Théorême général.

### THEOREME.

*Comme le rectangle sous deux abscisses est au quarré de l'ordonnée ou de la demi ordonnée qui les sépare, ainsi le rectangle sous deux autres abscisses, est au quarré de l'ordonnée ou de la demi-ordonnée qui les sépare.*

C'est-à-dire $\begin{cases} TA \times SA : BA^2 :: Ta \times Sa : ba^2 \\ TA \times SA : BA^2 :: TC \times SC : NC^2 \\ TC \times SC : NC^2 :: Ta \times Sa : ba^2 \end{cases}$ (*fig.* 122), &c.

### DEMONSTRATION.

Soit la *figure* 123 un cone droit coupé des deux côtés par la droite $TS$; le plan de cette section sera une ellipse (par la sect. 3. chap. 1.); $TS$ en sera le grand diametre; $NCN$ & $bab$ les *appliquées*, comme ci-devant.

De plus, si les lignes $Dd$ & $Kk$ sont paralleles à la base du cone, elles seront diametres de deux cercles (par la sect. 2. chap. 1.). Les triangles $TCK$ & $TaD$ seront semblables, aussi-bien que les $\triangle$ $Sad$ & $SCk$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Donc | 1 | $Sa : ad :: SC : Ck$ | par le *théor.* 13. |
| Et | 2 | $TC : CK :: Ta : aD$ | |
| 1 ∵ | 3 | $Sa \times Ck = ad \times SC$ | |
| 2 ∵ | 4 | $Ta \times CK = TC \times ad$ | |
| 4 × 3 | 5 | $Sa \times Ck \times Ta \times CK = ad \times SC \times TC \times aD$, par l'*axiome* 3. | |

| | | |
|---|---|---|
| Mais | 6 | $CK \times Ck = NC^2$ } par le *lemme* de la |
| Et | 7 | $aD \times ad = ab^2$ } sect. 2. |
| Donc 5,6,7 | 8 | $Sa \times Ta \times NC^2 = TC \times SC \times ab^2$, par l'*axiome* 5, en substituant $NC^2$ à $CK \times CK$, & $ab^2$ à $aD \times ad$. |
| Donc | 9 | $Sa \times Ta : ab^2 :: TC \times SC : NC^2$. Voyez sect. 3. ch. 7. de l'Algebre. *Q. E. D.* |

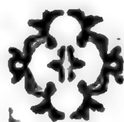
On peut aussi prouver d'une autre maniere la vérité de ces proportions par le cercle, sans le secours du cone ; car soit l'ellipse circonscrite & inscrite par des cercles, comme dans la figure 123. D'un point de la circonférence du cercle circonscrit, comme B, menez la droite $Ba$ parallele au demi-diametre conjugué NC, $Ba$ sera la demi-appliquée au grand diametre TS, comme ci-devant.

De plus, du point *b* ( dans la circonférence de l'ellipse ) menez la droite *bd* parallele au grand axe TS, & tirez le rayon BC ; les △ $BCa$ & $Cfd$ seront semblables.

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $BC : Ba :: Cf : dC$, par le *théor.* 13. |
| Mais | 2 | $TC = BC$, $NC = Cf$, & $ba = dC$. |
| Donc | 3 | $TC : Ba :: NC : ba$, |
| ou | 4 | $TC : NC :: Ba : ba$ |
| 4 en □ | 5 | $TC^2 : NC^2 :: Ba^2 : ba^2$. |
| Mais | 6 | $Ta$ (*fig.* 124) $\times Sa = Ba^2$, par le *lem.* de la *sect.* 2. *chap.* 1. |
| Donc | 7 | $Ta \times Sa : ba^2 :: TC \times SC = TC^2 : NC^2$, comme auparavant. |

Et ainsi de toutes les autres *abscisses*, & de leurs *demi-ordonnées.*

Ces proportions étant les vraies & communes propriétés de toutes les *ellipses*, on en déduira aisément tout ce que l'on voudra sçavoir de plus sur cette section.



## SECTION II.

### *Trouver le Parametre d'une Ellipse.*

IL y a plusieurs manieres de trouver le parametre, mais je crois qu'il n'y en a point de plus aisée, & qui le fixe mieux que celui de la troisiéme ligne proportionnelle dans l'ellipse, comme on va voir.

### THEOREME.

*Comme le grand diametre est au petit, ainsi le petit est au parametre.*

Dans la figure 125, TS : N$n$ :: N$n$ : LR, parametre.

### DEMONSTRATION.

Dans les dernieres *proportions*, prenez lequel vous voudrez des antécédens & des conséquens, ou TC (*même fig.*) × SC : NC², ou T$a$ × S$a$ : $ba^2$, & faites TS, troisiéme terme, le quatriéme proportionnel sera = LR, en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $TC \times SC : NC^2 :: TS : LR$ |
| Mais | 2 | $TC = SC$, & $NC = Cn$. |
| Donc | 3 | $TC \times SC = \frac{1}{4} TS^2$; |
| Et | 4 | $NC^2 = \frac{1}{4} Nn^2$ |
| 1, 3, 4 | 5 | $\frac{1}{4} TS^2 : \frac{1}{4} Nn^2 :: TS : LR$ |
| 5 :: | 6 | $\frac{1}{4} TS^2 \times LR = \frac{1}{4} Nn^2 \times TS$ |
| 6 × 4 | 7 | $TS^2 \times LR = Nn^2 \times TS$ |
| 7 ÷ TS | 8 | $TS \times LR = Nn^2$, ce qui donne l'analogie suivante. |
| sçavoir | 9 | $TS : Nn :: Nn : LR$ |
| & encore | 10 | $TC \times SC : NC^2 :: Ta \times Sa : ba^2$, par la propriété commune. |
| 1, 10 | 11 | $TS : LR :: Ta \times Sa : ba^2$. |

Par

Par où l'on voit évidemment que LR, ainsi trouvée, est une appliquée par laquelle les autres sont réglées & trouvées. Donc (selon sa définition, sect. 3, chap. 1.) c'est le vrai parametre. *Q. E. D.*

## COROLLAIRE.

Delà il suit que si les deux axes de l'ellipse sont donnés (soit en lignes ou en nombres) on trouvera aisément le *parametre*, & par son moyen toute ordonnée placée à une distance quelconque du diametre conjugé.

---

## SECTION III.

### *Trouver le Foyer d'une Ellipse.*

LE foyer est la distance du parametre au diametre conjugué, ou au milieu de l'ellipse (voyez la définition 4); & cette distance est toujours moyenne proportionnelle entre la demi-somme & la demi-différence des deux axes, ce qui donne ce Théorême.

### THEOREME.

*Du quarré de la moitié du grand axe, ôtez le quarré de la moitié du petit, la racine quarrée de leur difference sera la distance de chaque foyer, au milieu ou au centre commun de l'ellipse.*

C'est-à-dire en supposant que les points $f$ & F sont les deux foyers, ou que $fC = CF$, & $TC = \frac{1}{2} TS$, $NC = \frac{1}{2} Nn$; ensuite $TC + NC : fC :: FC : TC - NC$. Donc $FC^2 = TC^2 - NC^2$; par conséquent $FC = \sqrt{TC^2 - NC^2}$.

### DEMONSTRATION.

| | | |
|---|---|---|
| 1°. | 1 | TS (*fig.* 126) $\times LR = Nn^2$, par le 8e cas de la derniere démonstration; |
| Et | 2 | $TS : LR :: TF \times SF : LF^2$, par la propriété commune; |
| c'est-à-dire | 3 | $TS : LR :: \overline{TC + CF} \times \overline{TC - CF} : \frac{1}{4} LR^2 = LF^2$ |

| | | |
|---|---|---|
| 3 ∵ | 4 | $\frac{1}{4} LR^2 \times TS = LR \times \overline{TC^2 - CF^2}$ |
| 4 ÷ LR | 5 | $\frac{1}{4} LR \times TS = TC^2 - CF^2$ |
| 1 ÷ $\overline{4}$ | 6 | $\frac{1}{4} TS \times LR = \frac{1}{4} Nn^2 = NC^2$ |
| 5, 6 | 7 | $NC^2 = TC^2 - CF^2$ |
| 7, ± | 8 | $CF^2 = TC^2 - NC^2$ |
| 8 ▱ 2 | 9 | $CF = \sqrt{TC^2 - NC^2}$. |

De là ſuit une propoſition remarquable, ſur laquelle eſt appuyée la méthode ordinaire de décrire une *ellipſe*, & de mener ſes tangentes, &c.

### PROPOSITION.

*Si des deux foyers d'une ellipſe on mene deux droites qui ſe rencontrent dans quelque point de la circonférence, la ſomme de ces lignes ſera égale au grand axe.*

C'eſt-à-dire $fN + NF = TS$, $fL + LF = TS$, ou $fB + BF = TS$, &c.

### DEMONSTRATION.

| | | |
|---|---|---|
| 1°. | 1 | $CF^2$ (*fig.* 127) $+ NC^2 = TC^2$, par le 8ᵉ cas de la derniere démonſtration. |
| Mais | 2 | $CF^2 + NC^2 = NF^2$, par le théor. 11. |
| 1, 2 | 3 | $NF^2 = TC^2$, par l'axiome 5. |
| 3 ▱ 2 | 4 | $NF = TC$; donc $2NF = 2TC = TS$. |
| De plus | 5 | $TS : LR :: TF \times FS : LF^2$, par la propriété général. |
| par conſ. | 6 | $\frac{1}{2} TS : \frac{1}{2} LR :: TF \times FS : LF$; mais $\frac{1}{2} TS = TC$, & $\frac{1}{2} LR = LF$. |
| Donc | 7 | $TC : LF :: \overline{TC + CF} \times \overline{TC - CF} : LF^2$ |
| 7 ∵ | 8 | $TC \times LF = TC^2 - CF^2$ |
| Mais | 9 | $fF^2 + LF^2 = fL^2$, par le théor. 11. |
| c'eſt-à-dire | 10 | $4CF^2 + LF^2 = fL^2$; car $2CF = fF$ |

| | | |
|---|---|---|
| $8 \times \bar{4}$ | 11 | $4TC \times LF = 4TC^2 - 4CF^2$ |
| 10, 11 | 12 | $4TC^2 + LF^2 = 4TC \times LF + fL^2$ |
| 12 — | 13 | $4TC^2 - 4TC \times LF + LF^2 = fL^2$ |
| 13 ▱ 2 | 14 | $2TC - LF = fL$ |
| 14 + LF | 15 | $2TC = fL + LF$; mais $2TC = TS$ |
| Donc | 16 | $fL + LF = TS$. *Q. E. D.* |

Et cette proposition doit être nécessairement vraie pour chaque point de la circonférence de l'ellipse, comme B, &c. comme on le verra évidemment, si l'on fait bien attention, que comme un fil de la longueur précise du diametre d'un cercle, ayant ses deux extrêmités jointes ensemble, & se mouvant dans une pointe autour du centre (c'est-à-dire en faisant de ce fil un double rayon), une autre pointe placée de l'autre côté, décrit sa circonférence d'un cercle (par la définition du cercle); de même si un fil de la longueur précise du grand diametre (TS) de l'ellipse, ayant ses deux extrêmités tellement fixées aux deux foyers ($f$ & F) qu'il puisse se mouvoir tout autour, en conduisant une pointe le long du fil tendu, elle décrira la vraie circonférence d'une ellipse.

Et quoique cette méthode facile de décrire ou de tracer, comme on dit ordinairement, une *ellipse*, soit méchanique, & connue même de la plûpart des *Menuisiers*, *Charpentiers*, &c. elle nous donne cependant une idée aussi claire & aussi parfaite de cette figure qu'aucune autre méthode, & en la décrivant ainsi autour de ses deux foyers, comme un cercle autour de son centre, elle fait voir clairement que ce n'est pas improprement que nous avons appellé ces deux points, les *centres particuliers*, dans la définition 4. sect. 3. chap. 1; car chacun de ces points a le même rapport à la circonférence de l'ellipse que le centre du cercle à sa circonférence.

## SECTION IV.

### *Décrire ou tracer une Ellipse en plusieurs manieres.*

IL y a plusieurs autres manieres de décrire une ellipse géométriquement ou numériquement, selon les occasions; mais je ne ferai mention ici que de deux ou trois, laissant les autres au génie des Commençans. Il faut pour cela examiner quelles sont les lignes nécessaires pour fixer ou limiter sa figure. Je crois que les principales sont,

1°. Le grand & le petit axe étant donnés, l'ellipse est parfaitement déterminée (voyez le corollaire dans la sect. 2); car si T S & N *n* sont à angles droits dans leur milieu en C, & si avec l'ouverture T C ou C S on coupe depuis N ou *n* de part & d'autre en *f*, & F le grand diametre (faisant $fN = TC = NF$), les points *f* & F seront les deux foyers, par le 4e cas de la derniere démonstration, & alors on pourra décrire l'ellipse comme ci-devant.

2°. Si le grand diametre & le parametre sont donnés, l'ellipse est parfaitement déterminée, parce que par leur moyen on aura le diametre conjugué, par la sect. 2.

3°. Ou si le grand diametre seul est donné avec sa proportion au diametre conjugué, ou au parametre, l'ellipse est encore limitée. Par exemple, supposons que la raison donnée entre le grand diametre & le petit soit comme $a : d$, c'est-à-dire $a : d :: TS : Nn$; on aura $\frac{TS \times d}{a} = Nn$, &c.

4°. Si le grand ou le petit diametre sont donnés avec la distance du foyer au petit, l'ellipse est déterminée, parce que par leur moyen on peut trouver le petit ou le grand diametre.

Tout cela étant supposé, & ayant un peu consideré les opérations précédentes, on pourra aisément décrire une ellipse dans un plan, tant géométriquement, que numériquement.

*I. Décrire une ellipse numériquement par des points.*

Suppoſons le grand diametre TS (*fig.* 128) = 20, & le petit N$n$ = 12 (ou pouces, ou autres parties égales), & qu'ils ſe coupent mutuellement à angles droits dans leurs milieux, comme le point C, on aura TC = CS = 10, & NC = C$n$ = 6, & 20 : 12 :: 12 : 7,2 = le parametre.

De plus, 20 : 7,2, ou plutôt prenez leur raiſon en cette maniere :

$$1 : 0{,}36 :: \overline{10 + 1} \times \overline{10 - 1} : \overline{a1}^2$$
$$1 : 0{,}36 :: \overline{10 + 2} \times \overline{10 - 2} : \overline{b2}^2$$
$$1 : 0{,}36 :: \overline{10 + 3} \times \overline{10 - 3} : \overline{d3}^2 \ \&c.$$

$$\text{ou} \left\{ \begin{array}{l} \overline{100 - 1} \times 0{,}36 = \overline{a1}^2 \\ \overline{100 - 4} \times 0{,}36 = \overline{b2}^2 \\ \overline{100 - 9} \times 0{,}36 = \overline{d3}^2 \end{array} \right\}; \text{ par conſéquent}$$

$\sqrt{99 \times 0{,}36} = 5{,}97$, &c. $= a1$, $\sqrt{96 \times 0{,}36} = 5{,}88$, &c. $= b2$, $\sqrt{91 \times 0{,}36} = 5{,}72$, &c. $= d3$.

Si l'on trouve de cette maniere autant de demi-ordonnées qu'on le jugera convenable (plus on en trouvera, mieux on fera) & ſi chacune eſt placée à angles droits ſur le grand diametre de part & d'autre au point reſpectif, c'eſt-à-dire de 1 à $a$, de 2 à $b$, de 3 à $d$, &c. la ligne courbe tracée avec ſoin par toutes les extrêmités $a$, $b$, $d$, &c. ſera la circonférence de l'ellipſe requiſe.

*II. Décrire une ellipſe géométriquement par des points.*

Ayant les deux axes donnés TS & N$n$ (*fig.* 129) placés à angles droits dans leurs milieux, comme auparavant, il faut de l'une des extrêmités de l'axe conjugué, comme N ou $n$, couper la moitié du grand axe vers $x$, c'eſt-à-dire faire N$x$ = TC (prolongeant l'axe conjugué N$n$

lorsqu'il est plus court que T C ), ou, ce qui revient au même, faire C $x$ = T C − N C. Prenez ensuite un point dans la ligne C $x$ à volonté; par exemple G, & de ce point G, coupez la distance C $x$ sur le grand axe, comme en E, faisant G E = C $x$. Joignez les points G E par une droite prolongée au delà de E, ensorte que E B = N C, & par conséquent G B = T C. Je dis qu'en quelqu'endroit que le point G soit pris entre C & $x$, le point B sera dans la circonférence de l'ellipse.

### DEMONSTRATION.

Menez la droite B A perpendiculaire à T S, ou que B A soit une demi-ordonnée appliquée au grand diametre T S; les △ G C E, & B A E seront semblables;

| | | |
|---|---|---|
| par conséq. | 1 | $CE : AE :: EG : EB$, par le théor. 13. |
| 1, & | 2 | $CE + AE : AE :: EG + EB : EB$. Voyez chap. 7. sect. 1. de l'Algebre. |
| Mais | 3 | $CE + AE = CA$, $EG + EB = TC$, & $EB = NC$. |
| Donc | 4 | $CA : AE :: TC : NC$ |
| 6, en □ | 5 | $CA^2 : AE^2 :: TC^2 : NC^2$ |
| 5 ∴ | 6 | $\frac{CA^2 \times NC^2}{TC^2} = AE^2$. |
| Mais | 7 | $NC^2 - AB^2 = AE^2$, ou $EB^2 - AB^2 = AE^2$ |
| 6, 7 | 8 | $\frac{CA^2 \times NC^2}{TC^2} = NC^2 - AB^2$ |
| 8 × $TC^2$ | 9 | $CA^2 \times NC^2 = NC^2 \times TC^2 - AB^2 \times TC^2$ |
| 9 ± | 10 | $NC^2 \times TC^2 - CA^2 \times NC^2 = AB^2 \times TC^2$ |
| 10 en anal. | 11 | $TC^2 : NC^2 :: TC^2 - CA^2 : AB^2$ |
| c'est-à-dire | 12 | $TC \times CS : NC^2 :: \overline{TC + CA} \times \overline{TC - CA} : AB^2$; ce qui s'accorde |

avec la propriété générale de l'*ellipse*. Donc le point B est le vrai point à la circonférence. *Q. E. D.*

Delà il ſuit que ſi l'on mene un nombre ſuffiſant de lignes, telles que GEB (par la méthode précédente), en prenant un pareil nombre de points entre C & $x$, &c. leurs extrêmités (comme B) détermineront les points par où l'on pourra décrire l'ellipſe, comme auparavant.

Mais ſi l'on comprend bien cette méthode, on verra aiſément comment on peut décrire une ellipſe fort promptement, ſans tirer ces lignes, ayant une regle mince, droite & étroite, préciſément de la longueur de TC, qui ſoit un peu affilée à ſes deux extrémités, ſur laquelle depuis l'un de ſes bouts B, vous couperez la longueur de NC = BE : enſuite ſi le point de la regle qui repréſente E ſe meut doucement & par degrés le long du grand axe TS, & qu'en même-tems le point ou extrêmité qui repréſente G, gliſſe le long de l'axe conjugué N*n*, il eſt évident par les opérations précédentes, que l'extrêmité de la regle qui repréſente B, déterminera par ce mouvement la vraie circonférence de l'ellipſe requiſe ; car par ce moyen le côté droit de la regle ſupplée à un nombre infini de ces lignes GB, comme on le verra clairement & aiſément dans la pratique.

*SCHOLIE.*

Delà ſuit la premiere invention de cet inſtrument ſi bien imaginé pour tracer une ellipſe d'un ſeul mouvement, & qui ſe nomme ordinairement *compas elliptique* ; on le fait communément de cuivre, & il eſt compoſé de trois parties, dont deux repréſentent les deux diametres liés enſemble à angles droits (ou plutôt tiennent leur place), & la troiſiéme eſt une regle mobile, qui fait l'office de la regle mince dont je viens de parler.

Mais comme la conſtruction de ce compas eſt connue de la plûpart des faiſeurs d'inſtrumens de Mathématique, & ſurtout de cet Artiſte ſi ingénieux & ſi exact, M. *Jean Rowley*, faiſeur d'inſtrumens de Mathématique, à Londres, qui, par ſa grande habileté, doit être regardé avec juſtice comme l'un des meilleurs ouvriers de l'Europe dans ſa

profession, je crois qu'il est inutile de donner une description plus particuliere de cet instrument.

Delà aussi sont venues les découvertes ingénieuses des instrumens pour tourner toutes sortes d'ouvrages elliptiques ou ovales, &c.

---

## SECTION V.

### *Une Ellipse étant donnée, trouver ses deux axes.*

SOIT l'ellipse donnée TNS*n* (dans la figure 130) dans laquelle il faut trouver le grand axe TS, & le petit N*n*. Menez en dedans de l'ellipse deux lignes droites paralleles l'une à l'autre, comme H*h* & M*m*, & coupez ces deux lignes par le milieu, ou prenez le milieu de chacune, comme K & P, & par ces deux points K & P, menez une droite, comme DA, qui sera un diametre, puisqu'il divisera l'ellipse en deux parties égales (voyez la définit. 1re); donc le milieu de DA sera le vrai milieu ou centre commun de l'ellipse, comme C.

Car telle est la nature ou propriété de tous les diametres de quelque façon qu'ils soient tirés dans l'ellipse (comme dans le cercle) qu'ils se coupent tous mutuellement au centre commun ou milieu de la figure, comme C.

Du point C, décrivez un arc de cercle qui coupera la circonférence de l'ellipse en deux points, comme B & *b*; joignez ces deux points par une droite B*b*, ce sera une ordonnée, & le grand axe TS passera par son milieu (*a*), & par le centre commun C; car BS = S*b*, & B*a* est à angles droits sur TS; donc la ligne B*b* est une ordonnée appliquée au grand diametre TS, & si par le point C on mene la droite N*n* parallele à B*b*, on aura le diametre conjugué requis.

## SECTION VI.

*Mener une Tangente ou ligne droite qui touche la circonférence de l'ellipse en un point donné.*

IL y a trois cas pour mener à un point donné, ou d'un point donné une tangente sur la circonférence de l'ellipse.

*Premier cas.* S'il faut mener une tangente qui touche l'ellipse dans une des extrémités de son grand axe, comme T ou S (*fig. ci-dessus*), il est clair que la tangente doit être menée parallelement au diametre conjugué N*n*, comme on suppose que l'est HK dans la figure 131.

*Second cas.* Si la tangente doit toucher l'ellipse dans l'une des extrêmités du petit axe, comme en N ou *n*, il est évident qu'elle doit être menée parallelement au grand axe TS, comme KM; par conséquent si cette tangente & le grand axe sont continués à l'infini, ils ne se rencontreront jamais.

*Troisiéme cas.* Mais s'il faut mener une tangente qui touche l'ellipse dans un autre point, comme en B, alors si la tangente & le grand diametre sont continués, ils se rencontreront dans quelque point, comme P, & ces deux points (B & P) dépendent tellement l'un de l'autre, que l'un des deux doit être donné pour pouvoir déterminer l'autre, afin que l'on puisse bien mener la tangente.

Soit $D = TS$, $y = AS$, & $z = AP$. Si $y$ est donné, on trouvera $z$ par ce Théorême $\frac{Dy - yy}{\frac{1}{2}D - y} = z$; ou si $z$ est donné, on trouvera $y$ par ce Théorême $\frac{D + z}{2} \pm \sqrt{\frac{DD + zz}{4}} = y$.

DEMONSTRATION.

Menez la demi-ordonnée *ba*, comme dans la figure ci-dessus, les $\triangle$ BAP & *ba*P seront semblables. Faites

$x = Aa$, diſtance entre les deux demi-ordonnées (c'eſt-à-dire entre $BA$ & $ba$) que nous ſuppoſons infiniment petite.

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $z : z - x :: BA : ba$, par le théor. 13. |
| Mais | 2 | $\overline{D-y} \times y : \overline{D-y+x} \times \overline{y-x} :: \overline{BA}^2 : ba^2$; par la propriété générale. |
| c'eſt-à-dire | 3 | $Dy - yy : Dy - yy + 2yx - Dx - xx : BA^2 : ba^2$ |
| 1 en □ | 4 | $zz : zz - 2zx + xx :: BA^2 : ba^2$ |
| Suppoſons | 5 | $x = 0$, afin que l'on puiſſe rejetter $x$; |
| 3, donc | 6 | $Dy - yy : Dy - yy + 2y - D :: \overline{BA^2} : ba^2$ |
| 4, & | 7 | $zz : zz - 2z :: BA^2 : ba^2$ |
| 6, 7 | 8 | $Dy - yy : Dy - yy + 2y - D :: zz : zz - 2z$ |
| 8 ∵ | 9 | $2yzz - Dzz = 2yyz - 2Dyz$ |
| 9 ÷ 2z | 10 | $yz - \frac{1}{2}Dz = yy - Dy$ |
| 10 ± | 11 | $\frac{1}{2}Dz - yz = Dy - yy$ |
| 11 ÷ $\overline{\frac{1}{2}D - y}$ | 12 | $z = \frac{Dy - yy}{\frac{1}{2}D - y}$; c'eſt le premier théorême qui donne l'analogie ſuivante. |
| Analogie | 13 | $\frac{1}{2}D - y : y :: D - y : z$, ou $CA : SA :: TA : AP$. |
| 10 − yz | 14 | $yy - Dy - yz = -\frac{1}{2}Dz$ |
| 14 C □ | 15 | $yy - Dy - yz + \frac{1}{4}DD + \frac{1}{2}Dz + \frac{1}{4}zz = \frac{1}{4}DD + \frac{1}{4}zz$ |
| 15 ▱ 2 | 16 | $y - \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}z = \sqrt{\frac{1}{4}DD + \frac{1}{4}zz}$; |
| c'eſt-à-dire | 17 | $y = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}z \pm \sqrt{\frac{1}{4}DD + \frac{1}{4}zz}$; ce qui eſt le ſecond théor. *Q. E. D.* |

La conſtruction géométrique de ces deux théorêmes eſt fort aiſée, comme on peut le voir par la figure 132.

1°. Soit le point B donné dans la circonférence de

l'ellipse, on demande le point P, &c. Prenez TC pour rayon, & du centre commun C (*fig.* 132) décrivez le demi-cercle T*d*S; joignez les points C & *d* par une droite; divisez également cette ligne (par le problême 2. des Elémens de Géométrie), & marquez le point ou la ligne qui divise, coupe le grand axe, comme *e*. Avec le rayon C*e*, ou *ed*, décrivez du centre *e* un autre demi-cercle, prolongeant le grand diametre jusqu'à sa circonférence, elle déterminera le point P.

Car si $D = TS$, $y = AS$, $z = AP$, comme ci-devant.

| | | |
|---|---|---|
| Nous aurons | 1 | $\overline{D-y} \times y = dA^2$ |
| Et | 2 | $\overline{\frac{1}{2}D-y} \times z = dA^2$ |
| car | 3 | $TA : dA :: dA : SA$ |
| & | 4 | $CA : dA :: dA : AP$, & $CA = \frac{1}{2}D - y$, &c. |
| 1, 2 | 5 | $\frac{1}{2}Dz - yz = Dy - yy$, comme dans le 11^e cas ci devant. |

Donc le point P est le point requis; par conséquent si l'on mene une droite par les points B & P, ce sera la tangente requise, selon le premier théorême.

2°. La converse est aisée, c'est-à-dire si le point P est donné, on trouvera le point B dans la circonférence de l'ellipse, en cette maniere: Soit circonscrit la demi-ellipse dans le demi-cercle T*d*S, comme auparavant; & divisez également la distance entre C & P comme en *e*, faisant C*e* = *e*P. Prenez ensuite C*e* pour rayon, & du point *e* décrivez le demi-cercle C*d*P. Du point *d* où les deux demi-cercles se coupent, abaissez *d*A perpendiculaire au grand axe: elle déterminera le point d'attouchement B dans la circonférence de l'ellipse.

Mais on peut avoir une méthode pratique de mener des tangentes à tous les points donnés de la circonférence de l'ellipse (sans chercher le point P) en se servant de la propriété suivante des tangentes du cercle. Si à l'extrê-

mité du rayon d'un cercle, comme CB (*fig.* 133) on mene une tangente, comme HK, les deux angles qu'elle fait avec le rayon seront toujours deux angles droits. (16, 17, 18, 19 *Euclide* 3), c'est-à-dire v HBC = v CBK = 90°.

De même les deux angles formés par la tangente, & les deux lignes menées des foyers d'une ellipse au point d'attouchement, seront toujours des angles égaux, mais non pas droits, excepté seulement aux deux extrêmités du grand axe; ce qui étant bien consideré, & comparé avec ce qu'on a dit ci-devant, on comprendra aisément la méthode suivante de mener des tangentes à un point déterminé dans la circonférence de l'ellipse.

Ayant trouvé les deux foyers *f* & F par le moyen des deux axes (*sect.* 3), menez par ces deux points deux lignes qui se rencontrent au point donné d'attouchement, comme *fb* & F*b*, ou *f*B & FB (*fig.* 134). Coupez ensuite *bd* = *b*F (ou BD = BF), & joignez les points F*d* (ou FD) par une droite.

Je dis que si l'on mene une droite par le point d'attouchement *b* (ou B) parallele à *d*F, ou DF, ce sera la tangente requise; car il est clair que comme v FN*k* = *f*NH, lorsque la tangente est parallele au grand axe, aussi l'v *fbh* = v NF*bk* (& v *f*BH = v FBK), & ainsi dans tous les points, à mesure que le point d'attouchement *b* (ou B), & sa tangente roulent autour de la circonférence de l'ellipse avec les lignes *fb*F (ou *f*BF).

# CHAPITRE III.

## *Des principales propriétés de la Parabole.*

*Nota.* DANS chaque parabole, le diametre intercepté, ou la partie de son axe qui est entre le sommet & l'ordonnée qui limite sa longueur, comme S*a*, ou S A, se nomme abscisse.

## SECTION PREMIERE.

LE plan ou la figure de chaque parabole est proportionnée par ses ordonnées & par ses abscisses, comme dans le théorême suivant.

### THEOREME.

*Comme chaque abscisse est au quarré de sa demi-ordonnée, ainsi une autre abscisse est au quarré de sa demi-ordonnée.*

C'est-à-dire si l'on suppose que la *fig.* 135 est une parabole, dont S*a* & S A sont les abscisses, & *bab*, B A B les ordonnées appliquées à angles droits, on aura $Sa : ba^2 :: SA : BA^2$, ou $Sa : SA :: ba^2 : BA^2$ en quelque endroit que l'on prenne les points *a* & A, & ainsi des autres abscisses.

### DEMONSTRATION.

Soit H V G (*fig.* 136) un cone droit, coupé en deux parties par la droite S A parallele à son côté V H. Le plan de cette section B*b*S*b*B sera une parabole, par la sect. 4, chap. 1, dans laquelle je suppose que SA est l'axe, & *bab*, BAB les ordonnées appliquées perpendiculairement à l'axe.

Imaginons encore que ce cone soit coupé par une droite *hg* parallele à sa base H G, *hg* sera le diametre d'un cercle, par la sect. 2, chap. 1, & le △ S*ag* semblable au △ SAG.

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $Sa : ag :: SA : AG$, par le théor. 13. |
| 1 ∵ | 2 | $Sa \times AG = SA \times ag$ |
| 2 × $ha$ | 3 | $Sa \times AG \times ha = SA \times ag \times ha$, par l'ax. 3. |
| Mais | 4 | $HA = ha$, parce que SA est parallele à VH |
| & | 5 | $BA^2 = AG \times HA$, & $ba^2 = ag \times ha$, par le lemme, sect. 2. chap. 1. |
| 3, 4, 5 | 6 | $Sa \times BA^2 = SA \times ba^2$, par l'axiome 5. |
| 6, analogie | 7 | $Sa : ba^2 :: SA : BA^2$. *Q. E. D.* |

Ces proportions étant des propriétés générales pour toutes les paraboles, on peut en tirer aisément tout ce que l'on veut sçavoir sur cette section.

---

## SECTION II.

*Trouver le côté droit ou parametre d'une parabole.*

LE parametre d'une parabole est en même proportion à une abscisse & à sa demi-ordonnée, que le parametre d'une ellipse à son grand & petit axe, & on peut le trouver par ce théorême.

### THEOREME.

*Comme une abscisse est à sa demi-ordonnée, ainsi cette demi-ordonnée est au parametre.*

Soit P = parametre ;

| | | |
|---|---|---|
| nous aurons | 1 | $Sa : ba :: ba : P$ } dans tous les points $a$, |
| Et | 2 | $SA : BA :: BA : P$ } & A pris dans l'axe. |
| 1 ∵ | 3 | $\frac{ba^2}{Sa} = P$, ou $Sa \times P = ba^2$ |
| 2 ∵ | 4 | $\frac{BA^2}{SA} = P$, ou $SA \times P = BA^2$ |
| 3 = 4 | 5 | $\frac{BA^2}{SA} = \frac{ba^2}{Sa}$, par l'axiome 5. |
| 5 × | 6 | $Sa \times BA^2 = SA \times ba^2$, ce qui donne cette |
| analogie | 7 | $Sa : ba^2 :: SA : BA^2$, la même que |

dans le 7[e] cas de la derniere démonstration. Donc P ( ainsi trouvé ) est le vrai parametre, par lequel on regle & l'on trouve toutes les ordonnées selon sa définition, sect. 4, chap. 1 ; car par le 3[e] cas $Sa \times P = ba^2$, & par le 4[e] $SA \times P = BA^2$ ; donc $\sqrt{SR \times P} = ba$, & $\sqrt{SA \times P} = BA$, & ainsi des autres ordonnées ; ou si les ordonnées sont données pour trouver leurs abscisses, on dira $P : ba :: ba : Sa$, & $P : BA :: BA : SA$, &c ; par conséquent $\frac{ba^2}{P} = Sa$, & $\frac{BA^2}{P}$, &c.

En faisant attention à ces proportions, il sera aisé de comprendre comment on peut trouver géométriquement le parametre, en cette maniere :

Joignez le point vertical S (*fig.* 137) de l'axe avec l'une des extrêmités d'une ordonnée, comme B ( ou *b* ) par une ligne droite SB ( ou S*b* ) & divisez cette ligne également par le problême 2, des élémens, marquant le point ou la ligne qui divise également, coupe l'axe, comme E ( ou *e* ), & avec le rayon SE ( ou S*e* ), décrivez un cercle comme dans la figure ci-dessus. La distance entre l'ordonnée & le point, ou la circonférence du cercle coupe l'axe, comme AR ( ou *ar* ) sera le vrai parametre requis ; car $SA : BA :: BA : AR$, & $Sa : ba :: ba : ar$, par le théor. 13. Donc $AR = P$, & $ar = P$, par le premier & second cas précédens.

### COROLLAIRE.

Par ces proportions du parametre, il est aisé de conclure & de démontrer le théorême suivant.

### THEOREME.

*Comme le parametre est à la somme de deux demi-ordonnées, ainsi la différence entre ces deux demi-ordonnées est à la différence de leurs abscisses.*

Supposons une droite menée en dedans de la parabole, comme *b* B parallele à son axe SA ; cette ligne ( *b* D ) sera

un diametre (par la définition 5, chap. 1.) qui produira ED (*fig.* 138) = AB + $ab$, & DB = AB − $ab$, & $b$D = SA − S$a$; on aura donc par ce Théorême P : ED :: DB : $b$D.

DEMONSTRATION.

| | | |
|---|---|---|
| 1°. | 1 | $SA = \frac{BA^2}{P}$ { par le second cas de la derniere démonstration. |
| Et | 2 | $Sa = \frac{ab^2}{P}$, par le premier cas de la même. |
| 1 − 2 | 3 | $SA - Sa = \frac{BA^2 - ba^2}{P}$ |
| 3 × 6 | 4 | $\overline{SA - Sa} \times P = BA^2 - ba^2$ |
| Mais | 5 | $BA^2 - ba^2 = \overline{BA + ba} \times \overline{BA - ba}$ |
| 4 = 5, 6 | 6 | $\overline{SA - Sa} \times P = \overline{BA + ba} \times \overline{BA - ba}$, ce qui donne l'analogie suivante. |
| 6, analogie | 7 | P : BA + $ba$ :: BA − $ba$ : SA − S$a$ |
| ou | 8 | P : ED :: DB : $b$D. |

Cette propriété particuliere de la parabole a été publiée pour la premiere fois, l'an 1684, par M. *Thomas Baker*, dans un Traité intitulé *la Clef géométrique*, où il a donné la construction & solution de toutes les équations affectées cubiques & biquadratiques, par une méthode générale, qu'il appelle *regle centrale*, & qui est tirée de cette propriété particuliere de la parabole.

---

## SECTION III.

### *Trouver le Foyer d'une parabole.*

LE foyer de chaque parabole est le point de son axe par où passe le parametre (voyez défin. 3, sect. 4, ch. 1). On peut donc trouver aisément sa distance au sommet de la parabole, soit par le parametre même, ou par toute autre ordonnée, & par son abscisse, en cette maniere :

Supposons

Supposons que le point F soit le foyer, S le sommet, l'ordonnée RFR le parametre, & $bab$ une autre ordonnée; nous aurons $SF = \frac{1}{4} P$, ou $= \frac{ba^2}{4Sa}$.

DEMONSTRATION.

| | | |
|---|---|---|
| 1°. | 1 | $SF$ (*fig.* 139) $\times P = FR^2$, par la sect. 2. |
| Donc | 2 | $FR = \frac{1}{2} P$; car l'ordonnée $RFR = P$, comme ci-devant. |
| 2 ⊙ 2 | 3 | $FR^2 = \frac{1}{4} PP = \frac{1}{2} P \times \frac{1}{2} P$ |
| 1, = 3 | 4 | $SF \times P = \frac{1}{4} PP$ |
| 4 ÷ P | 5 | $SF = \frac{1}{4} P$, comme par la défin. 4, sect. 4, chap. 1. |
| De plus | 6 | $\frac{ba^2}{Sa} = P$, par le 3e cas de la premiere démonstration, sect. 2. |
| Donc | 7 | $\frac{ba^2}{4SA} = \frac{1}{4} P$, &c. comme auparavant. *Q.E.D.* |

## SECTION IV.

*Décrire ou tracer une Parabole en plusieurs manieres.*

*Nota.* Il y a deux ou trois manieres de tracer une parabole avec des instrumens, par un mouvement continu : mais comme ces instrumens ou machines sont non seulement trop embarrassantes pour être maniées par un Commençant, mais encore un peu sujettes à erreur, j'ai mieux aimé faire voir comment on peut tracer cette figure par un nombre convenable de points, c'est-à-dire trouver ses ordonnées numériquement ou géométriquement, selon les quantités données; ce que l'on trouvera fort aisé, si l'on a bien compris les opérations des trois dernieres sections.

1°. Une ordonnée avec son abscisse étant données, on peut par leur moyen trouver autant d'ordonnées que l'on voudra prendre de points sur l'axe de la parabole (par la

sect. 1. ) & la courbe parabolique sera tracée par les extrêmités de toutes ces ordonnées, comme l'ellipse, sect. 4, chap. précédent.

2°. Si le parametre & une ordonnée, ou une abscisse sont données, on pourra par leur moyen trouver le nombre que l'on voudra d'ordonnées ( par la sect. 2. ), soit numériquement ou géométriquement.

3°. Si l'on a seulement la distance du foyer au sommet d'une parabole, on trouvera le nombre que l'on voudra d'ordonnées par son moyen ; car $SF = \frac{1}{4}P$ & $\frac{1}{2}P = FR$, comme dans la derniere section, & l'on aura comme SF est à $FR^2$ ; ainsi une autre abscisse ( comme S*a* ou S A, &c. ) est au quarré de sa demi-ordonnée ( qui est $ba^2$ ou $BA^2$ ) par la propriété générale de la parabole.

Quoique toutes ces méthodes de trouver les ordonnées soient assez faciles, cependant celle qui est tirée de la proposition suivante est beaucoup plus aisée & expéditive dans la pratique.

PROPOSITION.

*La somme d'une abscisse & de la distance du foyer au sommet est égale à la distance du foyer à l'extrêmité de l'ordonnée, qui est coupée par cette abscisse.*

Par exemple, soit S (*fig.* 140 ) le sommet d'une parabole, F son foyer, & A B une de ses demi-ordonnées appliquées à son axe S A. Je dis qu'en quelque endroit que l'on prenne le point A sur l'axe, on aura $SA + SF = FB$; par conséquent si $Sf = SF$, on aura $fA = FB$.

DEMONSTRATION.

| | | |
|---|---|---|
| 1°. | 1 | $SF = \frac{1}{4}P$, par le 7e cas de la sect. 3. |
| Donc | 2 | $fA = FA + \frac{1}{2}P$ par la construction précédente. |
| 2 ⊙ 2 | 3 | $fA^2 = FA^2 + FA \times P + \frac{1}{4}PP$ |
| De plus | 4 | $SA = FA + \frac{1}{4}P$, par la supposition & la figure. |

| | | |
|---|---|---|
| 4 × P | 5 | $SA \times P = FA \times P + \frac{1}{4} PP$ ; mais $SA \times P = AB^2$ |
| Donc | 6 | $AB^2 = FA \times P + \frac{1}{4} PP$ |
| 3 — 6 | 7 | $fA^2 - AB^2 = FA^2$ ; par conſéquent $fA^2 = FA^2 + AB^2$ |
| mais | 8 | $FA^2 + AB^2 = FB^2$, par le théor. 11. |
| Donc | 9 | $fA^2 = FB^2$, |
| & | 10 | $fA = FB$. |

Cette propoſition étant bien compriſe, pourra aiſément s'appliquer à la pratique, en ſuppoſant la diſtance du foyer, ou quelqu'autre quantité donnée qui puiſſe faire connoître cette diſtance.

Menez une droite pour repréſenter l'axe de la parabole & de ſon point vertical S, coupez la diſtance du foyer en haut & en bas, c'eſt-à-dire faites $Sf = SF$, diſtance du foyer donné au ſommet, comme dans la figure 140 : enſuite par cette propoſition, il eſt évident que ſi vous menez un grand nombre d'ordonnées à angles droits ſur l'axe, la vraie diſtance entre le point $f$ hors de la parabole, & chacune de ces ordonnées étant coupée, depuis le point F juſqu'à la même ordonnée, déterminera le vrai point de cette ligne par où la courbe doit paſſer, c'eſt-à-dire qu'elle marquera la vraie limite ou longueur de l'ordonnée, comme en B dans la figure ci-deſſus.

En procédant de la même maniere d'une ordonnée à l'autre, on trouvera très-promptement & très-exactement autant d'ordonnées ( ou plutôt autant de leurs points extrêmes B ) que l'on voudra, & joignant tous ces points par une courbe, avec adreſſe, elle formera la parabole requiſe.

*Nota.* Plus on trouvera d'ordonnées ( ou de points ), & plus elles ſeront proches l'une de l'autre, plus auſſi on tracera exactement & facilement la courbe de la parabole. On doit faire la même remarque pour toute autre courbe que l'on trace par des points.

## SECTION V.

*Mener une tangente à un point donné de la courbe parabolique.*

IL eſt fort aiſé de mener des tangentes à cette courbe ; car ſoit S ſon ſommet, B le point d'attouchement ( c'eſt-à-dire le point ou la tangente doit toucher la courbe ), & P le point où elle doit couper ( ou rencontrer ) l'axe prolongé de la parabole. Si du point d'attouchement B, on mene une demi-ordonnée B A à angles droits ſur l'axe S A en quelque endroit que le point A tombe ſur l'axe, on aura S P = S A.

### DEMONSTRATION.

Menez la demi-ordonnée *b a* (*fig.* 141 ), vous aurez les ▲ B A P & *b a* P ſemblables. Soit $y$ = A S, l'abſciſſe & $z$ = S P. Prenez $x$ = A *a*, diſtance entre les deux demi-ordonnées, que l'on ſuppoſe infiniment proches, comme dans l'ellipſe.

| | | |
|---|---|---|
| Enſuite | 1 | $y+z : BA :: y+z+x : ba$, par le th. 13. |
| 1, ou | 2 | $y+z : y+z+x :: BA : ba$. ( Voyez le chap. 7 de l'Algebre, ſect. 1. |
| De plus | 3 | $y : BA^2 :: y+x : ba^2$, par le théorême de la ſect. 1. |
| 3, ou | 4 | $y : y+x :: BA^2 : ba^2$ |
| 2 en □ | 5 | $yy+2yz+zz : yy+2yz+zz+2yx+2zx+xx :: BA^2 : ba^2$ |
| 4, 5 | 6 | $y : y+x :: yy+2yz+zz : yy+2yz+zz+2yx+2zx+xx$ |
| 6 ∵ ÷ $y$ | 7 | $yy+2yz+zz+yx+2zx+\frac{zzx}{y} = yy+2yz+zz+2yx+2zx+xx$, |
| c'eſt-à-dire | 8 | $\frac{zzx}{y} = yx+xx$ ; partant $\frac{zz}{y} = y+x$. |
| Suppoſons | 9 | $x=0$, pour le rejetter comme dans l'*ellipſe*. |
| Donc | 10 | $\frac{zz}{y} = y$, & par conſéquent $zz = yy$ |
| 10 ▱ 2 | 11 | $z=y$, c'eſt-à-dire S P = S A. *Q. E. D.* |

# CHAPITRE IV.

## *Des principales propriétés de l'Hyperbole.*

*Nota.* TOUTE partie de l'axe de l'hyperbole qui est interceptée entre son sommet & une ordonnée (ou le diametre intercepté) se nomme *abscisse*, comme dans la parabole.

## SECTION PREMIERE.

LE plan de chaque hyperbole est proportionné par ce Théorême général.

### THEOREME.

*Comme la somme du grand axe & d'une abscisse, multipliée par cette abscisse, est au quarré de sa demi-ordonnée, ainsi la somme du grand axe & d'une autre abscisse, multipliée par cette abscisse, est au quarré de sa demi-ordonnée.*

C'est-à-dire si T S (*fig.* 142) est le grand axe, & S$a$, S A les abscisses, $ba$, B A les demi-ordonnées ; on aura $Ta = TS + Sa$, $TA = TS + SA$, & $Ta \times Sa : ba^2 :: TA \times SA : BA^2$, c'est-à-dire $\overline{TS+Sa} \times Sa : ba^2 :: \overline{TS+SA} \times SA : BA^2$.

### DEMONSTRATION.

Soit H V G (*fig.* 143) un cone droit coupé en deux parties par la droite S A. Le plan de cette section sera une hyperbole (par la sect. 5, chap. 1,) dans laquelle S A est l'axe ou diametre intercepté, $bab$ & B A B les ordonnées appliquées à angles droits (comme dans la parabole) & T S le grand diametre.

De plus, si le cone est supposé coupé par $hg$ parallè-

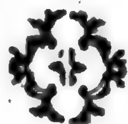
lement à sa base HG, ce sera encore le diametre d'un cercle, &c. comme dans l'ellipse & la parabole.

Les $\triangle$ $Sga$ & $SGA$ seront semblables, aussi-bien que les $\triangle$ $Tah$ & $TAH$;

| | | |
|---|---|---|
| on aura donc | 1 | $Sa : ag :: SA : AG$ |
| & | 2 | $Ta : ah :: TA : AH$ |
| 1 ∵ | 3 | $Sa \times AG = SA \times ag$ |
| 2 ∵ | 4 | $Ta \times AH = TA \times ah$ |
| 3 × 4 | 5 | $Sa \times Ta \times AG \times AH = SA \times TA \times ag \times ah$. |
| Mais | 6 | $ag \times ah = ab^2$ |
| & | 7 | $AG \times AH = AB^2$, par le lemme des définitions. |
| 5, 6, 7 | 8 | $Sa \times Ta \times AB^2 = SA \times TA \times ab^2$; ce qui donne |
| 8, l'analogie | 9 | $Sa \times Ta : ab^2 :: SA \times TA : AB^2$. *Q.E.D.* |

Ces proportions sont la propriété générale de chaque hyperbole, & ne different de celle de l'ellipse que par les signes + & —, comme on le voit clairement dans toutes les proportions suivantes; c'est-à-dire que si l'on suppose qne T S est le grand diametre commun aux deux sections (l'ellipse & l'hyperbole) comme à la *fig.* 144.

On aura dans l'ellipse $\overline{TS - Sa} \times Sa : ab^2 :: \overline{TS - SA} \times SA : AB^2$ (*sect.* 1, chap. 2.); & dans l'hyperbole, on aura $\overline{TS + Sa} \times Sa : ab^2 :: \overline{TS + SA} \times SA : AB^2$, comme ci-devant; & par conséquent tout ce qu'on peut chercher dans l'hyperbole peut se trouver (dans un sens) comme dans l'ellipse, ayant égard au changement des signes.



## SECTION II.

*Trouver le côté droit ou parametre de l'hyperbole.*

PRenez dans la derniere proportion l'un des antécédens avec son conséquent, c'est-à-dire ou $Ta \times Sa : ab^2$, ou $TA \times SA : AB^2$; prenez pour troisiéme terme le grand diametre TS, & le quatriéme proportionnel (comme dans l'ellipse) sera le parametre, en cette maniere :

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $Ta \times Sa : ab^2 :: TS : \frac{ab^2 \times TS}{Ta \times Sa}$ = parametre, que je nomme P (comme dans la parabole). |
| Donc | 2 | $TS : P :: Ta \times Sa : ab^2$ |
| Mais | 3 | $Ta \times Sa : ab^2 :: TA \times SA : AB^2$; donc |
| 2, 3 | 4 | $TS : P :: TA \times SA : AB^2$, &c. |

Par conséquent P est le vrai côté droit ou parametre, par lequel on trouve toutes les ordonnées, selon sa définition dans le chap. 1.

Et parce que $TS + Sa = Ta$, prenons $TS + Sa$ pour $Ta$, & nous aurons $\frac{ab^2 \times TS}{TS \times Sa \times Sa^2} = P$; & dans l'ellipse $\frac{ab^2 \times TS}{TS \times Sa - Sa^2} = P = LR$.

## SECTION III.

*Trouver le Foyer d'une hyperbole.*

LE foyer étant le point dans l'axe de l'hyperbole, par lequel le parametre doit passer (comme dans l'ellipse & la parabole), on le trouvera par ce théorême.

### THEOREME.

*Au rectangle, sous la moitié du grand diametre & la moi-*

*tié du parametre, ajoutez le quarré de la moitié du grand diametre, la racine quarrée de cette somme sera la distance du foyer au centre de l'hyperbole.*

DEMONSTRATION.

Soit F le foyer (*fig.* 145), nous aurons $FR = \frac{1}{2}P$. Soit $TC = CS$ la moitié du grand diametre. Le point C se nomme *centre de l'hyperbole* (pour une raison que nous donnerons ci-après).

Soit de plus $CS = d$, & $SF = x$.

| | | |
|---|---|---|
| On aura | 1 | $2d : P :: \overline{2d + x} \times x : \frac{1}{4}PP$, |
| c'est-à-dire | 2 | $TS : P :: \overline{TS + SF} \times FS : FR^2$ |
| 1 ∵ | 3 | $\frac{1}{2}dP = 2dx + xx$ |
| 3 + $dd$ | 4 | $dd + \frac{1}{2}dP = dd + 2dx + xx$ |
| 4 ▱ 2 | 5 | $\sqrt{dd + \frac{1}{2}dP} = d + x = FC$ |
| ou 5, — $d$ | 6 | $\sqrt{dd + \frac{1}{2}dP} - d = x = SF$. |

Dans l'ellipse on a $2d : P :: \overline{2d - x} \times x : \frac{1}{4}PP$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}dP = 2dx - xx$, &c.

La construction géométrique de ce dernier théorême se fait aisément en cette maniere :

Prenez $Sx$ (*fig.* 146) $= \frac{1}{2}P$, ou moitié du parametre, & soit $CS = d$, comme ci-devant.

Sur $Cx$ (comme diametre), décrivez un cercle, & par S, sommet de l'hyperbole, menez une droite $nSN$ à angles droits sur $Cx$. Joignez les points CN par une droite, & vous aurez $CN = d + x = FC$;

| | | |
|---|---|---|
| Car | 1 | $CS : SN :: SN : Sx$; |
| c'est-à-dire | 2 | $d : SN :: SN : \frac{1}{2}P$ |
| 2 ∵ | 3 | $\frac{1}{2}dP = SN^2$ |
| Mais | 4 | $dd + SN^2 = CN^2$ |
| 3, 4 | 5 | $dd + \frac{1}{2}dP = CN^2$ |
| 5 ▱ 2 | 6 | $\sqrt{dd + \frac{1}{2}dP} = CN = d + x$, &c. |

Nous n'avons pas seulement trouvé ici la distance du foyer de l'hyperbole à son centre C, ou à son sommet S, mais encore la ligne droite, qu'on nomme ordinairement *diametre conjugué*, & qui est la ligne $nSN$, laquelle est en même proportion au grand diametre & au parametre de l'hyperbole, que le diametre conjugué de l'ellipse à son grand diametre & à son parametre; car dans l'ellipse $TS : Nn :: Nn : LR$, par la sect. 2, chap. 2; par conséquent $\frac{1}{2} TS : \frac{1}{2} Nn :: \frac{1}{2} Nn : \frac{1}{2} LR$. Mais $\frac{1}{2} TS = d$, $\frac{1}{2} Nn = SN$, & $\frac{1}{2} LR = \frac{1}{2} P$.

Donc $d : SN :: SN : \frac{1}{2} P$, comme au second cas ci-devant dans l'hyperbole.

On verra mieux dans la suite quel est l'usage de cette ligne $nSN$ par rapport à l'hyperbole.

---

## SECTION IV.

### *Décrire une hyperbole sur un plan.*

Pour décrire aisément une hyperbole sur un plan, il est à propos de démontrer la proposition suivante, qui ne differe que par les signes de celle de l'ellipse, sect. 3, ch. 2.

### PROPOSITION.

*Si des foyers d'une hyperbole on mene deux lignes droites qui se rencontrent mutuellement dans un point de la courbe hyperbolique, la différence de ces lignes dans l'ellipse, qui est leur somme, sera égale au grand diametre.*

C'est-à-dire si F est le foyer, & si l'on fait $Cf = CF$ (comme dans la figure 146), le point $f$ sera un foyer hors de la section (ou plutôt le foyer de la section opposée), & l'on aura $fB - FB = TS$.

### DEMONSTRATION.

Soit $fC$ ou $CF = z$, & $SA = x$, $CS$ ou $TC = d$, comme ci-devant; nous aurons $fA = d + x + z$, &

$FA = d + x - z$. De plus, soit $FB = h$, & $fB = b$. Nous aurons par la proposition, $2d = h - b$.

De la substitution de ces lettres, il suit que

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $dd + 2dx + xx + 2dz + 2xz + zz = fA^2$ |
| Et | 2 | $dd + 2dx + xx - 2dz - 2xz + zz = FA^2$ |
| Mais | | $fA^2 + AB^2 = fB^2$, & $FA^2 + AB^2 = FB^2$ |
| par le 4 du dern. | 3 | $dd + \frac{1}{2} dP = cF^2 = zz$ |
| $3 - dd$ | 4 | $zz - dd = \frac{1}{2} dP$ |
| $4 \div \frac{1}{2} d$ | 5 | $\frac{zz - dd}{\frac{1}{2} d} = P$ |
| De plus | 6 | $2d : P :: \overline{2d + x} \times x : AB^2$, par la propriété générale. |
| 5, 6 | 7 | $2d : \frac{zz - dd}{\frac{1}{2} d} :: 2dx + xx : AB^2$ |
| 7 ∴ | 8 | $\frac{2dzzx + zzxx - 2d^3x - ddxx}{dd} = AB^2$ |
| $1 + 8$ | 9 | $dd + 2dx + xx + 2dz + 2xz + zz + \frac{2dzzx + z^2xx - 2d^3x - ddxx}{dd} = fA^2 + AB^2 = hh$ |
| $2 + 8$ | 10 | $dd + 2dx + xx - 2dz - 2xz + zz + \frac{2dzzx + z^2xx - 2d^3x - ddxx}{dd} = FA^2 + AB^2 = bb$ |
| $9 \times dd$ | 11 | $d^4 + 2d^3z + 2ddxz + ddzz + 2dzzx + z^3xx = ddhh$ |
| $10 \times dd$ | 12 | $d^4 - 2d^3z - 2ddxz + ddzz + 2dzzx + z^2xx = ddbb$ |
| 11 ▱ 2 | 13 | $dd + dz + xz = dh$ |
| 12 ▱ 2 | 14 | $dd - dz - zx = db$ |
| $13 \div d$ | 15 | $d + z + \frac{zx}{d} = h$ |
| $14 \div d$ | 16 | $d - z - \frac{zx}{d} = b$, ou $z + \frac{zx}{d} - d = b$ |
| $15 - 16$ | 17 | $2d = h - b$. |

Quoique la premiere équation du 16$^e$ cas soit par elle-même impossible, parce que $z$ est plus grand que $d$ (par le 4), cependant il suit delà que la différence entre $d$ & $z + \frac{zx}{d}$ donne la vraie valeur de $b$.

Mais comme je ne veux laisser aux Commençans aucun lieu de douter sur le changement de l'équation $d - z - \frac{zx}{d} = b$, en celle de $z + \frac{zx}{d} - d = b$, il est à propos d'éclaircir tout cela par les nombres, où j'espere qu'on verra clairement que $h - b = TS$.

Soit pour cela $TS = 2d = 12$; donc $d = 6$. Soit l'abscisse $SA = x = 4$, & la demi-ordonnée $AB = 3$.

| | | |
|---|---|---|
| D'abord | 1 | $\overline{TS + SA} \times SA : AB^2 :: TS : P$, par la sect. 2. |
| 1, c'est-à-dire | 2 | $\overline{12+4} \times 4 = 64 : 9 :: 12 : 1{,}6875 = P$. |
| De plus | 3 | $\sqrt{dd + \frac{1}{2} dP} = CF$, par la sect. 3. |
| 3, c'est-à-dire | 4 | $\sqrt{36 + 5{,}0625} = 6{,}408 = CF = z$. |
| Donc | 5 | $d + x + z = 6 + 4 + 6{,}408 = 16{,}408 = fA$ |
| & | 6 | $d + x - z = 6 + 4 - 6{,}408 = 3{,}592 = FA$ |
| 5 ⊙ 2 | 7 | $269{,}2224 = fA^2$ |
| 6 ⊙ 2 | 8 | $12{,}9024 = FA^2$ |
| Mais | 9 | $9 = AB^2$; car $AB = 3$, par la supposit. |
| 7 + 9 | 10 | $278{,}2224 = fA^2 + AB^2 = fB^2$ |
| 8 + 9 | 11 | $21{,}9024 = FA^2 + AB^2 = FB^2$ |
| 10 ▱ 2 | 12 | $16{,}68 = fB$ |
| 11 ▱ 2 | 13 | $4{,}68 = FB$ |
| 12 — 13 | 14 | $12{,}00 = fA - FB = TS$, ce qu'il falloit prouver. |

---

Si l'on comprend bien cette proposition, on verra aisément comment on peut décrire fort promptement la courbe hyperbolique par des points, lorsque le grand

diametre & le foyer sont donnés ( ou d'autres quantités qui peuvent faire connoître l'un & l'autre comme dans les regles précédentes ) en cette maniere :

Menez une ligne droite à volonté, & marquez-y la longueur donnée T S (*fig.* 147 ) du grand diametre ; de ses deux extrêmités, prenez $Tf = SF$, distance donnée des foyers ( le point $f$ en dehors, & F en dedans de la section, comme ci-devant ) ; ensuite du point $f$ ( comme centre ) avec un rayon plus grand que T S, décrivez un arc de cercle, & de ce rayon ôtez T S, grand diametre, pour faire de leur différence un second rayon, avec lequel du point F, en dedans de la section, vous décrirez un autre arc qui coupera le premier en B ; le point B sera dans la courbe hyperbolique par la derniere proposition ; & par conséquent il est clair qu'en continuant de cette maniere on trouvera autant de points ( B ) qu'on en voudra ( plus on en aura, & plus ils seront près les uns des autres, mieux ce sera ), lesquels étant joints ensemble par une courbe ( comme dans la parabole ), formeront l'hyperbole requise.

Il y a plusieurs autres manieres de tracer l'hyperbole sur un plan, dont l'une est de trouver un nombre suffisant d'ordonnées, comme par la section 1, &c ; mais je crois qu'il n'y en a point d'aussi aisée & d'aussi expéditive que cette méthode méchanique. Je supprimerai donc, pour abréger, toutes les autres, les abandonnant à la pratique des Commençans, comme pouvant se tirer aisément de ce qu'on a dit jusqu'ici.

---

## SECTION V.

### *Mener une Tangente à un point donné de la courbe hyperbolique.*

ON peut aisément mener une tangente qui touche l'hyperbole dans un point donné, par le moyen d'un théorême, comme dans l'*ellipse*, sect. 6, chap 2.

Soit $\begin{cases} D = TS, \text{ grand diametre } (\textit{fig.}\ 148) \\ P = \text{parametre}, \\ y = SA, \text{ l'abſciſſe.} \end{cases}$

Et $z = AP$, diſtance entre l'ordonnée & le point du diametre, coupé par la tangente : Si $y$ eſt donnée, on trouvera $z$ par ce Théorême $\frac{Dy + yy}{\frac{1}{2}Dy + y} = z$ (qui ne differe que par les ſignes de celui de l'ellipſe. Voyez ſect. 6, chap. 2) ; ou ſi $z$ eſt donné, on trouvera $y$ par ce Théorême $\sqrt{\frac{DD + zz}{4}} + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}Dy$.

DEMONSTRATION.

Menez la demi-ordonnée $ba$, comme dans la figure ci-deſſus, & ſoit $x = Aa$, eſpace infiniment petit entre les deux demi-ordonnées, comme dans l'ellipſe, &c.

| | | |
|---|---|---|
| Enſuite | 1 | $D : P :: D\overline{yy + yy} : AB^2$ |
| c'eſt-à-dire | 2 | $TS : P :: \overline{TS + SA} \times SA : AB^2$ |
| 1 ∵ | 3 | $\frac{DyP + yyP}{D} = AB^2.$ |
| De plus | 4 | $D : P :: P\overline{y + yy - 2yx} - Dx + xx : ab^2$ |
| c'eſt-à-dire | 5 | $TS : P :: \overline{TS + Sa} \times Sa : ab^2$ |
| 4 ∵ | 6 | $\frac{DyP + yyP - 2yxP - DxP + xxP}{D} = ab^2.$ |
| Par la figure | 7 | $\begin{cases} z : AB :: z - x : ab, \text{ c'eſt-à-dire} \\ PA : AB :: Pa : ab \end{cases}$ |
| 7. en □ | 8 | $zz : AB^2 :: zz - 2zx + xx : ab^2.$ |
| Suppoſons | 9 | $x = 0$, pour le rejetter (comme dans l'ellipſe) ; |
| Donc 3, 8 | 10 | $zz : \frac{DyP + yyP}{D} :: zz - 2z : ab^2$ |
| 10 ∵ | 11 | $\frac{DyPzz + yyPzz - 2DyPz - 2yyPz}{Dzz} = ab^2$ |
| 6, 11 | 12 | $\begin{cases} \frac{DyP + yyP - 2yP - D = P}{D} = \\ \frac{DyPzz + yyPzz - 2DyPz - 2yyPz}{Dzz} \end{cases}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 12 réduit | 13 | $\frac{1}{2}Dz + zy = Dy + yy$ |
| 13, en analogie | 14 | $\frac{1}{2}D + y : y :: D + y : z$, ou CA : SA :: TA : AP. |
| $13 \div \overline{\frac{1}{2}D + y}$ | 15 | $z = \frac{Dy + y}{\frac{1}{2}D + y}$, qui est le 1er théor. |
| 13 — $zy$ | 16 | $yy + Dy - zy = \frac{1}{2}Dz$ |
| 16 □ C | 17 | $yy + Dy - zy + \frac{DD - 2Dz + zz}{4} = \frac{DD + zz}{4}$ |
| 17 ▱ 2 | 18 | $y + \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}z = \sqrt{\frac{DD + zz}{4}}$ |
| 18 ± | 19 | $y = \sqrt{\frac{DD + zz}{4}} + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}D$, ce qui est le 2e théorême. *Q. E. D.* |

La construction géométrique du premier de ces Théorêmes est fort aisée ; car par le 14e cas, il est évident qu'il y a trois lignes données pour en trouver une quatriéme proportionnelle ( par le probl. 3 des Elémens de Géométrie ).

### SCHOLIE.

Par la comparaison que nous avons faite dans tout ce chapitre entre l'hyperbole & l'ellipse, il est aisé ( même aux Commençans ) de comprendre le rapport qui se trouve entre ces deux figures ; mais pour mieux concevoir ce que l'on entend par le *centre* & par les *assymptotes* d'une *hyperbole*, il faut considerer la figure 149, qui démontre ( même par l'inspection seule ) que les *hyperboles* opposées sont toujours semblables, parce qu'elles ont toujours le même grand diametre commun, &c. ( Voyez sect. 1 de ce chap. ), & que le point du milieu ou centre commun de l'ellipse est le centre commun aux quatre hyperboles conjuguées.

Les deux diagonales du parallelogramme rectangle, qui est circonscrit à l'ellipse ( ou inscrit aux quatre hy-

perboles ) étant continuées, deviennent les aſſymptotes à ces hyperboles, qui ont été définies, chap. 1, ſect. 5, définit. 4.

---

## SECTION VI.

### *Tracer les Aſſymptotes d'une hyperbole, &c.*

AYant trouvé le parametre, par la ſect. 2, & le diametre conjugué *n* S N dans ſa vraie poſition, par la ſect. 3, on menera par le centre C de l'hyperbole, & par les extrêmités *n* N de ſon diametre conjugué deux lignes droites, comme C N & C *n* continuées à l'infini ( comme à la figure 150 ) & ces lignes ſeront les aſſymptotes requiſes; c'eſt-à-dire que ce ſeront deux droites, telles qu'étant prolongées à l'infini, elles s'approcheront continuellement des côtés de l'hyperbole, ſans jamais les toucher.

DEMONSTRATION.

Soient les demi-ordonnées $ab$ & A B appliquées perpendiculairement à l'axe T A, & prolongées de part & d'autre juſqu'aux aſſymptotes, comme en $fg$ & F G, les △ C S N, C$ag$ & C A G ſeront ſemblables.

Soit $d = CS = TC$, & $P =$ parametre, comme auparavant; $x = Sa$, $y = SA$ les abſciſſes, on aura $d + x = Ca$, & $d + y = CA$.

| | | |
|---|---|---|
| Enſuite | 1 | $d : SN :: d+x : ag$, ou $CS : SN :: Ca : ag$ |
| 1 en □ | 2 | $dd : SN^2 :: dd + 2dx + xx : ag^2$ |
| Mais | 3 | $\frac{1}{2} dP = SN^2$, par la ſect. 3. |
| 2, 3 ∵ | 4 | $\frac{ddP + 2dxP + xxP}{2d} = ag^2$ |
| De plus | 5 | $2d : P :: 2dx + xx : ab^2$, par la ſect. 2. |
| 5 ∵ | 6 | $\frac{2dxP + xxP}{2d} = ab^2$ |
| 4 — 6 | 7 | $\frac{dP}{2} = ag^2 - ab^2$ |

| | | |
|---|---|---|
| Mais | 8 | $ag + ab = bf$ } par la figure |
| | 9 | $ag - ab = bg$ } |
| 8 × 9 | 10 | $ag^2 - ab^2 = bf \times bg$ |
| 7, 10 | 11 | $bf \times bg = \frac{1}{2} d\mathrm{P}$ |
| De plus | 12 | $dd : \mathrm{SN}^2 :: dd + 2dy + yy : \mathrm{AG}^2$, c'est-à-dire $\mathrm{CS}^2 : \mathrm{SN}^2 :: \mathrm{CA} : \mathrm{AG}^2$ |
| 5, 12 ∵ | 13 | $\frac{dd\mathrm{P} + 2dy\mathrm{P} + yy\mathrm{P}}{2d} = \mathrm{AG}^2$ |
| Mais | 14 | $2d : \mathrm{P} :: 2dy + yy : \mathrm{AB}^2$, par la sect. 2. |
| 14 ∵ | 15 | $\frac{2dy\mathrm{P} + yy\mathrm{P}}{2d} = \mathrm{AB}^2$ |
| 13 — 15 | 16 | $\frac{d\mathrm{P}}{2} = \mathrm{AG}^2 - \mathrm{AB}^2$ |
| De plus | 17 | $\mathrm{AG} + \mathrm{AB} = \mathrm{BF}$ } par la figure. |
| | 18 | $\mathrm{AG} - \mathrm{AB} = \mathrm{BG}$ } |
| 17 × 18 | 19 | $\mathrm{AG}^2 - \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BF} \times \mathrm{BG}$ |
| 16, 19 | 20 | $\frac{d\mathrm{P}}{2} = \mathrm{BF} \times \mathrm{BG}$ |
| 11 & 20 ∵ | 21 | $bg = \frac{\frac{1}{2} d\mathrm{P}}{bf}$, & $\mathrm{BG} = \frac{\frac{1}{2} d\mathrm{P}}{\mathrm{BF}}$ |

Il est évident par le dernier cas, que les assymptotes sont plus près de l'hyperbole en G qu'en $g$, & que par conséquent elles s'approchent continuellement de cette courbe; car BF ) $\frac{1}{2} d\mathrm{P}$ ( = BG est moindre que $bf$) $\frac{1}{2} d\mathrm{P}$ ( = $bg$, parce que le diviseur BF est plus grand que le diviseur $bf$, & cela doit être ainsi de quelque façon que les assymptotes soient prolongées, par la nature des triangles.

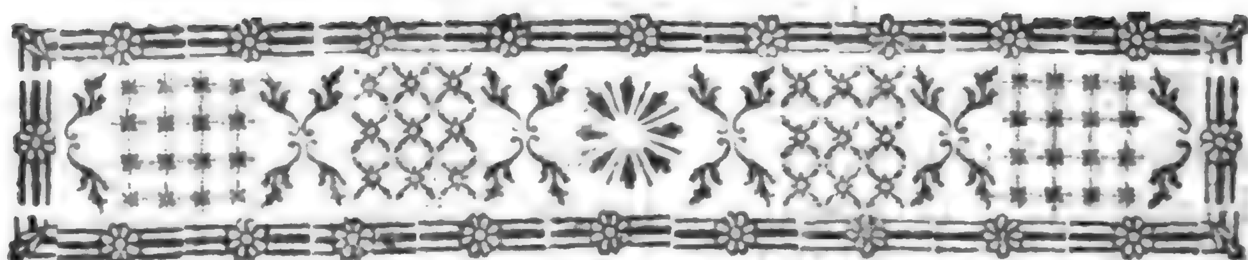
De plus, par le 7ᵉ & 16ᵉ cas, il est évident que les assymptotes ne peuvent jamais rencontrer réellement la courbe de l'hyperbole, ou se confondre avec elle, quand même elle s'étendroit à l'infini, parce que $\frac{1}{2} d\mathrm{P}$ sera toujours la différence entre le quarré d'une demi-ordonnée & le quarré de celle où l'assymptote est prolongée.

COROLLAIRE.

Delà il ſuit que chaque ligne droite qui paſſe par le centre, & tombe en dedans des aſſymptotes, coupera l'hyperbole ; & toutes ces lignes ſe nomment *diametres* (comme dans l'ellipſe), parce que les propriétés de l'hyperbole & de l'ellipſe ſont les mêmes.

*Nota*. Chaque diametre dans l'ellipſe, la parabole & l'hyperbole, a ſon parametre particulier & ſes ordonnées ; leſquelles étant bien maniées, ſuffiroient pour fournir la matiere à un grand volume, ſi l'on vouloit conſidérer tous les rapports que ces lignes ont enſemble, auſſi-bien que la nature & les propriétés des figures qui peuvent être inſcrites & circonſcrites à toutes les ſections, avec les proportions d'une hyperbole à une autre, &c : mais ce que j'en ai dit ſuffit pour une introduction ; ainſi je n'irai pas plus avant, & je ſerai très-ſatisfait ſi l'on a bien compris tout ce que j'en ai dit juſqu'ici, parce que le reſte paroîtra fort aiſé à ceux qui voudront faire de plus grands progrès dans cette ſcience.

*Fin de la quatriéme Partie.*



# LE GUIDE DES JEUNES MATHÉMATICIENS.

## CINQUIEME PARTIE.

LA maniere de trouver une *quantité* particuliere (comme *ligne*, *surface* ou *solide*) par une progression réguliere, ou par une suite de quantités qui s'approchent continuellement de celle que l'on cherche, & qui étant continuée à l'infini, lui devient enfin parfaitement égale, c'est ce qu'on appelle communément *Arithmétique des Infinis*. Je vais en donner briévement les principes dans les *Lemmes* suivans, pour les appliquer ensuite à la pratique, & pour trouver les surfaces & les solides géométriques que nous n'avons pas encore examinés.

### LEMME I.

Dans une suite de nombres égaux (représentant des lignes ou d'autres quantités) comme 1 . 1 . 1 . 1, &c. ou 2 . 2 . 2 . 2, &c ou 3 . 3 . 3 . 3, &c. si l'un des termes est multiplié par le nombre des termes, le produit sera la somme de tous les termes compris dans cette suite.

Cela est si clair & se comprend si aisément, qu'il est inutile d'en donner des exemples.

### LEMME II.

Si la ſuite des nombres en progreſſion arithmétique commence par zero, & que la différence commune ſoit 1, comme 0, 1, 2, 3, 4, &c. (repréſentant une ſuite de lignes ou de racines qui commencent par un point); ſi le dernier terme eſt multiplié par le nombre des termes, le produit ſera double de la ſomme de tous les termes. C'eſt-à-dire ſoit D = au dernier terme, N = nombre des termes, & S = ſomme de tous les termes, on aura ND = 2S; par conſéquent $\frac{1}{2}$ND = S, ou la moitié autant de fois le plus grand terme qu'il y a de termes dans la ſérie.

Ainſi $\left\{\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}\right. = \frac{10}{20}$ $\left\{\begin{array}{l} = \text{ſomme de tous les termes} = \frac{1}{2}ND \\ = ND, \end{array}\right.$

Et cela arrivera toujours de même, quelque grand que ſoit le nombre des termes, par le corol. 1, ſect 1, chap. 6 de l'Algebre.

### LEMME III.

Si une ſuite de quarrés, dont les côtés ou racines ſont en progreſſion arithmétique, commençant par zero, &c. (comme dans le dernier lemme) eſt continuée à l'infini, le dernier terme, multiplié par le nombre des termes, ſera triple de la ſomme de tous les termes, ou NDD = 3S, & $\frac{1}{3}$NDD = S; c'eſt-à-dire que la ſomme de tous les termes d'une telle ſuite ſera un tiers du dernier ou plus grand terme, auſſi ſouvent répété qu'il y a de termes dans la ſérie.

*Exemples en nombres quarrés.*

1 $\left\{\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.\right.$

2 $\left\{\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18};\right.$

$$3\left\{\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}\right.$$
&c.

On voit évidemment par ces exemples, qu'à mesure que le nombre des termes devient plus grand, la fraction ou l'excès au dessus du tiers diminue, cet excès étant toujours $\frac{1}{6N-6}$, & si l'on suppose que la suite est continuée à l'infini, cet excès deviendra infiniment petit, c'est-à-dire qu'en effet il se réduit à rien : par conséquent $\frac{1}{3}NDD$ doit être pris pour la somme vraie ou parfaite d'une telle suite infinie de quarrés.

## *LEMME IV.*

Si une suite de cubes, dont les racines sont en progression arithmétique, commençant par zero, &c. (comme auparavant) est continuée à l'infini, la somme de toute la suite sera $\frac{1}{4}NDDD=S$, c'est-à-dire un quart du dernier ou plus grand terme aussi souvent répété qu'il y a de termes.

### *Exemples en nombres cubiques.*

Si 0, 1, 2, 3, &c. sont les racines des cubes, nous aurons

$$1\left\{\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27}=\frac{36}{108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}.\right.$$

$$2\left\{\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64}=\frac{100}{320}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right.$$

$$3\left\{\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125}=\frac{225}{750}=\frac{45}{150}=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}.\right.$$

On voit clairement par ces exemples, qu'à mesure que le nombre des termes augmente dans la série, la fraction ou excès au-dessus de $\frac{1}{4}$ diminue, cet excès étant toujours $\frac{1}{4N-4}$, & si l'on suppose que la suite est continuée à l'infini, il deviendra infiniment petit, ou plutôt il s'anéantira, comme dans le dernier lemme ; par con-

séquent $\frac{1}{4}$ N D D D doit être pris pour la somme vraie & parfaite de tous les termes d'une suite infinie de cubes.

## *Lemme V.*

Si une suite de quarré-quarrés, dont les racines sont en progression arithmétique, commençant par zero, &c. (comme ci-devant) est continuée à l'infini, la somme de tous les termes d'une telle suite, sera $\frac{1}{5}$ N $D^4$.

Cette vérité se manifestera de la même maniere que dans les lemmes précédens, & ainsi de suite pour les puissances plus élevées. Mais si l'on veut avoir une démonstration plus détaillée de toutes ces suites, on la trouvera avec toute la satisfaction possible dans les chap. 78 & 79 de l'*Histoire de l'Algebre* du Docteur *Wallis*; ce grand homme conclut en cette maniere :

» Ayant ainsi démontré que dans une progression de » quantités latérales (ou arithmétiquement proportion» nelles) commençant par o, la somme de 2, 3, 4, 5, 6 » termes est toujours égale à la moitié du plus grand » terme répété autant de fois, & n'y ayant aucune rai» son de douter que cela ne soit vrai dans une pro» gression de 7, 8, 9, 10, &c. termes, nous conclurons » que la chose doit être ainsi, quand même le nombre » des termes seroit supposé infini.

» De plus, ayant fait voir dans la progression de leurs » quarrés, que dans 2, 3, 4, 5, 6 termes, la som» me est toujours plus grande que le tiers du plus grand » terme répété autant de fois, & que l'excès est toujours » une partie aliquote du plus grand terme, dont le dé» nominateur est six fois le nombre des termes moins 1 » (comme si le nombre des termes est 2, c'est $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; si » 3, c'est $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$; si 4, c'est $\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$; si 5, c'est $\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$ » du plus grand terme répété autant de fois (& ainsi de » suite) nous pourrons fort bien conclure (n'y ayant » aucune raison de douter que cela ne soit également » vrai dans tout le reste) que la chose doit être ainsi, » quelque grand que soit le nombre des termes; & con-

» me cet excès, à mesure que le nombre des termes augmente, devient infiniment petit (ou plus petit qu'aucune quantité assignable) nous avons lieu de conclure par la méthode des exhaustions) que si le nombre des termes est supposé infini, cet excès doit disparoître, & la somme d'une telle progression infinie doit être égale au tiers du plus grand terme pris autant de fois.

» De même ayant prouvé qu'une pareille progression de cubes (à mesure que le nombre des termes augmente) s'approche à l'infini de $\frac{1}{4}$ du plus grand terme pris autant de fois, celle des quarré-quarrés de $\frac{1}{5}$, celle des sursolides de $\frac{1}{6}$ du plus grand terme pris autant de fois, & ainsi de suite, tant qu'on voudra l'éprouver, & n'y ayant aucune raison de douter que ce ne soit la même chose dans tout le reste, nous pouvons regarder comme une découverte suffisamment prouvée, qu'en général la somme d'une telle progression infinie est égale (s'en approchant à l'infini) à une partie aliquote de la plus grande quantité aussi souvent répétée, dont le dénominateur est l'exposant (ou nombre des dimensions) de cette puissance (selon laquelle la progression se fait) augmenté de l'unité, c'est-à-dire pour les latérales $\frac{1}{2}$, pour les quarrés $\frac{1}{3}$, pour les cubes $\frac{1}{4}$, pour les quarré-quarrés $\frac{1}{5}$ (d'autant de fois la plus grande quantité), & ainsi de suite à l'infini.

J'ai cru qu'il étoit à propos d'insérer ici ce raisonnement de *Wallis*, & que les Commençans liroient avec quelque satisfaction les preuves d'un aussi grand homme sur la vérité de ces suites, que j'ai renfermé briévement dans les lemmes précédens.

## LEMME VI.

Si deux suites ou rangs de quantités proportionnelles ont le même nombre (*fini* ou *infini*) de termes, on aura toujours cette proportion :

*Comme le premier terme d'une suite est au premier terme*

*de l'autre, ainſi la ſomme de tous les termes de la premiere ſuite eſt à la ſomme de tous les termes de la ſeconde.*

Par exemple, dans ces nombres

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |
| 4 | 12 |
| 5 | 15 |
| 6 | 18 |

C'eſt-à-dire 1 : 3 :: 21 : 63

Ou dans ceux-ci

| | |
|---|---|
| 4 | 5 |
| 12 | 15 |
| 36 | 45 |
| 108 | 135 |
| 324 | 405 |
| 972 | 1215 |

Et 4 : 5 :: 1456 : 1820, &c.

L'application de ces Lemmes aux quantités géométriques, comme *lignes*, *ſurfaces* & *ſolides* dépend entiérement des hypotheſes ſuivantes.

HYPOTHESES.

1°. On ſuppoſe que chaque *ligne* eſt compoſée d'une ſuite infinie de points également éloignés entr'eux.

2°. Que la *ſurface* (ou l'aire d'une figure) eſt compoſée d'une ſuite infinie de lignes, ou droites ou courbes, ſuivant que la figure l'exige.

3°. Que le *ſolide* eſt compoſé d'une ſuite infinie de plans ou d'autres ſurfaces, ſelon que ſa figure l'exige.

On ne ſuppoſe pas néanmoins que les lignes, qui n'ont réellement aucune largeur, puiſſent remplir un eſpace ou une ſurface, ou que les plans, qui n'ont aucune épaiſſeur, puiſſent former un ſolide; mais les lignes que nous conſidérons ici doivent être regardées comme de petits parallelogrammes (ou autres ſurfaces) infiniment peu

larges, tellement que leurs largeurs étant prises toutes ensemble, puissent égaler celle de la figure que ces parallelogrammes sont supposés remplir.

De même les plans ou les surfaces que l'on suppose former un solide, doivent être regardés comme infiniment minces ; ensorte cependant que leurs épaisseurs ( que nous appellerons aussi dans la suite *lignes* ) étant prises toutes ensemble, puissent égaler la hauteur du solide proposé.

Mais pour rendre cette hypothese aussi aisée à comprendre pour les Commençans, qu'il est possible de le faire, je vais leur proposer un exemple simple & familier.

Supposons qu'un Livre soit composé de 100, 200, 300 ( plus ou moins ) feuilles de papier fin, ce Livre étant fermé, aura longueur, largeur, & profondeur ou épaisseur, & par conséquent on pourra le regarder comme un solide ; chacune de ses tranches ( étant coupée uniformément ) sera une surface, composée d'une suite de petits parallelogrammes, dont chacun aura pour épaisseur celle d'une simple feuille de papier ; & si l'on conçoit que l'épaisseur de chacune de ces feuilles est subdivisée en 10, ou 100, ou 1000, &c. on aura une suite de lignes infiniment petites, qui ( par l'hypothese ) composent ou remplissent toute la surface.

Toutes les surfaces de ces feuilles de papier infiniment peu épaisses, ou divisées à l'infini, formeront une suite de plans ou de surfaces qui composeront un solide de la grandeur & de la figure du Livre.

Maintenant, selon cette idée des lignes, surfaces & solides, on peut, sans déroger à aucune démonstration, admettre les définitions & les théorêmes qui suivent.

## DEFINITIONS.

I. Les *aires* des *quarrés* & de tous les autres parallelogrammes, sont composées ou remplies d'une suite infinie de lignes droites égales.

II. L'aire de chaque triangle plan est composée d'une suite infinie de lignes droites paralleles à sa base, & qui décroissent également, jusqu'à se terminer à un point dans l'angle vertical.

III. L'aire du cercle est composée ou d'une suite infinie de cercles concentriques ou paralleles, ou d'une suite infinie de cordes paralleles à son diametre, ou d'une multitude innombrable de secteurs.

IV. L'aire d'une ellipse est composée ou d'une suite infinie d'ordonnées appliquées à angles droits, ou d'une suite infinie de lignes droites paralleles à son grand diametre.

V. Les aires de la parabole & de l'hyperbole sont composées d'une suite infinie d'ordonnées, ou d'une suite infinie de droites paralleles à l'axe, &c.

VI. Le *prisme* est un solide compris ou renfermé par plusieurs parallelogrammes égaux, ayant ses bases ou extrêmités égales & semblables, & il prend ordinairement son nom de la figure de sa base, c'est-à-dire,

VII. Le *cube* ( ou solide semblable à un dez à jouer ) est un prisme terminé ou fermé par six quarrés égaux.

VIII. Le *parallelopipede* est un prisme, dont les côtés sont terminés ou fermés par quatre parallelogrammes égaux, & dont les bases ou extrêmités sont deux quarrés.

IX. Le *cylindre* ( ou solide, semblable à un rouleau de pierre ) n'est autre chose qu'un prisme rond, dont les deux bases ou extrêmités sont des cercles parfaits.

X. La solidité de chaque *prisme* est composée d'une suite infinie de plans égaux, paralleles & semblables à celui de sa base.

XI. La *pyramide* est un solide terminé ou fermé par plusieurs triangles plans, appuyés sur une base poligone, & dont les angles verticaux se réunissent tous à un point qu'on nomme *sommet* de la pyramide : elle prend son nom de la figure de sa base; si c'est un quarré, la pyramide se nomme *quarrée*, si c'est un triangle, on la nomme *pyramide triangulaire*.

XII. Le *cone* n'eſt qu'une pyramide ronde qui a déja été définie au commencement de la 4[e] partie.

XIII. La ſolidité de chaque pyramide eſt composée d'une ſuite infinie de plans, paralleles & ſemblables à celui de ſa baſe, décroiſſant également, & ſe réduiſant à un point au ſommet.

XIV. La *ſphere* ou *globe* ( comme un boulet ) eſt un ſolide terminé ou fermé par une ſurface réguliere, produite ou engendrée par la rotation d'un demi-cercle autour de ſon diametre ( qui ſe nomme *axe de la ſphere* ), & ſa ſolidité eſt composée ou fermée par une ſuite infinie de cercles concentriques, dont les diametres ſont les cordes du cercle qui forme la ſphere.

XV. Le *ſpheroïde* ( ou figure ſemblable à un œuf ) eſt un ſolide terminé par une ſurface réguliere, formée par la rotation d'une demi-ellipſe autour de ſon grand diametre ( nommé l'*axe du ſpheroïde* ), & ſa ſolidité eſt composée d'une ſuite infinie de cercles concentriques, dont les diametres ſont les ordonnées de l'ellipſe qui l'a formée.

XVI. Il y a une autre ſorte de ſolide, nommé *ſpheroïde applati :* il eſt formé par la rotation d'une ellipſe autour de ſon diametre conjugué, & il eſt ſemblable à un gros navet ou à une orange.

XVII. Si une *demi-parabole* tourne autour de ſon axe, elle formera un ſolide, nommé *conoïde parabolique :* il eſt composé ou formé d'une ſuite infinie de cercles, dont les diametres ſont les ordonnées de la parabole.

XVIII. Si une *parabole* tourne autour de ſa baſe ou de ſa plus grande ordonnée, elle formera un ſolide, nommé communément *fuſeau parabolique*, lequel ſera composé d'une ſuite infinie de cercles, dont les diametres ſont des lignes droites paralleles à l'axe de la parabole.

XIX. Si une *hyperbole* tourne autour de ſon axe, elle formera un conoïde hyperbolique, lequel ſera composé d'une ſuite infinie de cercles, dont les diametres ſont les ordonnées de l'hyperbole.

XX. La *surface courbe* de tous les solides circulaires (comme *cylindres*, *cones*, *spheres*, *&c.*) est composée d'une suite infinie de circonférences des cercles qui composent leurs solidités.

Tous les Théorêmes suivans sont appuyés sur ces définitions, & par conséquent si on les compare bien avec leurs figures respectives, elles seront d'un grand secours pour les Commençans, & elles rendront fort aisé tout ce qui suit. Je vais commencer par ce qui a déja été démontré pour servir d'introduction au reste.

## THEOREME I.

*On trouve l'aire de tous les parallelogrammes rectangles, en multipliant leur longueur par leur largeur; c'est-à-dire* BD × FB = *aire du parallelogramme* BDGF, (*fig.* 151) *par le* lemme 1, *comparé avec la* définit. 1.

### EXEMPLE.

Soit BD = 26, & FB = 9, on aura 26 × 9 = 234, l'aire. Voyez Probl. 1 de la Géométrie.

## THEOREME II.

*L'aire de chaque triangle plan est égale à la moitié de celle de son parallelogramme circonscrit; c'est-à-dire* $\frac{BD \times CA}{2}$ = *aire du* △ BCD (*fig.* 152).

### DEMONSTRATION.

Soit la perpendiculaire CA divisée en un nombre infini de parties égales aux points *a*, *a*, *a*, &c; & soient menées par ces points des lignes droites paralleles à la base BD (comme *bad*, *bad*, *bad*, *&c.*), ces lignes forment une suite de termes en progression arithmétique, laquelle commence au point C, qui sont o, *bd*, 2*bd*, 3*bd*, *&c*, comme on le voit évidemment par la figure ci-dessus, ou BD est le plus grand terme = D, & CA le nombre des termes = N; mais $\frac{1}{2}$ND = S, par le *lemme* 2, & S = aire du △, par la *défin.* 2. *Q. E. D.*

### EXEMPLE.

Soit BD = 26, & CA = 9, comme auparavant; nous aurons $\frac{26 \times 9}{2} = 117$, ou $\frac{26}{2} \times 9 = 117$, ou $26 \times \frac{9}{2} = 117$, aire requise. (Voyez le Problême 3 des Elémens).

### THEOREME III.

*Les circonférences des cercles sont entr'elles en même proportion que leurs diametres.*

### DEMONSTRATION.

Soit la circonférence d'un cercle, divisée en un nombre quelconque d'arcs égaux par des lignes droites menées du centre (ou rayons), par exemple en 8, comme à la figure 153, où AB est un de ces arcs; si ensuite par le centre on mene un cercle concentrique ou parallele, sa circonférence sera aussi divisée par ces rayons en huit arcs égaux, dont l'un sera $ab$, & le $\Delta\, Cab$ sera semblable au $\Delta$ CAB. Donc $Ca : ab :: CA : AB$, ou $Ca : CA :: ab : AB$; par conséquent $2Ca : 2CA :: 8ab : 8AB$; mais $2Ca = da$, diametre du cercle, dont la circonférence est $8ab$, & $2CA = DA$, diametre du cercle, dont la circonférence est 8 AB. Donc, &c. comme dans le théorême. *Q. E. D.*

### EXEMPLE.

Dans le chap. 6, Part. 3, on a trouvé que si le diametre d'un cercle est 2, sa circonférence sera 6,2831853, &c. Donc 2 : 6,2831853, &c, :: 1 : 3,14159265, &c. circonférence du cercle, dont le diametre est 1.

### COROLLAIRE.

Delà il suit que comme on peut prendre l'*unité* ou 1 pour le premier terme de la proportion, alors 3,14159265, &c. sera un facteur constant ou fixe, lequel étant multiplié

par le diametre proposé, produira la circonférence de ce cercle.

*Nota.* Au lieu de 3,14159265 &c, il suffit de prendre seulement 3,1416, ou en nombres entiers, la proportion sera comme 7 : 22 : : diametre : circonférence, ou 113 : 353 : : diametre : circonférence. Ces nombres peuvent être utiles, & sont souvent en usage dans la pratique commune.

THEOREME IV.

*L'aire d'un secteur de cercle est égale à la moitié du rectangle sous le rayon & sous son arc ; c'est-à-dire* $\frac{CA \times AB}{2}$ = aire de ACB.

DEMONSTRATION.

Soit le rayon CA (*fig.* 154) divisé par une suite infinie de points également éloignés, comme *a*, *e*, *y*, *&c*; & par ces points soient tracés des arcs concentriques ou paralleles, comme *ab*, *ed*, *yf*, *&c*. ils formeront une suite d'arcs en progression arithmétique, qui commence au point C (sçavoir 0, 1, 2, 3, &c.) comme on le voit clairement par la même figure. Le plus grand terme est AB = D, & le nombre des termes est CA = N; mais $\frac{1}{2}$ND = S, somme de tous les termes, par le *lemme* 2, & S = aire du secteur, par la définit. 3. *Q. E. D.*

EXEMPLE.

Soit le rayon CA = 12, & l'arc AB = 8; donc $\frac{12 \times 8}{2} = 48$, ou $\frac{12}{2} \times 8 = 48$, ou $\frac{8}{2} \times 12 = 48$, aire du secteur ACB.

THEOREME V.

*L'aire du cercle est égale au demi-rectangle de son rayon par sa circonférence ; c'est-à-dire, selon* Archimede, *qu'un cercle est égal à un triangle rectangle, dont les côtés comprenant l'angle droit sont égaux, l'un au rayon, & l'autre à la circonférence du cercle.* Prop. 1. de dimensione circuli.

La vérité de ce Théorême se tire aisément de celle du précédent, en cette maniere : Si l'on suppose que le dernier secteur soit la huitiéme partie du cercle, il s'ensuit que $\frac{8\,AB \times CA}{2} = 4\,AB \times CA$ sera l'aire de tout le cercle ; mais $4AB =$ la demi-circonférence du cercle, & $CA =$ demi-diametre. Donc, &c. comme dans le théorême. *Q. E. D.*

*EXEMPLE.*

Si le diametre est l'unité ou 1, la circonférence sera 3,14159265, &c. par le théor. 3. Donc $\frac{3,14159265}{2} \times \frac{1}{2}$ $= 0,78539816$, &c. (ou 0, 7854, pour l'usage ordinaire) sera l'aire de ce cercle.

*SCHOLIE.*

Delà suit naturellement la proportion suivante entre le quarré & le cercle qui lui est inscrit.

PROPORTION.

*Comme le perimetre ( ou la somme des quatre côtés ) d'un quarré est à son aire, ainsi la circonférence du cercle inscrit est à son aire ;*

C'est-à-dire supposant $AB = D$ (*fig.* 155) = côté du quarré & diametre du cercle inscrit ; donc $4D =$ perimetre, $DD =$ aire du quarré, & $3,1416\,D =$ circonférence de ce cercle, par le théor. 3 ; mais $4D : 3,1416D :: DD : 0,7854DD =$ aire du cercle.

Et si $D = 1$, on aura $4D = 4$, & $DD = 1 \times 1 = 1$, & la circonférence sera 3,1416. Or $4 : 1 :: 3,1416 : 0,7854$ &c. comme dans l'exemple précédent.

Et delà on peut tirer aisément le théorême suivant.

THEOREME VI.

*Les aires de tous les cercles sont entr'elles en même proportion que les quarrés de leurs diametres.* ( 2. *E*. 12. )

Car si D = diametre d'un cercle, & $d$ = diametre d'un autre cercle, nous aurons 0,7854DD pour l'aire du premier cercle, & 0,7854$dd$ pour l'aire de l'autre, comme ci-devant.

Mais 0,7854DD : 0,7854$dd$ :: DD : $dd$; ou autrement soit D = diametre, & P = périphérie ou circonférence d'un cercle; $d$ = diametre, & $p$ = circonférence d'un autre cercle;

| | | |
|---|---|---|
| nous aurons | 1 | $\frac{1}{2}D \times \frac{1}{2}P = \frac{1}{4}DP = A$, aire d'un cercle. |
| Et | 2 | $\frac{1}{2}d \times \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}dp = a$, aire d'un autre cercle. |
| 1 × 4 | 3 | $DP = 4A$ |
| 2 × 4 | 4 | $dp = 4a$ |
| 3 ÷ D | 5 | $P = \frac{4A}{D}$ |
| 4 ÷ $d$ | 6 | $p = \frac{4a}{d}$. |
| Mais | 7 | P : $p$ :: D : $d$, par le théor. 3 |
| 5, 6, 7 | 8 | $D : d :: \frac{4A}{D} : \frac{4a}{d}$ |
| 8 :: | 9 | $4DDa = 4ddA$, ou $DDa = ddA$ |
| 9, analogie | 10 | DD : A :: $dd$ : $a$, ou A : $a$ :: DD : $dd$. |

Q. E. D.

---

COROLLAIRE.

Delà il suit que le quarré de 1 étant 1 ( ou 1 × 1 = 1 ) & 0,78539816, &c. ou 0,7854 étant l'aire du cercle, dont le diametre est 1, comme ci-devant; on aura 1 : 0,7854 :: le quarré du diametre d'un cercle est à son aire; & comme 1 est le premier terme de cette proportion, le facteur 0,7854 sera constant, & étant toujours multiplié par le quarré d'un diametre proposé, il produira l'aire de ce cercle.

*Nota.* Les quatre derniers Théorêmes démontrent clairement tous les Problêmes communs ou pratiques, concernant le cercle. Je les ai tous réunis ici pour satisfaire entiérement les Commençans, en supposant comme

auparavant que $\left\{ \begin{array}{l} D = \text{diametre} \\ P = \text{peripherie} \\ A = \text{aire} \end{array} \right\}$ d'un cercle proposé.

*Probléme* 1. D étant donné, trouver P.

| | | |
|---|---|---|
| On aura | 1 | 1 : 3, 1416 : : D : P, par le théor. 3. |
| 1 ∵ | 2 | 3,1416D = P. |
| *Exemple.* | | Soit D = 32; donc 3, 1416 × 32 = 100, 5312 = péripherie. |
| | | *Probl.* 2. D étant donné, trouver A. |
| | 3 | 1 : 0,7854 : : DD : A, par le théor. 6. |
| 3 ∵ | 4 | 0, 7854 DD = A. |
| *Exemple.* | | Soit D = 32; donc DD = 32 × 32 = 1024, & 0, 7854 × 1024 = 804, 2496 = aire requise. |
| | | *Probl.* 3. P étant donné, trouver D. |
| 2 ÷ 3114 | 5 | $D = \frac{P}{3,1416}$, ou parce que $\frac{1}{3,1416} =$ 0, 3183; donc 0, 3183P = D, ceci n'étant que la converse du premier n'a pas besoin d'exemple. |
| | | *Probl.* 4. P étant donné, trouver A. |
| 2 ⊙ 2 | 6 | 9,86965DD = PP |
| 6 ÷ | 7 | $DD = \frac{PP}{9,86965}$, ou 0, 10132PP = D |
| 4 ÷ | 8 | $DD = \frac{A}{0,7854}$, ou 1, 2732A = DD; car $\frac{1}{0,7854} = 1,2732$ |
| 7, 8 | 9 | $\frac{PP}{9,86965} = \frac{A}{0,7854}$, ou 0,10132PP = 1,2732A |
| 9 × &c. | 10 | $\frac{PP}{12,5664} = A$, ou 0, 07957PP = A |
| | | *Probl.* 5. A étant donné, trouver D. |
| 8 ▭ 2 | 11 | $D = \sqrt{\frac{A}{0,7854}}$, ou $D = \sqrt{1,2732A}$ |
| | | *Probl.* 6. A étant donné, trouver P. |
| 10 × &c. | 12 | PP = 12,5664A, ou $PP = \frac{A}{9,07957}$. |

Ces

Ces six Problêmes renferment toutes les variétés que l'on peut proposer pour trouver la circonférence ou périphérie, le diametre & l'aire d'un cercle.

Mais s'il faut trouver l'aire d'un segment ou d'une partie d'un cercle, coupée par une corde, cette opération demande plus d'attention.

1°. Quant aux quantités données, il faut toujours que le diametre soit donné, ou la circonférence ou l'aire du cercle pour parvenir à trouver le diametre.

2°. Il faut aussi que la corde soit donnée, qui est la base du segment, ou le sinus verse qui en est la hauteur; c'est-à-dire ou BG ou AF (*fig.* 156) doivent être donnés, afin que l'aire du ▲ BCG puisse se trouver.

Or il est évident que si l'aire du ▲ BCG est soustraite de celle du secteur CBAG, le reste sera l'aire du segment BAG. Et si l'aire du segment BAG est soustraite de l'aire du cercle, le reste sera l'aire de l'autre segment BDG.

*Exemple en nombres.*

Soit donné $DA = 32$, comme dans le probl. 1, & le sinus verse $AF = 6$, on aura $\frac{1}{2}DA = BC = CA = 16$, & $CA - AF = CF = 10$. Mais $BC^2 - CF^2 = BF^2$; par conséquent $\sqrt{BC^2 - CF^2} = BF$, ou $\sqrt{156} = 12,49 = BF$.

Ensuite par la théorie des triangles plans, l'arc BA = ∨ BCA peut se trouver en degrés & parties décimales, en cette maniere : BC est au rayon, comme BF est au sinus, ∨ BCF = 51°31′, & ensuite on fera toujours cette proportion.

*Comme la circonférence du cercle en degrés est à sa circonférence en parties égales (selon les dimensions qu'on a prises), ainsi l'arc en degrés (ou ∨ BCA) est au même arc en parties égales.*

C'est-à-dire $360° : 100,5312 :: 51°31 : 14,32844 = BA$.
Ensuite $14,3284 \times 16 = 229,2544$, aire du secteur BCGA.

Et 12,49 × 10 = 124,9, aire du ▲ BCG. Leur différence 104,3544 = aire du ſegment BAG.

Ou bi.n on peut trouver autrement l'aire d'un ſegment (comme on le pratique plus communément) par la table des ſegmens d'un cercle, dont l'aire eſt l'unité ou 1. La conſtruction de cette Table eſt fort bien expliquée dans le Livre du Jaugeage de M. *Darie*, chap. 9; il la réduit à ce Problême.

PROBLEME.

*Dans un cercle, dont l'aire eſt l'unité, & dont le diametre eſt coupé par les cordes en mille parties égales, trouver le ſegment pour chaque ſinus verſe propoſé, qui n'excéde pas 500 de ces parties égales.*

1°. Multipliez le ſinus verſe propoſé par 0,002, & ôtez le produit de l'unité ou 1.

2°. Cherchez ce reſte dans la table ordinaire des ſinus naturels (l'arc étant diviſé en degrés & centiemes); cet arc étant trouvé, vous doublerez ſon complément, & vous le nommerez A.

3°. Cherchez le ſinus qui répond à A, & l'ayant trouvé, vous le nommerez S, & enſuite vous ferez cette diviſion: 6,2831853) 0,0174532925A — S (= ſegment requis.

Ce ſegment étant ainſi trouvé, ſi vous l'ôtez de l'unité, vous aurez le co-ſegment.

*Nota.* Malgré ce qu'on vient de dire dans le ſecond précepte de ce problême, il arrive très-ſouvent que le reſte dont il y eſt parlé ne peut pas ſe trouver exactement dans la table des ſinus naturels; ainſi je ſuis d'avis que dans ce cas vous faſſiez deux opérations, l'une avec le ſinus le plus approchant au deſſus de ce reſte, & l'autre avec le ſinus le plus approchant au deſſous, par ce moyen vous ſerez ſûr d'avoir le ſegment requis, qui ſera moyen entre les deux qui réſultent de ces deux opérations.

### EXEMPLE.

On demande le ſegment qui répond au ſinus verſe 263.

1°. 263 × 0,002 = 0.526, & 1 — 0,526 = 0,474; ſon arc eſt 28°. 29′ plus petit que le vrai; ſon complément eſt 61,71, lequel étant doublé donne 123,42 = A.

Enſuite ,0174533A = 2,154086286
— 0,8346556 = S, ſinus de A

6,2831853) 1,319330686 (0,209993, ſegment.

Je viens à la ſeconde opération.

263 étant multiplié par 0,002 donne ,526, & 1 — ,526 = 0,474; ſon arc eſt 28°30′ plus grand que le vrai, & ſon complément eſt 61,70, qui étant doublé donne 123,4 = A.

Enſuite 0,0174533A = 2,1537372
— 0,8348478 = S, ſinus de A

6,2831853) 1,3188894 (0,209907, ſegment.

Ainſi vous voyez que par ces deux opérations le ſegment eſt limité, & qu'il eſt très-probablement = 0,20995.

Mais pour abréger ce grand multiplicateur & ce grand diviſeur, je joins ici deux petites Tables de l'un & de l'autre, qui ſeront commodes pour la pratique, & aſſez exactes.

| *Diviſeur.* | | *Facteur.* | |
|---|---|---|---|
| 6,2832 | 1 | ,0174533 | 1 |
| 12,5664 | 2 | ,0349066 | 2 |
| 18,8495 | 3 | ,0523599 | 3 |
| 25,1327 | 4 | ,0698132 | 4 |
| 31,4159 | 5 | ,0872665 | 5 |
| 37,6991 | 6 | ,1047197 | 6 |
| 43,9823 | 7 | ,1221730 | 7 |
| 50,2655 | 8 | ,1396263 | 8 |
| 56,5487 | 9 | ,1570796 | 9 |

Telle est la méthode de M. *Darie*, que j'ai rappellée ici pour faire voir aux Commençans comment ils peuvent par le moyen de ces deux petites tables, & de la table des sinus naturels, faire aisément une table des segmens, dont je donnerai dans la suite l'usage (dans la pratique du jaugeage). En même tems je donnerai ici une autre méthode pour trouver l'aire d'un segment de cercle (fort approchante) par le moyen d'un nouveau théorême, sans le secours ni de la table des sinus, ni de celle des segmens, les mêmes quantités étant données que ci-devant;

Sçavoir $\begin{cases} R = \text{rayon ou demi-diametre du cercle donné,} \\ d = \text{différence entre le rayon \& le sinus verse,} \\ C = \text{demi-corde de la base du segment.} \end{cases}$

Théorême $\frac{2\frac{1}{3}RR - 1\frac{1}{3}Rd - dd}{1\frac{1}{2}R + d} \times CS =$ aire du segment.

## EXEMPLE.

Soit $R = BC = 16$, $d = FC = 10$, & $C = BF = 12{,}49$, comme ci-devant.

$2\frac{1}{3}RR = 597{,}3333$, $1\frac{1}{3}Rd = 213{,}3333$, $dd = 100 - \underline{313{,}3333} = 1\frac{1}{3}Rd + dd$

$1\frac{1}{2}R + d = 34)\ 284{,}0000\ (\ 8{,}3529.$

Enfin $8{,}3529 \times 1249 = 104{,}3726$, aire du segment BAG.

## THEOREME VII.

*Comme les quarrés sont aux aires des cercles qui leur sont inscrits, ainsi les parallelogrammes sont aux aires des ellipses qui leur sont inscrites; c'est-à-dire comme le quarré du diametre d'un cercle est à son aire, ainsi le rectangle sous le grand & sous le petit diametre d'une ellipse est à son aire.*

## DEMONSTRATION.

Soit l'ellipse inscrite dans un cercle, & soit menée une infinité de cordes toutes paralleles au petit diametre, comme à la figure 157; on aura comme (DA) diametre

du cercle eſt à N$n$, petit axe de l'ellipſe, ainſi B$a$B, corde quelconque du cercle eſt à $bab$, ordonnée correſpondante dans l'ellipſe ; car ſelon la propriété du cercle,

| | | |
|---|---|---|
| on aura | 1 | $\overline{TS - Ta} \times Ta = Ba^2$, & par la propriété de l'ellipſe. |
| | 2 | $TC^2 : NC^2 :: \overline{TS - Ta} \times Ta : ba^2$. |
| 1, 2 | 3 | $TC^2 : NC^2 :: Ba^2 : ba^2$ |
| 3 ▱ 2 | 4 | $TC : NC :: Ba : ba$ |
| Donc | 5 | $2TC : 2NC :: 2Ba : 2ba$, |
| c'eſt-à-dire | 6 | $DA : Nn :: BaB : bab$. |
| Soit | 7 | $D = 2TC$, & $d = 2NC$. |
| Donc | 8 | D eſt à $d$, comme la corde B$a$B eſt à l'ordonnée $bab$, &c. |

Mais la ſomme d'une ſuite infinie de pareilles cordes, comme B$a$B, forme l'aire du cercle par la définit. 3.

Et la ſomme d'une pareille ſuite d'ordonnées correſpondantes, comme $bab$, forme l'aire de l'ellipſe, par la définition 4.

Donc D eſt à $d$, comme l'aire du cercle eſt à l'aire de l'ellipſe, par le lemme 6.

Mais $D : d :: DD : Dd$ ; d'où il ſuit que DD eſt à l'aire du cercle, comme D$d$ eſt à l'aire de l'ellipſe. *Q.E.D.*

Par conſéquent comme 1 : 0,7854, comme le rectangle ou produit des deux axes d'une ellipſe eſt à ſon aire.

### *Exemple.*

Soit $TS = 36$, & $Nn = 16$, on aura $36 \times 16 = 576$, & $576 \times 0{,}7854 = 452{,}4904$, aire de l'ellipſe.

### *Corollaires.*

1°. Par-là il eſt aiſé de comprendre que la racine quarrée du rectangle ou produit des deux axes ſera le diametre d'un cercle, dont l'aire eſt égale à celle de l'ellipſe, comme $\sqrt{576} = 24$, diametre du cercle = l'ellipſe.

2°. Tous les ſegmens de l'ellipſe & du cercle qui lui eſt circonſcrit (dont les baſes ſont paralleles au diametre

conjugué, & qui sont de la même hauteur) sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire B *a* B est à *bab*, comme l'aire du segment B T B est à l'aire du segment *b* T *b*, ou T S est à N *n*, comme l'aire du segment B T B est à l'aire du segment *b* T *b*.

## THEOREME. VIII.

*L'aire de chaque ellipse est moyenne proportionnelle entre les aires des cercles inscrits & circonscrits.*

La vérité de ce théorême se tire aisément du dernier; car supposant D = T S (*fig.* 158) & *d* = N*n*, comme auparavant, on a déja prouvé que D D est à D*d*, comme l'aire du cercle circonscrit est à l'aire de l'ellipse; mais D D : D *d* : : D *d* : *d d*. Donc l'aire de l'ellipse est à l'aire du cercle inscrit, comme D *d* est à *d d*, par le théor. 6.

### *Exemple.*

Soit T S = D = 36, & N*n* = *d* = 16, comme auparavant. Donc D D = 1296, & *d d* = 256; on aura donc 1296 × 0,7854 = 1017,8784, aire du grand cercle 256 × 0,7854 = 201,0624.

Soit A = aire de l'ellipse; on aura donc par le théorême 1017,8784 : A : : A : 201,0624. Donc A A = 1017,8784 × 201,0624 = 204657,07401216; par conséquent $\sqrt{204657,07401216}$ = 452,3904 = A, aire de l'ellipse, comme dans le dernier exemple.

### COROLLAIRE.

Delà il suit que tous les segmens d'une ellipse & de son cercle inscrit (dont les bases sont paralleles au grand axe, & ont la même hauteur) sont entr'eux comme les aires de l'ellipse & du cercle; c'est-à-dire l'aire du cercle est à l'aire de l'ellipse, comme le segment *b* N *b* est au segment B N B, ou N*n* est à T S, comme l'aire du segment *b* N *b* est à l'aire du segment B N B.

## THEOREME IX.

*La solidité d'un prisme ( quelle que soit la figure de sa base ) se trouve en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur.*

Par exemple, un parallelopipede ( ou prisme quarré ) est composé d'une suite infinie de quarrés égaux, celui de sa base B A (*fig.* 159) étant un des termes, & sa hauteur D B ou G A, le nombre de tous les termes, l'aire de B A *b a* × D B sera par conséquent égale à la somme de toute la suite ( par le lemme 1 ) ou la solidité du parallelopipede D B G A, par la définit. 10.

### *Exemple.*

Soit le côté de la base B A = 16, & la hauteur D B = 42, nous aurons 16 × 16 = 256, aire de la base, & 256 × 42 = 10752 = solidité du parallelopipede DBGA. On trouvera de cette maniere la solidité de tous les prismes réguliers, dont les bases ( ou extrêmités ) sont paralleles & semblables, de quelque figure qu'elles soient ; c'est-à-dire, soit que leurs bases soient des triangles, des pentagones, hexagones, ou octogones, &c.

## THEOREME X.

*Chaque pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur.* ( 7. E. 12 ) ; *c'est-à-dire la solidité de la pyramide* B V A ( *dans la derniere figure* ) *est le tiers du prisme* B D G A *qui lui est circonscrit.*

### Demonstration.

Toute pyramide, dont la base est un quarré ( comme B A *b a* dans la derniere figure ) est composée d'une suite infinie de quarrés, dont les côtés ou racines croissent en progression arithmétique, commençant au sommet ou point V ( voyez le théor. 2 ) ; sa base B A *b a* est le plus grand terme ( = D D ), & sa hauteur perpendiculaire V C ou D B est le nombre de tous les termes ( = N ) ; mais

$\frac{NDD}{3} = S$, somme de toute la suite, par le lemme 3, & $S =$ solidité de la pyramide B V A, par la définit. 13.

*Exemple.*

Soit le côté de la base de cette pyramide $BA = 16$, & sa hauteur $VC = 42$, nous aurons $16 \times 16 = 256$, aire de sa base B A *b a*, & $\frac{256 \times 42}{3} = 3584$, ou $\frac{256}{3} \times 42 = 3584$, ou $256 \times \frac{42}{3} = 3584$, sera la solidité de la pyramide B V A.

*Corollaire.*

On comprend aisément par-là que chaque pyramide est $\frac{1}{3}$ du prisme circonscrit, quelle que soit la forme de sa base, c'est-à-dire, soit que ce soit un quarré, un triangle, un pentagone, &c.

THEOREME XI.

*La solidité de chaque cylindre se trouve en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur.*

Car chaque cylindre droit n'est qu'un prisme rond, étant composé d'une suite infinie de cercles égaux, celui de sa base est un des termes, & sa hauteur B D (*fig.* 160.) est le nombre de tous les termes. Donc l'aire de sa base B A étant multipliée par D B, sera sa solidité, par le lemme 1, c'est-à-dire soit $D = BA$, & $H = GA$, on aura $0,7854DD \times H =$ sa solidité.

*Exemple.*

Soit le diametre de sa base $D = 16$, & sa hauteur $H = 42$, nous aurons $1 : 0,7854 :: 16 \times 16 = 256 : 201,0624$, aire de sa base; & $201,0624 \times 42 = 8444,6208$, solidité du cylindre D B G A.

*Corollaire.*

Par-là il est évident que chaque parallelopipede quarré est à son cylindre inscrit, comme 1 est à 0,7854, ou

en nombres entiers, comme 452 est à 355, à fort peu de chose près; & que tous les prismes sont à leurs cylindres inscrits comme les aires de leurs bases.

### THEOREME XII.

*La surface courbe de chaque cylindre droit est égale au rectangle ou produit de sa hauteur par la circonférence de sa base; c'est-à-dire* D B *étant multiplié par la circonférence du diametre* BA, *produira la surface courbe du dernier cylindre* D G B A.

Car le cylindre est composé d'une suite infinie de cercles égaux (selon le dernier théorême). Donc sa surface courbe est composée des circonférences de ces cercles, par la définit. 20; mais la circonférence de sa base B A est un des termes, & sa hauteur D B est le nombre des termes. Donc, &c. comme par le lemme 1.

Si l'on ajoute à cette surface les deux bases opposées, la somme sera la surface de tout le cylindre.

### EXEMPLE.

Soit le diametre de la base B A (*fig.* 160) = 16, & sa hauteur D B = 42, comme auparavant; on aura 1 : 3,1416 :: 16 : 50,2656, circonférence de sa base. De plus, 1 : 0,7854 :: 16 × 16 = 256 : 201,0624, aire de chaque base. Donc 50,2656 × 42 = 2111,1552, surface courbe.

A quoi il faut ajouter 201,0624 × 2 = 402,1248, les deux bases.

Somme de la surface du cylindre = 2513,2800.

### THEOREME XIII.

*Le cone est le tiers d'un cylindre de même base & de même hauteur.* (10. *E.* 12.)

### DEMONSTRATION.

La vérité de ce théorême se conçoit aisément, si l'on fait seulement réflexion que le cone n'est qu'une pyramide

ronde, & que par conséquent il doit avoir même raison à son cylindre circonscrit que la pyramide quarrée à son parallelopipede circonscrit, c'est-à-dire comme 1 est à 3; cependant pour rendre cette vérité plus claire, nous ferons encore attention que chaque cone droit est composé d'une suite infinie de cercles, dont les diametres croissent continuellement en progression arithmétique, laquelle commence au sommet ou point V (*fig.* 161); l'aire de sa base BA étant le plus grand terme, & sa hauteur perpendiculaire VC le nombre de tous les termes, donc l'aire du cercle BA $\times \frac{1}{3}$ VC sera la somme de tous les termes, par le lemme 3, & par conséquent la solidité du cone.

*EXEMPLE.*

Soit le diametre de sa base BA = 16, & sa hauteur VC = 42, on aura 1 : 0,7854 : : 16 × 16 = 256 : 201,0624, aire de la base, & $\frac{201,0624 \times 42}{3} = 2814,8736$, solidité du cone BVA, ou $201,0624 \times \frac{42}{3} = 2814,8736$, &c.

COROLLAIRE.

Delà il suit que chaque pyramide quarrée est à son cone inscrit, comme 1 : 0,7854 (ou : : 452 : 355), & que par conséquent toutes les pyramides sont à leurs cones inscrits, comme les aires de leurs bases.

THEOREME XIV.

*La surface courbe du cone droit est égale à la moitié du rectangle ou produit de la circonférence de sa base par la longueur de son côté.*

La vérité de ce Théorême est évidente par la définition même du cone, chap. 1, Part. 4, où l'on voit que la surface courbe de chaque cone droit (comme BVA) est égale à l'aire d'un secteur de cercle, dont le rayon est le côté du cone (VB), & dont l'arc est égal à la circonférence de la base du cone (BA). Mais l'aire de chaque

secteur est égale au demi-produit du rayon par son arc, par le théor. 4. Donc, &c.

### EXEMPLE.

Soit la longueur du côté du cone V B ou V A = 42,7551, & le diametre de sa base B A = 16, comme auparavant ; on aura 50,2656 pour la circonférence de sa base ; & $\frac{50,2656 \times 42,7551}{2}$ = 1074,5553, &c. sa surface courbe.

Ajoutons-y l'aire de sa base, la somme sera la superficie de tout le cone ;

C'est-à-dire 1074,5553
+ 201,0624, aire de la base.

*Somme* 1275,6177, superficie totale, &c.

*Nota.* La vérité de ce Théorême peut se prouver par les réflexions du dernier théorême, & par la définit. 20.

### SCHOLIE.

Du 10^e & 13^e Théorêmes, on peut aisément tirer plusieurs théorêmes pour trouver la solidité d'une pyramide tronquée ou d'un cone tronqué, ou coupé par un plan parallele à sa base.

Soit la pyramide quarrée B V A (*fig.* 162) coupée par un plan, comme *ab*, parallele à sa base B A. On veut trouver la solidité de la partie *ab* A B, soient données

D = B A, côté de la plus grande base,
*d* = *b a*, côté de la plus petite,
H = C P, hauteur perpendiculaire.

| | | |
|---|---|---|
| 1°. | 1 | $D - d : H :: d : \frac{dH}{D-d}$ = VC, par la fig. |
| Ensuite | 2 | $DD \times \frac{H + VC}{3}$ = la pyramide totale B V A, par le théor. 10. |
| Et | 3 | $dd \times \frac{1}{3}$ V C = la pyramide *a* V *b* coupée. |

| | | |
|---|---|---|
| 1, 2 | 4 | $\frac{DDDH}{3D - 3d}$ = pyramide totale BVA; |
| & 1, 3 | 5 | $\frac{dddH}{3D - 3d}$ = pyramide $aVb$ |
| 4 — 5 | 6 | $\frac{DDDH - dddH}{3D - 3d}$ = pyramide tronquée $ab$ AB. |
| 6, réduc. | 7 | $\overline{DD + Dd + dd} \times \frac{1}{3}H$ = pyramide tronquée $ab$ AB. |

Ce qui donne le Théorême suivant.

## THEOREME XV.

*Au rectangle sous les côtés des deux bases, ajoutez la somme de leurs quarrés, & cette somme étant multipliée par un tiers de la hauteur de la pyramide tronquée, donnera sa solidité.*

### EXEMPLE.

Soit le côté de la plus grande base BA = 16, & celui de la moindre $ab = 12$; la hauteur CP = 9, on aura $16 \times 12 = 192$, $16 \times 16 = 256$, & $12 \times 12 = 144$; mais $191 + 256 + 144 = 592$, & $\frac{592 \times 9}{3} = 1776$, ou $592 \times \frac{9}{3} = 1776$, solidité de la pyramide tronquée.

S'il étoit question d'un cone droit tronqué semblable, on le trouveroit par le même théorême; supposant D = diametre de la plus grande base, $d$ = celui de la plus petite, H = hauteur du cone tronqué. Puisque la somme de tous les quarrés qui composent la pyramide quarrée tronquée est à la somme de tous les cercles qui composent le cone tronqué semblable en raison de 1 est à 0,7854 (ou de 452 est à 355; on aura donc $1 : 0{,}7854 :: \overline{DD + Dd + dd} \times \frac{1}{3}H : \overline{0{,}7854DD + 0{,}7854Dd + 0{,}7854dd} \times \frac{1}{3}H$ = cone tronqué, c'est-à-dire dans le dernier exemple, $1 : 0{,}7854 :: 1776 : 1394{,}8704$, cone tronqué semblable; ou parce que $\frac{1}{0{,}7854} = 1{,}273236$, &c. On peut faire 1,273236 ) 1776 ( 1394,87, &c. comme

auparavant ; & si l'on prend le triple de ce diviseur, ou 1,273236 × 3, on aura 3,8197 ) $\overline{DD + Dd + dd} \times H$ ( = cone tronqué, &c.

| | | |
|---|---|---|
| De plus, soit | 1 | $x = D - d$, & $F =$ pyramide tronquée, |
| on aura | 2 | $DD + Dd + dd = \frac{3F}{H}$, par le 7e cas ci-devant. |
| 1 ⊙ 2 | 3 | $xx = DD - 2Dd + dd$ |
| 2 — 3 | 4 | $3Dd = \frac{3F}{H} - xx$ |
| 4 ÷ $\overline{3}$ | 5 | $Dd = \frac{F}{H} - \frac{xx}{3}$, ou $Dd + \frac{1}{3}xx = \frac{F}{H}$ |
| 5 × H | 6 | $\overline{Dd + \frac{1}{3}xx} \times H = F$, pyramide tronquée ; cela nous fournit un autre théorême facile pour trouver la même portion de pyramide. |

### THEOREME XVI.

*Au rectangle sous les côtés des deux bases, ajoutez le tiers du quarré de leur différence ; cette somme étant multipliée par la hauteur, produira la solidité.*

### EXEMPLE.

Soit $D = 16$, $d = 12$, & $H = 9$, comme auparavant ; nous aurons $Dd = 192$ $D - d = 4 = x$, $\frac{1}{3}xx = \frac{4 \times 4}{3} = 5{,}3333$, & $192 + 5{,}3333 = 197{,}3333$.

Enfin $197{,}3333 \times 9 = 1775{,}9997$, solidité de la pyramide tronquée, comme auparavant.

Et 3,81968 ) 1775,9997 ( 1394,87, &c. cone tronqué semblable, comme auparavant.

Les deux derniers théorêmes (bien appliqués) donneront la solidité de toutes les especes de pyramides tronquées, ou comprises entre deux plans semblables & paralleles, comme ci-devant.

Mais si ces pyramides tronquées sont coupées par les extrêmités opposées des deux bases par un plan diagonal,

comme A$b$ (*fig.* 163) en deux parties, A$ab$ & AB$b$, qui se nomment *onglets* ; on trouve ordinairement la solidité de ces onglets, en divisant le terme moyen D$d$ de l'équation DD + D$d$ + $dd$ en deux parties, & ajoutant l'une de ces parties au quarré de chaque base, en cette maniere : $\overline{DD + \frac{1}{2}Dd} \times \frac{1}{3}H$ = grand onglet AB$b$, & $\overline{dd + \frac{1}{2}Dd} \times \frac{1}{3}H$ = petit onglet, A$ab$ de la pyramide tronquée.

Ainsi 3,8197) $\overline{DD + \frac{1}{2}Dd} \times H$ (= grand onglet du cone. Et 3,8197) $\overline{dd + \frac{1}{2}Dd} \times H$ (= petit onglet du cone.

Tels sont les théorêmes dont se sert M. *Darie* dans son Livre du *Jaugeage*, & qui approchent fort de la vérité, mais non pas entiérement ; car ils donnent la solidité de l'onglet supérieur A$ab$ un peu trop grande, & celle de l'inférieur AB$b$ un peu trop petite.

Mais pour rectifier cette petite erreur, je vais proposer ici deux théorêmes qui approchent fort de la vérité, & qui s'exécutent plus aisément que ceux que j'avois proposé dans la premiere édition de cet ouvrage.

1°. $\overline{DD + \frac{1}{2}Dd + \overline{D - d}} \times \frac{1}{3}H$ sera la solidité du grand onglet AB$b$.

2°. $\overline{dd + \frac{1}{2}Dd + \overline{d - D}} \times \frac{1}{3}H$ sera celle du petit onglet A$ab$ de la pyramide quarrée tronquée ; & pour les onglets semblables du cone droit, on aura 3,8197) $\overline{DD + \frac{1}{2}Dd + \overline{D - d}} \times \frac{1}{3}H$ (= plus grand onglet ; Et 3,8197) $\overline{dd + \frac{1}{2}Dd + \overline{d - D}} \times \frac{1}{3}H$ (= plus petit onglet.

*Nota.* Pour abréger les expressions dans les démonstrations suivantes, ⊙ signifiera un cercle en général, & si on le joint à deux lettres, comme ⊙ BA, &c. il marquera l'aire d'un cercle, dont ces deux lettres indique le rayon.

## THEOREME XVII.

*La surface de la sphere ( ou globe ) est égale à quatre fois l'aire de son plus grand cercle ; c'est-à-dire d'un cercle dont le diametre est l'axe de la sphere.*

### DEMONSTRATION.

Si un demi-cercle, comme T A S (*fig.* 164) se tourne ou se meut autour de son diametre ( T S ) il décrira un solide, que l'on nomme *sphere*, laquelle sera composée d'une suite infinie de cercles paralleles, dont les diametres sont les cordes, tels que $\odot\, ab$, $\odot\, ed$, $\odot\, yf$, &c. par la définit. 14; par conséquent la surface de la sphere sera composée des circonférences de ces cercles, qui forment sa solidité par la définit. 20.

Soit D = T S, axe de la sphere. Selon la propriété du cercle, nous aurons

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $\overline{D - Tb} \times Tb = ab^2$, |
| c'est-à-dire | 2 | $D \times Tb - Tb^2 = ab^2$. |
| Donc | 3 | $D \times Tb = aT^2$; car $ab^2 + Tb^2 = aT^2$. |
| Et | 4 | $D \times Td = eT^2$ |
| | 5 | $D \times Tf = yT^2$, &c. |

D'où il suit évidemment que la suite $aT^2$, $eT^2$, $yT^2$, &c. est en même raison que T $b$, T $d$, T $f$, &c, c'est-à-dire en progression arithmétique; & que par conséquent $\odot\, aT$ = somme de toutes les circonférences de cercles entre T & $b$, & $\odot\, eT$ = somme de toutes les circonférences entre T & $d$, &c. Donc $\odot$ A T = somme de toutes les circonférences entre T & C; c'est-à-dire $\odot$ A T = surface de la demi-sphere; & parce que $AC^2 + TC^2 = AT^2$, & $AC^2 = TC^2$, il suit que $\odot$ AT = 2 $\odot$ A C sera la surface de la demi-sphere; par conséquent 4 $\odot$ A C sera celle de toute la sphere. *Q. E. D.*

### *EXEMPLE.*

Soit l'axe T S = D = 16. Donc D D = 256, &

$1 : 0,7854 :: 256 : 201,0624 = \odot AC$; car $\frac{1}{2} D = AC$. Et $201,0624 \times 4 = 804,2496$, ſurface de toute la ſphere; ou parce que 3,1416 eſt quadruple de 0,7854, on aura toujours $1 : 3,1416 :: DD : 3,1416DD$, ſurface de la ſphere, comme auparavant, & cette ſurface eſt égale à la ſurface courbe d'un cylindre droit, dont le diametre & la hauteur ſont l'un & l'autre $= D$, axe de la ſphere.

Car $3,1416D =$ circonférence de la baſe de ce cylindre, & la multipliant par ſa hauteur D, on aura 3,1416DD, ſurface courbe du cylindre, par le théor. 12.

Et ſi l'on ajoute à cette ſurface l'aire de ſes deux baſes, 1,5708DD, il eſt évident que toute la ſurface du cylindre ſera à celle de la ſphere en même proportion que 3 à 2.

## SCHOLIE.

Par la méthode dont on s'eſt ſervi pour prouver le dernier théorême, on pourra aiſément trouver la ſurface courbe d'un ſegment ou partie de la ſphere coupée par une ligne droite ou plan, tel, par exemple, que le ſegment *a* T*m* dans la derniere figure, dont la ſurface courbe eſt $\odot aT$ (comme ci-devant). Donc (puiſque $ab^2 + Tb^2 = aT^2$) nous aurons $\odot ab + \odot Tb =$ ſurface courbe de ce ſegment.

Mais ſi l'axe TS & la hauteur T*b* du ſegment ſont données, on aura $TS \times Tb = aT^2$, comme dans le 3^e^ cas ci-devant; ce qui donne cette proportion ou théorême.

*Comme l'axe de la ſphere eſt à toute la ſurface de la ſphere, ainſi la hauteur d'un ſegment eſt à ſa ſurface courbe.*

Si l'on y ajoute l'aire de la baſe du ſegment, on aura la ſurface de tout le ſegment.

## THEOREME XVIII.

*La ſphere eſt égale aux deux tiers de ſon cylindre circonſcrit, c'eſt-à dire d'un cylindre, dont la hauteur eſt égale à l'axe de la ſphere, auſſi-bien que le diametre de ſa baſe.*

DEMONSTRATION.

DEMONSTRATION.

Par les opérations du dernier théorême, on voit que $\odot ab$, $\odot ed$, $\odot yf$, &c. forment la solidité de la sphere, & que $aT^2$, $eT^2$, $yT^2$, &c. sont une suite de termes en progression arithmétique, $AT^2$ étant le plus grand terme, & TC le nombre des termes. Donc $\odot AT \times \frac{1}{2} TC =$ somme de toute la suite, par le *lemme* 2. Et comme $aT^2 - Tb^2 = ab^2$, $cT^2 - Td^2 = cd^2$, $yT^2 - Tf^2 = yd^2$, $AT^2 - TC^2 = AC^2$, &c. ou $Tb^2$, $Td^2$, $Tf^2$ &c. sont une suite de quarrés, dont les racines $Tb$, $Td$, $Tf$ &c. sont en progression arithmétique, & dont $TC^2$ est le plus grand terme, & TC le nombre des termes; il suit que $\odot TC \times \frac{1}{3} TC =$ somme de toute la suite, par le *lemme* 3 : par conséquent $\odot AT \times \frac{1}{2} TC - \odot TC \times \frac{1}{3} TC =$ somme de la suite $\odot ab$, $\odot cd$, $\odot yf$, &c. qui forme la solidité de la demi-sphere ATG.

Soit $D = 2TC$, axe de la sphere; donc $\frac{1}{4} D = \frac{1}{2} TC$, & $\frac{1}{6} D = \frac{1}{3} TC$; & puisque $AT^2 = 2TC^2$, nous aurons $\odot AT = 2 \odot TC = 1{,}5708DD$, & $1{,}5708DD \times \frac{1}{4} D = 0{,}3927DDD$.

De plus, $0{,}3927DDD - 0{,}1309DDD = 0{,}2618DDD$, solidité de la demi-sphere ATG, & $0{,}2618DDD \times 2 = 0{,}5236DDD$ sera celle de toute la sphere, égale à deux tiers du cylindre, dont le diametre & la hauteur $= D$; car $0{,}7854DDD =$ solidité de ce cylindre, par le théor. 11, & $\frac{2}{3}$ de $0{,}7854DDD = 0{,}5236DDD$, comme ci-devant. Donc, &c. comme au théorême.

*EXEMPLE.*

Soit l'axe $D = 16$; donc $DDD = 4096$, & $1 : 0{,}5236 :: 4096 : 2144{,}6656$, solidité de cette sphere.

*COROLLAIRES.*

1°. Delà il suit que la solidité de la sphere est égale au produit de sa surface par la sixieme partie de son axe; car sa surface est $3{,}1416DD$, par le théorême 17, &

$3,1416DD \times \frac{1}{6} D = 0,5236DDD$, solidité ci-devant trouvée.

2°. Et delà il suit encore évidemment, qu'il y a même raison entre le cube & la sphere qui lui est inscrite qu'entre le quarré & le cercle inscrit, & qu'on a aussi cette proportion, comme la surface du cube est à celle de la sphere qui lui est inscrite : : ainsi la solidité de ce cube est à la solidité de la sphere. ( Voyez la proportion des cercles, théor. 6 ).

Car si $D =$ côté de ce cube, on aura $6DD =$ sa surface, & $DDD =$ sa solidité, & $3,1416DD =$ surface de la sphere; mais $6DD : 3,1416DD :: DDD : 0,5236DDD$, solidité de la sphere, trouvée ci devant.

## SCHOLIE.

De la preuve de ce Théorême, on peut aisément conclure ou former des théorêmes pour trouver la solidité d'un segment de sphere, comme $aTm$, dans la *fig.* 164.

Car nous y supposons que le segment $aTm$ est composé d'une suite infinie de cercles, qui ont même raison avec tous ceux qui forment la demi-sphere. Il suit donc que $\odot aT \times \frac{1}{2} Tb - \odot bT \times \frac{1}{3} Tb$ est la somme de tous les cercles compris entre T & $b$; elle formera donc la solidité de ce segment.

Et comme $ab^2 + Tb^2 = aT^2$, on aura $\overline{\odot ab + \odot Tb} \times \frac{1}{2} Tb - \odot Tb \times \frac{1}{3} Tb =$ la même solidité.

Soit $c = ab$, moitié de la base du segment, $h = Tb$ sa hauteur, & $S =$ la solidité du segment, nous aurons $\odot ab = 3,1416cc$, & $\odot Tb = 3,1416hh$. Donc $\frac{3.1416cch + 3,1416hhh}{2} - \frac{3,1416hhh}{3} = S$; ce qui étant réduit, devient $\overline{3cch + hhh} \times 0,5236 = S$, ou $1,909855$ ) $3cch + hhh$ ( $= S$; car $0,5236$ ) $1,0000$ ( $1,909855$; ce qui fournit un théorême pour trouver la solidité du segment.

*Nota.* Nous supposons ici que la hauteur du segment

est donnée avec le diametre de sa base ; mais si l'axe de la sphere est donné avec la hauteur du segment, alors soit D = axe de la sphere, $b$ = hauteur du segment, & $c$ comme auparavant, nous aurons $\overline{D - b} \times b = cc$, ou $Db - bb = cc$. Donc $\underline{3Dbb - 2bbb} = 3ccb + bbb$; par conséquent $\overline{3Dbb - 2bbb} \times 0{,}5236 = S$, solidité du segment, ou $1{,}90985$ ) ( $3Dbb - 2bbb$ ( $= S$, comme auparavant ; ce qui est un second théorême pour trouver le même segment $aTm$.

Mais si l'on veut trouver le segment moyen $amNK$ (*fig.* 165) qui se nomme ordinairement *zone moyenne* ou du *milieu* ; puisqu'on suppose que $amGA = AGKN$, ou ce qui revient au même, que $bC = BC$ ; il est clair que si l'on soustrait de toute la sphere le double du segment $aTm$, il restera la zone du milieu $amNK$.

Mais parce que cette opération est un peu embarrassante, je vais former un théorême pour la faciliter.

1°. Puisque $AC = yC = eC = aC = TC$, nous aurons $AC^2 - Cf^2 = yf^2$, $AC^2 - Cd^2 = ed^2$, $AC^2 - Cb^2 = ab^2$, *&c.* Donc puisque $AC^2$, $AC^2$, $AC^2$, &c. sont une suite de quarrés égaux, & que CB est le nombre de tous les termes ; il suit que $AC^2 \times Cb$ = la somme de toute la suite, par le *lemme* 1.

2°. Puisque $Cf^2 + Cd^2 + Cb^2$, &c. est une suite de quarrés, dont les racines sont en progression arithmétique, laquelle commence au centre ou point C ( sçavoir, $o, Cf, Cd, Cb$, &c. ) dont le plus grand terme est $Cb^2$, & le nombre des termes $Cb$ ; donc $Cb^2 \times \frac{1}{3} Cb$ = somme de toute la suite, par le *lemme* 3.

Donc $\odot AC \times Cb - \odot Cb \times \frac{1}{3} Cb$ = somme de toute la suite, $\odot yf$, $\odot ed$, $\odot ab$, *&c.* laquelle forme la solidité de la demi-zone $amAG$ ; & comme $AC^2 - Cb^2 = ab^2$, on aura $\odot AC - \odot ab = \odot Cb$ ; par conséquent $\odot AC \times Cb - \frac{\overline{\odot AC + \odot ab} \times Cb}{3} =$ $\overline{2 \odot AC + \odot ab} \times \frac{1}{3} Cb$, sera la solidité de la demi-zone.

Soit D = AG = 2AC, $x$ = *am*, & H = *b*B = 2C*b*, nous aurons ⊙ AC = 0,7854DD, ⊙ *ab* = 0,7854*xx*; & si l'on change le facteur commun 0,7854 en diviseur 1,27323, & que l'on prenne le triple de ce diviseur, qui est 3,8197 (comme ci-devant dans les pyramides tronquées), le résultat de l'opération précédente produira le théorême suivant.

THEOREME XIX.

$$\frac{2DD + xx}{3,8197} \times H = \text{zone moyenne } amNK.$$

THEOREME XX.

*Les spheres sont entr'elles comme les cubes de leurs diametres.* (18. E. 12.)

DEMONSTRATION.

Soit D = diametre ou axe d'une sphere, & *d* = celui d'une autre plus grande ou plus petite.

Nous avons 0,5236DDD = solidité d'une sphere, & 0,5236*ddd* = celle d'une autre, par le théor. 18; mais DDD : *ddd* :: 0,5236DDD : 0,5236*ddd*. *Q. E. D.*

THEOREME XXI.

*La solidité de chaque spheroïde est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit.*

DEMONSTRATION.

Soit NT*n*SN (*fig.* 166) un spheroïde formé par la rotation de la demi-ellipse TNS autour de son grand axe TS (comme par la définit. 15). Soit D = TS, longueur du spheroïde, & l'axe de la sphere qui lui est circonscrite, & *d* = N*n*, diametre du plus grand cercle du spheroïde.

Puisque $TC^2 : NC^2 :: Ab^2 : ab^2$, par le 3^e^ cas du théor. 7, nous aurons DD : *dd* :: $Ab^2 : ab^2$ :: ⊙ A*b* : ⊙ *ab*, &c.

Mais la somme de la suite infinie de cercles, tels que ⊙ A*b* (dont les diametres sont les cordes) forme la solidité de la sphere (comme ci-devant au théor. 18), &

la ſomme de la ſuite infinie de cercles, tels que ⊙ $ab$ (dont les diametres ſont les ordonnées de l'ellipſe) forme la ſolidité du ſpheroïde, par la définit. 15.

Donc DD : $dd$ : : 0,5236DDD : 0,5236$dd$D = ſolidité du ſpheroïde, par le *lemme 6*. Mais 0,5236$dd$D $= \frac{2}{3}$ du cylindre, dont le diametre eſt $= d$, & la hauteur = D, par le théor. 11. *Q. E. D.*

De cette proportion entre la ſphere & le ſpheroïde inſcrit, on peut aiſément tirer des théorêmes pour trouver la ſolidité du ſegment ou de la zone moyenne du ſpheroïde, qui a même hauteur que celle de la ſphere; Car comme la ſolidité de toute la ſphere eſt à celle de tout le ſpheroïde : : ainſi chaque partie de la ſphere eſt à la partie ſemblable du ſpheroïde, par le converſe du lemme 6.

Par exemple, ſi l'on demande la zone moyenne d'un ſpheroïde; ſoit D = TS, & $d$ = N$n$, comme auparavant; H = $b$B, $x$ = AM, comme dans le théor. 19, & C = $am$. Nous aurons $\frac{2DD + xx}{3,8197} \times H$ = zone moyenne de la ſphere; & 0,5236DDD : 0,5236$dd$D : : $\frac{2DD + xx}{3,8197} \times H : \frac{2dd \times H}{3,8197} + \frac{xxdd \times H}{3,8197DD}$ = zone moyenne du ſpheroïde.

De plus, DD : $dd$ : : $xx$ : $cc$; donc $\frac{xxdd}{DD} = c$ : par conſéquent $\frac{xxdd}{DD} \times \frac{H}{3,8197} = \frac{cc}{3,8197} \times H$, ce qui étant pris à la place de $\frac{xxddH}{3,8197DD}$, on aura le ſuivant.

THEOREME XXII.

$\frac{2dd + cc}{3,8197} \times H$ = zone moyenne du ſpheroïde de la même que celle du théor. 19.

*Nota.* On peut de la même maniere former des théorêmes pour trouver le ſegment d'un ſpheroïde coupé à l'un de ſes bouts, &c.

THEOREME XXIII.

*L'aire de la parabole est égale à deux tiers de son parallelogramme circonscrit.*

DEMONSTRATION.

Soit la figure SAB une demi-parabole ; soit $dB$ parallele à l'axe SA & $Sd$ parallele à la demi-ordonnée AB. Supposons $Sd$ divisée en une suite infinie de points également éloignés, comme $f$, $g$, $h$, &c ; & de ces points, imaginons une suite de lignes paralleles, telles que $fm$, $gn$, $hp$, &c. qui rencontrent la courbe de la parabole, & les demi-ordonnées $ma$, $ne$, $yp$, &c. Ensuite selon la propriété de la parabole,

| | | |
|---|---|---|
| on aura | 1 | $SA : AB^2 :: Sa : am^2$ |
| | 2 | $SA : AB^2 :: Se : en^2$ |
| | 3 | $SA : AB^2 :: Sy : yp^2$. |
| Mais | | $Sa = fm$, $Se = gn$, $Sy = hp$, $SA = dB$; donc on aura alternativement |
| 3, | 4 | $AB^2 : dB :: yp^2 : hp$ |
| 2, | 5 | $AB^2 : dB :: en^2 : gn$ |
| 1, | 6 | $AB^2 : dB :: am^2 : fm$, &c. |

Dans ces proportions $am^2$, $en^2$, $yp^2$, &c. sont une suite de quarrés, dont les racines $Sf$, $Sg$, $Sh$, &c. sont en progression arithmétique, commençant au point S (*fig.* 166) ; & parce que les lignes $hp$, $gn$, $fm$, &c. ont la même raison, elles seront comme cette suite de quarrés, dont $dB$ est le plus grand terme, & $Sd$ le nombre des termes ; par conséquent $\frac{dB \times Sd}{3}$ = somme de toutes ces lignes, par le *lemme* 3 ; mais $SA \times AB = dB \times Sd$. Donc $\frac{SA \times AB}{3}$ = somme de toute la suite de ces lignes ; mais toutes ces lignes forment l'aire du complément de la demi-parabole, c'est-à-dire l'aire de ce qui manque à la demi-parabole, pour compléter ou remplir le parallelo-

gramme S$d$BA. Donc $SA \times AB - \frac{1}{3} SA \times AB = \frac{2SA \times AB}{3}$ sera l'aire de la demi-parabole SAB ; par conséquent $\frac{2}{3} SA \times bB$ sera l'aire de toute la parabole $b$SB.

### *Exemple.*

Soit la base ou la plus grande ordonnée d'une parabole $bB = 24$, son axe $SA = 33$ ; on aura $2SA \times bB = 66 \times 24 = 1584$, & 3 ) 1584 ( 528, aire de la parabole.

### THEOREME XXIV.

*Le conoïde parabolique est la moitié de son cylindre circonscrit.*

### Demonstration.

Si une demi-parabole, comme BSA (*fig.* 167) roule ou se meut autour de son axe (SA), elle formera un conoïde parabolique, composé d'une suite infinie de cercles, ⊙ *ba*, ⊙ *fe*, ⊙ *gy*, *&c.* par la définit. 17 ; & selon la propriété de la parabole, on aura $SA : AB :: AB : \frac{AB^2}{SA} = P$, parametre.

Et $Sa \times P = ba^2$
$Se \times P = fe^2$
$Sy \times P = gy^2$, *&c.*
} Ici $Sa \times P$, $Se \times P$, $Sy \times P$, &c. sont une suite de termes en même progression arithmétique ; donc $ba^2$, $fe^2$, *&c.* sont en même progression, commençant au point S, dont $AB^2$ est le plus grand terme, & SA le nombre des termes. Donc $AB^2 \times \frac{1}{2} SA =$ somme de tous les termes, par le *lemme* 2.

Par conséquent ⊙ $AB \times \frac{1}{2} SA =$ somme de toute la suite des ⊙ *ba*, ⊙ *fe*, ⊙ *gy*, *&c.* qui compose la solidité du conoïde.

Et faisant $D = 2AB$, & $H = SA$, on aura $0,7854DD \times \frac{1}{2} H = 0,3927DDH$, solidité du conoïde qui est précisément la moitié du cylindre, dont la base $= D$, & la hauteur $= H$. (Voyez le théor. 11). *Q. E. D.*

Cela étant bien compris, il est aisé de former un

théorême pour trouver le conoïde parabolique tronqué ; car supposant $h = aA$, hauteur de cette partie, & $p = Sa$, hauteur de la partie $bSb$ coupée, on aura $h + p = SA$, hauteur de tout le conoïde : par conséquent $\frac{\odot AB \times h + \odot AB \times p}{2}$ = solidité de tout le conoïde, & $\frac{\odot ba \times p}{2}$ = solidité de la partie coupée.

| | | |
|---|---|---|
| Donc | 1 | $\frac{\odot AB \times h + \odot AB \times p - \odot ba \times p}{2} = T$, solidité du conoïde tronqué. |
| Mais | 2 | $h + p : AB^2 :: p : ba^2$ ; |
| parconséq | 3 | $h + p : \odot AB :: p : \odot ba$ |
| 3. ∵ | 4 | $\odot AB \times p = \odot ba \times h + \odot ba \times p$ |
| $4 - \odot ba$ | 5 | $\odot AB \times p - \odot ba \times p = \odot ba \times h$ |
| $1 \times \overline{2}$ | 6 | $\odot AB \times h + \odot AB \times p - \odot ba \times p = 2T$ |
| $6 - 5$ | 7 | $\odot AB \times h = 2T - \odot ba \times h$ |
| $7 + \odot ba$ | 8 | $\odot AB \times h + \odot ba \times h = 2T$ |
| $8 \div \overline{2}$ | 9 | $\frac{\odot AB \times h + \odot ba \times h}{2} = T$, conoïde tronqué. |

Soit $D = AB$ (*fig.* 168) comme auparavant, & $d = 2ba$, diametre de la partie coupée ; nous aurons le théorême suivant.

THEOREME XXV.

$0,\overline{3927DD + 0,3927dd} \times h$ = solidité du conoïde tronqué ; ou $\frac{DD + dd}{2,5464} \times h = T$ : car ,3927 ) 1,0000 ( = 2,5464 ; & parce que $2,5464 + \frac{2,5464}{2} = 3,8196$ ; on pourra donc faire cette division, 3,8196 ) $\overline{DD + dd} \times \frac{2}{3} h$ ( = au même conoïde tronqué.

*Nota.* On verra dans la suite pourquoi j'ai réduit ce conoïde tronqué au même diviseur que celui du tronc de

la pyramide (lorsque je les appliquerai à la pratique de la Jauge).

### THEOREME XXVI.

*Chaque fuseau parabolique est égal à huit quinziémes de son cylindre circonscrit.*

### DEMONSTRATION.

Si une parabole *b*SB (*fig.* 169) roule ou se meut autour de sa plus grande ordonnée *b*AB, elle formera un solide, nommé *fuseau parabolique*, composé d'une suite infinie de ⊙ *ma*, ⊙ *ne*, ⊙ *py*, *&c.* par la définit. 18.

Supposons la ligne S*d* parallele à AB, &c. (comme dans le théor. 23); on a donc déja prouvé que les lignes *fm*, *gn*, *hp*, *&c.* sont une suite de quarrés, dont les racines sont en progression arithmétique; par conséquent leurs quarrés $fm^2$, $gn^2$, $hp^2$, *&c.* seront une suite de quarré-quarrés, dont les racines sont en progression arithmétique. Cela étant,

| | | |
|---|---|---|
| nous avons | 1 | $SA - fm = ma$ |
| | 2 | $SA - gn = ne$ |
| | 3 | $SA - hp = py$, *&c.* |
| 1 ⊙ 2 | 4 | $SA^2 - 2SA \times fm + fm^2 = ma^2$ |
| 2 ⊙ 2 | 5 | $SA^2 - 2SA \times gn + gn^2 = ne^2$ |
| 3 ⊙ 2 | 6 | $SA^2 - 2SA \times hp + hp^2 = py^2$, *&c.* |

1°. Dans ces équations, les quarrés $SA^2$, $SA^2$, $SA^2$ étant une suite de quarrés égaux, & AB le nombre des termes, on aura $SA^2 \times AB =$ somme de toute la suite, par le *lemme* 1.

2°. Puisque *fm*, *gn*, *hp*, *&c.* sont une suite de quarrés, dont SA est le plus grand terme, & AB le nombre des termes; on aura $\frac{2SA \times SA \times AB}{3} = \frac{2SA^2 . AB}{3}$ sera la somme de toute cette suite, $2SA \times fm +$ *&c.* par le *lemme* 3.

3°. $fm^2 + gn^2 + hp^2$ *&c.* sera une suite de termes

en raison des quarré-quarrés, comme on l'a fait voir, $dB^2 = SA^2$ sera le plus grand terme, & AB le nombre des termes, on aura donc $\frac{SA^2 \times AB}{3}$ = somme de tous les termes, par le *lemme* 5.

D'où il suit que $SA^2 \times AB - \frac{2SA^2 \times AB}{3} + \frac{SA^2 \times AB}{5}$ = somme de toute la suite des $ma^2$, $ne^2$, $py^2$ &c, c'est-à-dire $\frac{8SA^2 \times AB}{15}$ = somme de tous les $ma^2$, $ne^2$, $py^2$, &c; par conséquent $\frac{8 \odot SA \times AB}{15}$ = somme de toute la suite des $\odot ma$, $\odot ne$, $\odot py$, &c. qui composent la solidité de la moitié du fuseau SAB.

Donc faisant D = 2SA, & H = 2AB (ou $b$ AB), on aura 0,41888DDH = solidité de tout le fuseau parabolique, qui est $\frac{8}{15}$ de 0,7854DDH, solidité de son cylindre circonscrit. *Q. E. D.*

Delà nous pouvons aussi former un théorême pour trouver le tronc $SApy$ de la figure 169.

Car $\odot SA$ étant le plus grand terme, $\odot py$ le moindre terme, & $Ay$ le nombre de tous les termes ou cercles compris entre A & $y$;

| | | |
|---|---|---|
| nous aurons | 1 | $\overline{SA^2 - \frac{2SA \times hp}{3} + \frac{hp^2}{5}} \times Ay = z$, somme de la suite $SA^2$, $ma^2$, &c. |
| 1 × 3 | 2 | $3SA^2 - 2SA \times hp + \frac{3hp^2}{5} \times Ay = 3z$ |
| 2 ÷ Ay | 3 | $3SA^2 - 2SA \times hp + \frac{3hp^2}{5} = \frac{3z}{Ay}$ |
| Mais | 4 | $SA^2 - 2SA \times hp = py^2 - hp^2$, par le 6[e] cas. |
| 3 — 4 | 5 | $2SA^2 + \frac{3hp^2}{5} = \frac{3z}{Ay} - py^2 + hp^2$ |
| 5 ± &c. | 6 | $2SA^2 + py^2 - \frac{2}{3}hp^2 = \frac{3z}{Ay}$ |
| par conséq. | 7 | $\overline{2\odot SA + \odot py - \frac{2}{3}\odot hp} \times \frac{Ay}{3} = z$, |

somme de toute la suite des ⊙ SA, ⊙ *ma*, ⊙ *ne*, ⊙ *py* qui forment la solidité du tronc SA*py*. Donc faisant D = 2SA ( comme auparavant ) ; C = 2*py*, *x* = 2*hp*, & H = A*y*, on aura $\overline{1,5708DD + 0,7854CC - 0,31416xx} \times \frac{1}{3}H$ = tronc SA*py*. Et si nous faisons L = 2H, nous aurons $\overline{1,5708DD + 0,7854CC - 0,31416xx} \times \frac{1}{3}L$ = double de ce tronc, ou à la zone du milieu. Et si l'on change ces facteurs en un seul diviseur commun, comme dans le tronc du conoïde au théorême 25, on aura le suivant.

## THEOREME XXVII.

3,8196 ) $\overline{2DD + CC - 0,4xx} \times L$ ( = *zone du milieu du fuseau parabolique*.

On s'attend peut-être ici que j'en vienne à faire voir comment on peut trouver l'aire de l'hyperbole & la solidité des corps, formés par la rotation de cette figure autour de son axe ; mais comme cela ne peut pas se faire exactement par des théorêmes certains ou fixes, comme on a fait pour le cercle, l'ellipse, & la parabole, je n'en parlerai pas, & je renverrai le lecteur à l'*Algebre* du Docteur *Wallis*, chap. 90, ou aux *Transactions philosoph.* nomb. 34, où l'on trouve la méthode de former des suites infinies pour la quadrature de l'hyperbole, qui sont trop compliquées pour être clairement expliquées & démontrées dans ce petit Traité, qui n'étant qu'une introduction doit finir ici.

# APPENDIX
## SUR LA PRATIQUE DU JAUGEAGE.

L'Art du *Jaugeage* est la partie des Mathématiques, que l'on nomme *stéréometrie* ou *mesure des solides*, parce qu'on y calcule les capacités ou continences de toutes sortes de vaisseaux que l'on emploie pour les liqueurs, &c. comme si c'étoient des corps réellement solides. Ceux qui se sont rendus maîtres des parties précédentes de ce Traité, n'ont pas besoin de nouvelles directions pour comprendre l'Art du Jaugeage, & il leur paroîtra fort aisé.

Néanmoins comme on ne doit pas supposer que tous ceux qui se destinent à faire la profession de Jaugeurs ayent fait de si grands progrès dans les Mathématiques, j'ai cru devoir présenter aux jeunes Jaugeurs cet *appendix*, où ils ne trouveront que les regles qui sont en usage dans le jaugeage, & qui ont déja été démontrées dans ce Traité. Mais je suppose qu'ils ayent acquis une connoissance suffisante, tant de l'*Arithmétique* que de la *Géométrie*, & s'ils ne l'ont pas, il est nécessaire qu'ils s'y appliquent; c'est-à-dire que,

1°. Quant à l'*Arithmétique*, le jeune Jaugeur doit en comprendre parfaitement les principales regles, surtout la *Multiplication* & la *Division*, tant en nombres entiers qu'en fractions décimales (ce qu'il apprendra aisément dans le second, 3^e^, & 5^e^ chap. de la Part. 1^re^), afin que par ce moyen il calcule promptement la capacité d'un vaisseau, & qu'il le jauge par le seul calcul, c'est-à-dire sans le secours de ces lignes de nombres gravés sur des regles qui glissent les unes sur les autres, dont on fait tant de cas, & qui ne sont que trop en usage, quoiqu'elles ne soient propres tout au plus qu'à former des conjectures sur la vraie capacité des vaisseaux : je

parle de ces *regles portatives* qui n'ont que neuf pouces, ou un pied de longueur, & dont le rayon pour la double ligne des nombres, n'eſt pas de ſix pouces, ce qui fait que les graduations ou diviſions de ces ſortes de lignes ſont ſi petites, qu'à peine peut-on les diſtinguer.

Il eſt vrai que lorſque les *regles* ont deux ou trois pieds de longueur (j'en ai une de ſix pieds), elles peuvent être de quelque uſage, ſurtout dans les petits nombres, quoique toujours les opérations ſe font beaucoup mieux (& preſque auſſi vîte) par le ſeul calcul : cependant le principal uſage de ces *regles* eſt pour prendre les dimenſions, & en cela elles ſont très-utiles.

2°. Quant à la *Géométrie*, le Jaugeur doit ſçavoir non ſeulement prendre les dimenſions (ce qui s'apprend beaucoup mieux par la pratique), mais encore il doit ſçavoir diviſer toute figure ou ſurface irréguliere, comme les *braſſins de biere* en différentes figures régulieres, les plus aiſées & les moins nombreuſes dont elle ſoit capable, afin qu'on puiſſe calculer ſon aire avec exactitude & avec moins de peine. Le Jaugeur apprendra cela (avec un peu de ſoin & d'attention) dans les chapitres 1^er^, 2^e^ & 5^e^ de la 3^e^ partie qu'il doit ſe rendre bien familiers. Il doit auſſi connoître aſſez les ſolides pour être capable, même au coup d'œil (quoique cela s'apprendra mieux par expérience) de déterminer à quelle ſorte de figure on doit rapporter un vaiſſeau (par exemple un tonneau), ou à quelle figure il eſt plus à propos de le réduire, afin qu'on puiſſe bien prendre ſes dimenſions, & calculer ſa capacité avec le moins d'erreur : je dis, avec le moins d'erreur, parce qu'il eſt très-difficile, ou même impoſſible de le faire exactement ; car il n'y a point de tonneau qui ſoit fait avec autant de régularité que les regles de l'Art l'exigent.

3°. Outre ce que nous venons de dire, le jeune Jaugeur doit ſçavoir qu'il doit prendre en pouces, & en fractions décimales d'un pouce, toutes les dimenſions qui ſont en uſage dans le jaugeage, & s'il les prend en

d'autres mesures, comme pieds, toises, &c. il doit réduire ces mesures en pouces (voyez sect. 4, chap. 3 de l'Arithmétique), parce que la capacité de toutes sortes de vaisseaux (connus dans le jaugeage) se mesure en Angleterre par l'étalon du galon de chaque espece, dont la continence se réduit toujours à un certain nombre de pouces cubiques; ainsi le galon de la *biere* en contient 282, celui du *vin* 231, & celui du *blé* 268,8; par conséquent ayant une fois trouvé la capacité superficielle ou solide d'un vaisseau ou tonneau en pouces cubiques, on trouvera facilement combien ce vaisseau peut contenir de galons de biere, de vin, ou de blé.

*Nota.* J'ai dit ici *capacité superficielle en pouces cubiques* ce qui pourroit paroître une expression impropre, selon la définition qne nous avons donnée des surfaces dans la Géométrie; mais on doit sçavoir qu'en matiere de jaugeage, on suppose toujours que les aires ou surfaces ont un pouce d'épaisseur; autrement on ne pourroit pas dire (comme le disent communément les Jaugeurs) que l'aire d'un tel cercle est d'une telle quantité de galons.

Ceci étant bien compris, le jeune Jaugeur doit se mettre en état de bien concevoir les Problêmes suivans, dont la plûpart ont déja été proposés dans les parties précédentes de ce Traité, & qui sont seulement ici appliqués à la pratique. Ainsi pour abréger, j'en renverrai souvent la preuve aux théorêmes & problêmes précédens.

---

## SECTION PREMIERE.

### *Trouver l'Aire de toute surface rectiligne en galons.*

### PROBLEME I.

*Trouver l'aire d'un vaisseau quarré en galons de biere, de vin, ou de grain.*

### REGLE.

*Multipliez la longueur ou la largeur données (étant ici*

*égales ) par elle-même, & le produit donnera l'aire en pouces; divisez ensuite cette aire par 282 ou 231, ou 268,8, & le quotient sera l'aire requise.*

EXEMPLE.

Soit le côté du vaisseau quarré, comme brassin, &c. de 124,5 pouces. Quelle est son aire en galons ?

Premiérement 124,5 × 124,5 = 15500,25, aire en pouces. Ensuite 282 ) 15500,25 ( 54,96, &c. aire en galons de biere. Et 231 ) 15500,25 ( 76,10, &c. aire en galons de vin; ou 268,8 ) 15500,25 ( 57,66, &c. aire en galons de grain.

Mais si l'on aime mieux opérer par *multiplication* que par *division*, on peut changer chaque diviseur en multiplicateur, si l'on divise l'unité ou 1 par ce diviseur. ( Voyez probl. 3, Arithmétique des infinis ).

Ainsi 282 ) 1,000000 ( 0,003546, multiplicateur pour les galons en biere. Et 231 ) 1,000000 ( 0,004329, multiplicateur pour les galons en vin; ou 268,8) 1,000000 ( 0,003722, multiplicateur pour les galons en grain; par conséquent 15500,25 × 0,003546 = 54,96, &c. aire en galons de biere, comme ci-devant, & ainsi des autres.

PROBLEME II.

*Trouver l'aire d'un vaisseau, brassin, &c. qui a la figure d'un parallelogramme rectangle en galons de biere, &c.*

Voyez la regle pour trouver son aire en pouces dans le probl. 1, chap. 5 des Elémens de Géométrie. Divisez ensuite cette aire, ou multipliez-la comme ci-devant, & vous aurez l'aire en galons.

EXEMPLE.

Soit la longueur d'une brassiere de 217,5 pouces, & sa largeur de 85,6. Quelle sera son aire en galons, &c ?

Premiérement 217,5 × 85,6 = 18648, & 282) 18648 ( 66,12, &c; ou 18648 × 0,003546 = 66,12, &c. aire requise en galons de biere.

## PROBLEME III.

*Trouver l'aire d'un vaisseau triangulaire en galons de biere, &c.*

Voyez la regle pour trouver cette aire dans le probl. 3. du même chap. 5 ; ensuite divisez (ou multipliez) cette aire comme auparavant, & vous aurez l'aire requise.

### EXEMPLE.

La longueur de la base d'un brassin triangulaire est de 86,4 pouces, & sa largeur perpendiculaire de 57 ; quelle sera son aire en galons de biere ?

$86,4 \times \frac{67}{2} = 2462,4$, & 282 ) 2462,4 ( 8,73, &c; ou $2462,4 \times 0,003546 = 8,73$, &c. aire en galons de biere.

En procédant de cette maniere, vous trouverez aisément l'aire de toute sorte de vaisseau ou brassin, soit qu'il ait la figure d'un *rhombe*, d'un *rhomboïde*, d'un *trapeze*, ou de tout autre *poligone*, régulier ou irrégulier en galons de biere, &c. Si vous le divisez d'abord en triangles, & si vous cherchez l'aire de tous ces triangles (comme dans les problêmes 2, 4, 5 & 6 du chap 5, Part. 3), la somme de ces aires étant divisée (ou multipliée) par son propre diviseur (ou multiplicateur) comme auparavant, donnera l'aire requise.

Dans la pratique on divise les vaisseaux poligones en triangles par le moyen d'un cordeau à tracer des lignes, tel que celui dont se servent les Charpentiers, en cette maniere :

Soit une brassiere ou vaisseau de la *figure* 170 A B C D F G, attachez l'extrêmité du cordeau à un coin ou angle du vaisseau, comme en A, avec un clou, & tendez-le jusqu'à l'angle C sur le fond du vaisseau pour tracer la diagonale A C ; tendez-le ensuite à l'angle D pour tracer une autre diagonale AD, & ainsi de suite pour la diagonale GD, &c. Ensuite ayant marqué toutes ces diagonales,

nales, vous trouverez les perpendiculaires, en cette maniere : Attachez, comme auparavant, le cordeau à l'angle B, & tendant le fil à droite & à gauche, vous trouverez la plus courte distance entre l'angle B & la diagonale AC, & vous y marquerez une ligne qui sera la perpendiculaire abaissée du point B sur la ligne AC, & ainsi des autres perpendiculaires.

Lorsqu'elles seront toutes marquées sur le fond du vaisseau, vous les mesurerez avec chaque diagonale par le moyen d'une ligne divisée en pouces, &c. & vous pourrez alors calculer l'aire par les régles précédentes.

Il est bon d'observer ici, en passant, que le nombre des triangles doit toujours être moindre de deux, & celui des diagonales moindre de trois que n'est le nombre des côtés de toute figure rectiligne, qui est divisée de cette maniere :

Ayant trouvé, comme ci-devant, l'aire de chaque brassiere (qui selon les loix de l'excise, doit être fixe & immuable), il ne reste plus qu'à trouver la vraie profondeur ou jauge de ce vaisseau pour pouvoir calculer la vraie quantité de biere en chaque profondeur ; ce qui se fait ainsi :

1°. Lorsque le fond du vaisseau est tout couvert (à une certaine profondeur) ou de biere, ou d'une autre liqueur (par exemple d'eau), il faut mesurer sa profondeur en huit ou dix endroits différens (plus ou moins selon la largeur du bacquet) aussi éloignés l'un de l'autre que vous pourrez, & à égales distances, en marquant chaque profondeur de liqueur en pouces, & en fractions décimales du pouce.

2°. Divisez la somme de toutes ces profondeurs ou pouces par le nombre des endroits où vous les avez prises, & le quotient vous donnera la profondeur moyenne.

3°. Enfin cherchez (s'il est possible) l'endroit du fond où l'eau a précisément cette profondeur moyenne, & faites-y une marque pour avoir le vrai point où il faudra toujours mesurer la profondeur du vaisseau. Si dans

la suite vous mesurez ou jaugez dans cet endroit la profondeur d'une quantité de biere (qui doit couvrir tout le baquet); & si vous multipliez les pouces de profondeur par l'aire du fond qui a été prise en galons, le produit vous marquera la quantité de biere (ou le nombre de galons) qui étoit alors dans ce vaisseau, pourvu que les côtés du baquet soient à angles droits avec le fond.

---

## SECTION II.

*Trouver l'aire d'une surface circulaire & elliptique en galons.*

1°. J'AI démontré dans le chap. 6, Part. 3, & théor. 3, 5 & 6, Part. 5, que la circonférence du cercle, dont le diametre est l'unité ou 1, est 3,14159265, &c. (ou pour l'usage commun 3,1416), & que son aire est 0,78539816, &c. (ou 0,7854 presque)

2°. J'ai aussi fait voir que les circonférences de tous les cercles sont entr'elles comme leurs diametres, & leurs aires comme les quarrés des diametres, c'est-à-dire 1 : 3,1416 :: le diametre d'un cercle est à sa circonférence, & 1 : 0,7854 :: le quarré du diametre est à son aire.

De ces deux proportions dépend la solution de toutes les questions communes ou pratiques sur le cercle. (Voyez les six problêmes à la fin du théor. 6 de la Part. 6).

### PROBLEME IV.

*Le diametre d'un cercle étant donné en pouces, trouver sa circonférence.*

### REGLE.

*Multipliez le diametre donné par 3,1416, & le produit sera la circonference requise.* (Voyez probl. 1, Part. 5 après le théor. 6).

### EXEMPLE.

Soit le diametre d'un cercle de 54, 5 pouces, on de-

mande sa circonférence : Nous avons 54,5 × 3,1416 = 171,21, &c. pouces, qui sont la circonférence requise. La converse de ce problême est aisée : ayant la circonférence, trouver le diametre. ( Voyez problême 3, Part. 5 ).

## PROBLEME V.

*Le diametre d'un cercle étant donné ( en pouces ) trouver son aire en galons.*

### Regle.

*Multipliez le quarré du diametre proposé par 0,7854, & le produit sera l'aire en pouces* ( voyez probl. 2, Part. 5 ). *Cette aire étant divisée par 282 ou 231, &c. le quotient sera l'aire requise.*

### Exemple.

Soit le diametre donné 54,5 pouces, comme ci-devant. Nous avons 54,5 × 54,5 = 2970,25, & 2970,25 × 0,7854 = 2332,83, aire en pouces. Ensuite
282 ) 2332,83( 8,2724, aire en galons de biere.
Et 231 ) 2332,83(10,0988, aire en galons pour le vin;
ou 268,8) 2332,83( 8,6788, aire en galons pour le grain.

Mais ces aires en galons peuvent se trouver beaucoup plus aisément, sans connoître l'aire des cercles en pouces, comme on a fait ici, en prenant le quarré du diametre d'un cercle, dont l'aire est un galon ( ce qui peut se trouver en cette maniere par le théor. 6, Part. 5 ) 0,785398 : 1 : : 282 : 359,05, quarré du diametre d'un cercle dont l'aire est de 282 pouces cubiques, c'est-à-dire d'un galon pour la biere.

Et de cette proportion on peut tirer les diviseurs suivans.
0,785398 ) 282,000000 ( 359,05, diviseur pour le galon de la biere.
Et 0,785398 ) 231,000000 ( 294,12, diviseur pour le galon du vin.
Ou 0,785398 ) 268,800000 ( 342,24, diviseur pour le galon du grain.

Si l'on divise le quarré du diametre d'un cercle par l'un de ces diviseurs fixes ou constans, le quotient marquera l'aire de ce cercle en galons respectifs, comme par exemple dans le dernier cercle, dont le quarré du diametre est 2970,25, on aura 359,05 ) 2970,25 ( 8,2725, aire en galons de biere. Et 294,12 ) 2970,25 ( 10,9088, aire en galons pour le vin; ou 342,24 ) 2970,15 ( 8,6788, aire en galons pour le grain, comme auparavant.

On peut aussi changer ces diviseurs en multiplicateurs, en divisant l'unité ou 1, comme dans le premier problême, ou plutôt en divisant l'aire en pouces du cercle, dont le diametre est 1; c'est-à-dire 0,785398 par 282, ou par 231, &c. en cette maniere :

282 ) 0,785398 ( 0,002785, multiplicateur pour les galons en biere.

Et 231 ) 0,785398 ( 0,003399, multiplicateur pour les galons en vin.

Ou 268,8 ) 0,785398 ( 0,002922, multiplicateur pour les galons en grain.

Ces multiplicateurs sont les aires respectives d'un cercle, dont le diametre est 1; & par conséquent si l'on multiplie le quarré du diametre d'un cercle par l'un de ces nombres, le produit sera l'aire de ce cercle en galons de même nom.

Par exemple, 2970,25 × 0,002785 = 8,2725, aire en galons pour la biere, comme ci-devant.

Et 2970,25 × 0,003399 = 10,0988 = aire en galons pour le vin, &c.

Vous voyez donc que si le diametre d'un cercle est donné en pouces, il y a trois méthodes différentes pour trouver son aire en galons, & toutes également vraies; mais celle qui se fait par les diviseurs constans, est la plus généralement pratiquée.

PROBLEME VI.

*Le grand & le petit axe d'une surface elliptique étant donnés, trouver son aire en galons.*

### REGLE.

*Multipliez les deux axes l'un par l'autre ( ou la longueur par la largeur ), & divisez leur produit par 359,05 pour les galons en biere, ou 294,12 pour ceux en vin, &c. le quotient sera l'aire requise.* ( Voyez le théor. 7, Part. 5 ).

### EXEMPLE.

Soit le grand axe de 73,5 pouces, & le petit de 51,6 pouces, on demande l'aire en galons pour la biere.
73,5 × 51,6 = 3792,6, & 359,05 ) 3792,6 ( 10,56, aire en galons pour la biere; ou 294,12 ) 3792,6( 12,89, aire en galons pour le vin.

*Nota.* Les deux derniers problêmes sont d'un grand usage pour jauger la biere parmi les Avitailleurs de la campagne en Angleterre, qui ne brassent communément que de petites longueurs de biere ( d'environ 20 ou 60 galons par chaque brassin ), & conservent leurs bieres dans plusieurs vaisseaux ou cuves ouvertes, dont les fonds sont ou des cercles ou des ellipses, ayant leurs côtés assez bas, & étant communément plus évasés en haut qu'en bas.

La pratique ordinaire pour trouver la quantité de biere qui se trouve chaque fois dans une de ces cuves ouvertes est celle-ci : Lorsque la cuve est à sec, on cherche la véritable aire de son fond, selon sa figure ( comme ci-devant ), & l'on marque cette aire sur la partie extérieure de la cuve ( j'ai pratiqué cela ordinairement, parce que les Avitailleurs se prêtent souvent leurs cuves les uns aux autres ), ou bien il faut numéroter la cuve, & & enrégistrer son aire ( & son numéro ) dans un Livre ; ensuite lorsqu'il y aura de la biere dans l'une de ces cuves, on prendra le diametre de la surface supérieure de la biere pour en avoir l'aire, qu'on ajoutera à celle du fond. si l'on multiplie la demi-somme de ces deux aires par la profondeur de la biere ( que l'on prendra aussi près du milieu de la cuve qu'il sera possible ), ou si l'on multiplie la somme de ces deux aires par la moitié de la profondeur

( prise de cette maniere ), le produit marquera, à fort peu de chose près, la quantité de cette biere.

## PROBLEME VII.

*Le diametre d'un cercle & le sinus verse ( ou la hauteur ) d'un segment étant donnés, trouver l'aire de ce segment en galons.*

Dans la Part. 5, avant le théorême 7, j'ai donné deux méthodes pour trouver l'aire d'un segment de cercle en pouces.

Si l'on divise cette aire par 282 ou 231, &c. le quotient sera la même aire en galons; mais comme l'aire d'un tel segment peut se trouver promptement en galons ( sans la chercher en pouces ) par le moyen de la table des segmens, dont on a donné-la construction dans le problême, qui est avant le théor. 7, Part. 5, j'ai joint ici un *abrégé* de cette table, qui suffira pour la pratique ordinaire, non seulement pour trouver l'aire de chaque segment de cercle en galons, mais encore le nombre des galons que l'on a tirés d'un vaisseau cylindrique, couché sa longueur, ou de galons qui y restent, ou même que l'on a tirés d'un tonneau, dont l'axe est ordinairement parallele à l'horizon ( l'ayant auparavant réduit au cylindre, comme on le fera voir plus au long dans la suite.

*TABLE des Segmens d'un cercle, dont l'aire est l'unité ou* 1, *& dont le diametre est divisé par des cordes paralleles en* 100 *parties égales.*

| *S V* | *Segmens.* | *S V* | *Segmens.* | *S V* | *Segmens.* | *S V* | *Segmens.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0017 | 26 | 0,2066 | 51 | 0,5127 | 76 | 0,8155 |
| 2 | 0,0048 | 27 | 0,2178 | 52 | 0,5255 | 77 | 0,8262 |
| 3 | 0,0087 | 28 | 0,2292 | 53 | 0,5382 | 78 | 0,8369 |
| 4 | 0,0134 | 29 | 0,2407 | 54 | 0,5509 | 79 | 0,8474 |
| 5 | 0,0187 | 30 | 0,2523 | 55 | 0,5635 | 80 | 0,8576 |
| 6 | 0,0245 | 31 | 0,2640 | 56 | 0,5762 | 81 | 0,8677 |
| 7 | 0,0308 | 32 | 0,2759 | 57 | 0,5888 | 82 | 0,8776 |
| 8 | 0,0375 | 33 | 0,2878 | 58 | 0,6014 | 83 | 0,8873 |
| 9 | 0,0446 | 34 | 0,2998 | 59 | 0,6140 | 84 | 0,8968 |
| 10 | 0,0520 | 35 | 0,3119 | 60 | 0,6265 | 85 | 0,9059 |
| 11 | 0,0598 | 36 | 0,3241 | 61 | 0,6389 | 86 | 0,9149 |
| 12 | 0,0680 | 37 | 0,3364 | 62 | 0,6514 | 87 | 0,9236 |
| 13 | 0,0764 | 38 | 0,3486 | 63 | 0,6636 | 88 | 0,9320 |
| 14 | 0,0851 | 39 | 0,3611 | 64 | 0,6759 | 89 | 0,9402 |
| 15 | 0,0941 | 40 | 0,3735 | 65 | 0,6881 | 90 | 0,9480 |
| 16 | 0,1032 | 41 | 0,3860 | 66 | 0,7002 | 91 | 0,9554 |
| 17 | 0,1127 | 42 | 0,3986 | 67 | 0,7122 | 92 | 0,9625 |
| 18 | 0,1224 | 43 | 0,4112 | 68 | 0,7241 | 93 | 0,9692 |
| 19 | 0,1323 | 44 | 0,4238 | 69 | 0,7360 | 94 | 0,9955 |
| 20 | 0,1424 | 45 | 0,4365 | 70 | 0,7477 | 95 | 0,9813 |
| 21 | 0,1526 | 46 | 0,4491 | 71 | 0,7593 | 96 | 0,9866 |
| 22 | 0,1631 | 47 | 0,4618 | 72 | 0,7708 | 97 | 0,9913 |
| 23 | 0,1738 | 48 | 0,4745 | 73 | 0,7822 | 98 | 0,9952 |
| 24 | 0,1845 | 49 | 0,4873 | 74 | 0,7934 | 99 | 0,9983 |
| 25 | 0,1955 | 50 | 0,5000 | 75 | 0,8045 | 100 | 1,0000 |

L'usage de cette Table des *segmens* dépend de la proportion suivante.

Comme le diametre d'un cercle proposé est à 100 (diametre du cercle de la Table), ainsi la hauteur d'un segment du cercle proposé est au sinus verse dans la Table.

Ensuite si l'on multiplie le *segment de la Table*, qui est à côté de ce sinus verse, par l'aire du cercle (soit qu'elle soit en pouces ou en galons), le produit sera l'aire du segment requis (de même nom); c'est-à-dire que si l'aire du cercle est en pouces, celle du segment sera en pouces; si elle est en galons, celle du segment sera en galons.

*EXEMPLE.*

Soit le diametre du cercle donné DA (*fig.* 171) = 62,5 pouces, & la hauteur du segment requis FA = 20 pouces. Quelle sera son aire en galons de biere? L'aire de tout le cercle est 10,8793 galons de biere (par le probl. 5.) & la proportion est 62,5 : 100 :: 20 : 32, sinus verse de la table, dont le segment est 0,2759. Ensuite 10,8793 × 0,2759 = 3,0016 galons de biere, aire du segment requis BAGF. On peut faire la même chose pour les galons de vin, de grain, ou pour les pouces.

Et à cette occasion, on pourra trouver aisément les segmens semblables d'une ellipse. Voyez les proportions des corollaires du 7e & 8e théorême, Part. 5, où je renvoye le Lecteur pour abréger.

---

## SECTION III.

*Calculer la capacité des vaisseaux (comme tonneaux, &c.) qui ont la figure des solides suivans.*

*Nota.* Avant que le jeune Jaugeur en vienne à ces calculs, il doit avoir une idée bien claire des solides qui ont été définis au commencement de la Part. 5 Alors il comprendra aisément de quelles figures on parle dans les problêmes suivans, sans être obligé de répeter ces définitions.

### PROBLEME VIII.

*Trouver la capacité d'un prisme, dont les côtés sont des parallelogrammes, quelle que soit la forme de sa base; c'est-à-*

*dire calculer la capacité ( en galons ) d'un tonneau, &c. dont les côtés sont des parallelogrammes, qui est droit ou placé à angles droits sur ses fonds.*

Il faut premiérement trouver sa solidité en pouces, par le théorême 9 de la Part. 5; ensuite diviser cette solidité par 282 ou 231, ou par 268,8, le quotient marquera sa capacité en galons respectifs, c'est-à-dire en galons pour la biere, pour le vin, ou le grain.

Ou bien multipliez la solidité en pouces par 0,003546, ou 0,004329, &c. ( Voyez les *multiplicateurs* au premier problême ), les produits donneront la capacité en galons respectifs; ou autrement en cette maniere :

Cherchez l'aire véritable de la base ou fond du tonneau, comme on l'a prescrit dans la sect. 1. Cette aire étant multipliée par la hauteur du tonneau ( c'est-à-dire par la profondeur intérieure ) donnera la capacité en galons, comme auparavant.

Je trouve l'opération de ce problême si facile, qu'il est inutile d'en donner des exemples.

### PROBLEME IX.

*Trouver la capacité d'une pyramide ( en galons ) dont la base est rectiligne.*

Chaque pyramide est le tiers du prisme circonscrit, par le théorême 10, Part. 5.

Donc si l'aire de la base d'une pyramide en galons est multipliée par le tiers de sa hauteur perpendiculaire, ou si le tiers de cette aire est multiplié par toute la hauteur, l'un ou l'autre de ces deux produits donnera la capacité de la pyramide en galons, &c; mais la capacité d'une pyramide quarrée peut se trouver aisément en galons par cette regle.

### REGLE.

*Quarrez le côté de sa base, & multipliez ce quarré par la hauteur perpendiculaire; ensuite divisez ce produit par* $846 = 282 \times 3$ *pour les galons de biere, ou par* $693 =$

*231 × 3 pour ceux du vin, ou par 806,4 = 268,8 × 3 pour ceux du grain, le quotient sera la capacité requise.*

Ou si l'on multiplie ce produit par 0,001182 pour galons de biere, ou par 0,001443 pour galons de vin, ou enfin par 0,001241 pour galons de grains; le produit sera la même capacité requise.

## PROBLEME X.

*Trouver la capacité (en galons) du tronc d'une pyramide quarrée, coupée par un plan parallele à sa base.*

1°. Cherchez la solidité de ce tronc en pouces cubiques, par le théor. 15, ou par le théor. 16 de la Part. 5; & divisez ensuite cette capacité en pouces cubiques par 282 ou 231, &c. le quotient donnera la capacité du tronc en galons respectifs.

Mais on peut aisément tirer du théor. 15 la regle générale qui suit, pour trouver la capacité du tronc semblable d'une pyramide, quelle que soit la figure de ses deux bases (en les supposant toutes deux paralleles) soit qu'elles soient ou ne soient pas semblables entr'elles.

### REGLE.

*Trouvez d'abord l'aire de chaque base (de celle d'en haut & de celle d'en bas de la pyramide tronquée proposée); ensuite cherchez une moyenne proportionnelle géométrique entre ces deux aires (par le* lemme 1, sect. 2, chap. 6 de l'Arithmétique). *La somme de ces deux aires & de leur moyenne proportionnelle étant multipliée par le tiers de la hauteur du tronc donnera la capacité requise.*

### EXEMPLE.

Soit un tonneau semblable au tronc inférieur d'une pyramide, dont les bases sont des triangles équilatéraux; que le côté de la base supérieure soit de 42 pouces, celui de la base inférieure de 63,4, & sa hauteur (ou profondeur de 33 pouces; quelle sera la capacité de ce tonneau en galons pour la biere?

Trouvez d'abord l'aire de cette base en pouces, par le probl. 7 du chap. 5 des Elémens de Géométrie : cherchez ensuite la valeur de ces aires en galons pour la biere, par le probl. 3 précédent. Multipliez ces deux aires ensemble, la racine quarrée de leur produit sera l'aire moyenne, &c. comme dans cet exemple.

*EXEMPLE.*

| | | |
|---|---|---|
| L'aire supérieure est | 2,71 | galons pour la biere. |
| L'aire inférieure est | 6,12 | |
| L'aire moyenne sera | 4,07 | |
| Leur *somme* | 12,90 | |

Ensuite $12,9 \times \frac{33}{3} = 141,9$, ou $\frac{12,9}{3} \times 33 = 141,9$, capacité requise.

PROBLEME XI.

*Trouver la capacité d'un cylindre droit en galons ; c'est-à-dire calculer la capacité d'un tonneau rond, &c. dont tous les diametres sont égaux aux deux fonds & au milieu, & à angles droits avec les côtés.*

La capacité d'un tel tonneau se trouve par le théor. 11 de la Part. 5, ou autrement par la regle suivante.

REGLE.

*Multipliez le quarré du diametre par la hauteur, & divisez le produit par* 359,05 (*ou multipliez-le par* 0,002785, *&c.*) *comme dans le probléme* 5, *ce quotient* (*ou produit*) *sera la capacité requise.*

*EXEMPLE.*

Soit le diametre 42,5, & la hauteur 31,5 pouces.

1°. $42,5 \times 42,5 = 1806,25$, & $1806,25 \times 31,5 = 56896,875$. Ensuite 359,05 ) 56896,875 ( 158,46, capacité en galons de biere, &c.

PROBLEME XII.

*Trouver la capacité d'un cone ou d'une pyramide ronde en*

*galons, puisque le cone est le tiers de son cylindre circonscrit,* ( voyez le théor. 13, Part. 5.) *sa capacité se trouvera exactement par la regle suivante.*

REGLE.

*Multipliez le quarré du diametre de sa base par sa hauteur perpendiculaire, & divisez leur produit par* 1077,15 $= 359,05 \times 3$ *pour les galons de biere, ou par* 882,36 $= 294,12 \times 3$ *pour ceux du vin, &c. le quotient sera la capacité requise.*

Ou si l'on multiplie ce produit par $0,000928 = \frac{0,002785}{3}$, ou par $0,001133 = \frac{0,0034}{3}$, ces produits seront la même capacité en galons respectifs.

*EXEMPLE.*

Soit le diametre de la base 42,5, & la hauteur perpendiculaire 31,5 pouces. Quelle est la capacité en galons pour la biere.

1°. $42,5 \times 42,5 = 1806,25$, & $1806,25 \times 31,5 = 56896,875$, comme ci-devant.

2°. 1077,15) 56896,875 ( 52,82, ou $56896,25 \times 0,000928 = 52,82$, capacité en galons pour la biere, & ainsi pour les galons du vin & du grain.

PROBLEME XIII.

*Trouver la capacité du tronc inférieur d'un cone en galons; c'est-à-dire calculer la capacité d'un tonneau rond, &c. dont les diametres en haut & en bas sont paralleles, mais inégaux.*

La capacité d'un pareil tonneau peut se trouver par la regle du probl. 10; mais on peut aisément tirer du théor. 16, Part. 5, la regle suivante.

REGLE.

*Au triple produit des diametres du haut & du bas, ajoutez le quarré de leur différence; multipliez cette somme par la*

*hauteur ( ou profondeur ) , & divisez ce dernier produit par 1077,15 pour les galons de biere , ou par 882,36 pour ceux de vin ; le quotient sera la capacité requise.*

### EXEMPLE.

Supposons le diametre d'en haut de 52,4 pouces, & celui d'en bas de 44,6, & la hauteur de 30 pouces.

1°. 52,4 × 44,6 = 2337,04, & 2337,04 × 3 = 7011,12.
2°. 52,4 — 44,6 = 7,8, & 7,8 × 7,8 = 60,84

Ajoutez la hauteur 30 × 7071,96 = 212158,8.

3°. 1077,15 ) 212158,8 ( 196,96 ; } capacité en galons pour la biere,
ou 212158,8 × 0,000928 = 196,96 }
& ainsi pour les galons du vin ou du grain, selon l'occasion.

Mais si le tonneau ( ou vaisseau ) n'est pas exactement circulaire, c'est-à-dire si le dessus ou le dessous ( ou tous les deux ) sont elliptiques, soit qu'ils soient semblables ou non, peu importe, on trouvera la vraie capacité de ce tonneau par la regle générale du probl. 10.

### PROBLEME XIV.

*L'axe ou le diametre d'une sphere ou d'un globe étant donné en pouces, trouver sa capacité en galons.*

La sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit par le théor. 18, Part. 5. Delà & du théor. 20, Part. 5, il suit que si le cube de l'axe d'une sphere ( mesuré en pouces) est multiplié par 0,5236, le produit sera la capacité de cette sphere en pouces ; par conséquent si l'on divise cette capacité par 282, ou par 231, &c. le quotient sera la capacité en galons.

Mais ces deux opérations de multiplier par 0,5236, & ensuite diviser par 282 ou par 231, &c. peuvent se réduire à une seule, en cette maniere :

282 ) 0,5236 ( 0,001856, multiplicateur pour galons de biere.

Et 231 ) 0,5136 ( 0,002266, multiplicateur pour galons de vin.

Ou 0,5236 ) 282 ( 538,57, diviſeur pour galons de biere.

Et 0,5236 ) 231 ( 441,17, diviſeur pour galons de vin.

Delà réſulte la regle ſuivante.

### REGLE.

*Si le cube de l'axe d'une ſphere eſt diviſé par* 538,57 ( *ou multiplié par* 0,001856 ), *ou diviſé par* 441,17 ( *ou auſſi multiplié par* 0,002266 ) *le quotient ( ou le produit ) ſera la capacité de la ſphere en galons reſpectifs.*

### EXEMPLE.

Soit l'axe ou diametre d'une ſphere ou globe de 22 pouces ; combien contient-elle de galons pour la biere ?

Nous avons $22 \times 22 \times 22 = 10648$, & 538,57) 10648 ( 19,76, galons de biere ; ou $10648 \times 0{,}001856 = 19{,}76$, galons de biere, capacité requiſe.

Et ainſi des galons pour le vin ou pour le grain, ſelon les occaſions.

## PROBLEME XV.

*Trouver la capacité du ſegment d'une ſphere en galons.*

Dans la ſcholie du théor. 18, Part. 5, il y a deux théorêmes pour réſoudre ce problême, ſelon les quantités données.

1°. Si le diametre de la baſe du ſegment & ſa hauteur ſont donnés, on peut trouver ſa capacité par le premier de ces théorêmes, qui donne cette regle.

### REGLE PREMIERE.

*Au triple quarré de la moitié du diametre, ajoutez le quarré de la hauteur, multipliez enſuite cette ſomme par la hauteur, & diviſez le produit par* 538,57 *pour galons de biere, ou par* 441,17 *pour galons de vin, &c. comme ci-devant.*

2°. Mais si l'axe de la sphere est donné avec la hauteur du segment, on pourra en trouver la capacité par le second de ces théorêmes.

### REGLE II.

*Du triple produit de l'axe par la hauteur, ôtez le double quarré de la hauteur; multipliez ensuite le reste par la hauteur, & divisez ce produit par 538,57, &c. comme dans le dernier problême.*

Chacune de ces regles produira la capacité du segment en galons.

### EXEMPLE.

Soit le diametre de la base du segment de 28 pouces, & sa hauteur de 8 : quelle est sa capacité en galons pour la biere.

1°. 2 ) 28 ( 14; ensuite (par la regle 1re) $14 \times 14 \times 3 = 588$, & $6 \times 6 = 36$.

2°. $588 + 36 = 624$.

3°. $624 \times 6 = 3744$. Enfin 538, 57 ) 3744 ( 6,95, capacité requise.

*Nota.* Ce problême peut servir à jauger le fond des brassieres de cuivre, &c.

---

## SECTION IV.

*Méthode pratique pour jauger un tonneau fixe ou une chaudiere, & pour faire une table qui marque combien il doit contenir à chaque pouce de profondeur, ce qui se nomme communément*, mesurer un tonneau par pouces, &c.

IL faut premiérement sçavoir que la plûpart des tonneaux de biere (ou presque tous) sont tellement fixés, qu'ils sont pourtant inclinés autant qu'il est nécessaire pour les égoutter & nettoyer; c'est ce qu'on appelle ordinairement l'égoût ou la chute du tonneau. Or cette chute du tonneau est un onglet du solide que le tonneau

repréſente, & c'eſt ſous cette idée qu'on doit le trouver comme dans le théorême 16, Part. 5. Mais la méthode pratique) & même la meilleure) eſt de verſer dans le tonneau, lorſqu'il eſt vuide, précisément autant de liqueur qu'il en faut pour couvrir ſon fond; car par ce moyen on trouvera, non ſeulement la vraie chute, mais encore le vrai plan horizontal, ou le niveau au deſſus du fond. Si depuis ce plan on prend la profondeur du tonneau (c'eſt-à-dire la plus courte diſtance depuis le haut du tonneau juqu'à la ſurface de la liqueur), & ſi on la porte ſur chacun de ſes côtés, on aura au plus haut du tonneau un vrai plan parallele à celui de la liqueur; enſuite ſi les côtés du tonneau ſont droits depuis le haut juſqu'au bas, on prendra dans ces deux plans autant de dimenſions qu'il ſera néceſſaire pour avoir l'aire véritable de chacun, & par le moyen de ces deux aires & de la profondeur trouvée, on aura la capacité de tout ce qui eſt compris entre ces deux plans, par la regle générale du problême 10.

Maintenant pour meſurer ce tonneau par pouces, il faut diviſer la différence qui eſt entre les aires du haut & du bas, par la profondeur trouvée, & le quotient ſera un nombre fixe, lequel étant ajouté à la plus petite aire, leur ſomme ſera l'aire du pouce ſuivant, & étant ajouté à cette aire, leur ſomme ſera l'aire du 3ᵉ pouce, & ainſi de ſuite de pouce en pouce, juſqu'à ce qu'on ait trouvé l'aire de chaque pouce; la ſomme de toutes ces aires (ſi l'opération a été bien faite) montera (ou ſera égale) à la capacité trouvée auparavant. Et ſi l'on ajoute la chute du tonneau à la ſomme de toutes ces aires, on aura la capacité totale du tonneau.

Par-là on conçoit aiſément que ſi l'on ajoute à la chute du tonneau 1, 2, 3, ou tout autre nombre de ces aires comptées depuis le fond, cette ſomme marquera la quantité de liqueur qui eſt dans le tonneau pour le nombre de pouces depuis le fond, égal au nombre des aires qui auront été ajoutées enſemble.

Ou

Ou si l'on soustrait de toute la capacité du tonneau un nombre quelconque de ces aires ( comptées depuis le haut ), le reste marquera de même la quantité de liqueur ou de boisson qui est dans le tonneau, lorsqu'il y a autant de pouces vuides depuis le haut qu'on a soustrait de ces aires.

Cela étant bien compris, il ne sera pas difficile de faire une table, tant pour chaque pouce vuide, que pour chaque pouce plein d'un tonneau régulier ( c'est-à-dire dont les côtés sont en ligne droite du haut au bas ) quelle que soit la figure de ses bases, & soit qu'il soit assis sur une base plus grande ou plus petite.

Mais si les côtés du tonneau sont irréguliers ( c'est-à-dire s'ils ne sont pas en ligne droite du haut au bas) alors la meilleure maniere & la plus facile sera de diviser le tonneau en plusieurs troncs, de dix pouces chacun en profondeur, & de chercher la capacité de chaque tronc, en prenant les diametres au milieu de chacun de ces dix pouces ( c'est-à-dire le premier diametre à 5 pouces au dessous du haut, le second à 15 pouces depuis le haut,&c.) & multipliant leurs aires respectives par 10 ( ce qui se fait en coupant seulement une figure par une virgule à main droite ); si l'on ajoute la somme de ces troncs à la chute ( comme auparavant ), on aura la capacité totale du tonneau.

*Nota.* Si vous prenez la hauteur de ces troncs de dix pouces dans le côté du tonneau, vous devez avoir égard à la différence entre cette hauteur & la hauteur perpendiculaire de chaque tronc.

Enfin si de toute la capacité du tonneau vous ôtez l'aire moyenne du premier tronc, prise dix fois, & si du reste vous ôtez l'aire moyenne du second tronc, prise dix fois; si du dernier reste vous ôtez l'aire moyenne du 3[e] tronc dix fois, &c. jusqu'à ce qu'il ne reste plus que la chute ou onglet du tonneau, vous aurez par ce moyen une table qui marquera la quantité de boisson

qui est dans le tonneau pour chaque nombre de pouces vuides.

Et telle est aussi la méthode de jauger & de mesurer par pouces les brassieres de cuivre, c'est-à-dire en mesurant & versant dans la brassiere autant de liqueur qu'il en faut pour couvrir précisément son fond, & divisant ensuite sa hauteur perpendiculaire en différens troncs, & ses côtés en quatre parties égales, afin que l'on puisse prendre les diametres qui se croisent ainsi au milieu de chaque tronc.

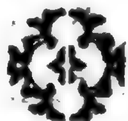
Mais si la brassiere est beaucoup plus évasée en haut qu'en bas, & si ses côtés sont sphériques ou arqués, comme le sont généralement ceux de toutes les grandes brassieres; alors au lieu de prendre les diametres moyens au milieu de chaque dixieme pouce, comme auparavant, il faut les prendre au milieu de chaque sixieme pouce, & continuer comme ci-devant.

On peut trouver la quantité de liqueur qui doit couvrir le fond de la brassiere sans la mesurer; il faut pour cela supposer que le fond est le segment d'une sphere, & que la partie inférieure de la brassiere, où se termine ce fond, est le tronc d'un conoïde parabolique : or le diametre de la surface supérieure de ce fond étant donné avec sa hauteur perpendiculaire, on trouvera la quantité de liqueur par la regle suivante.

REGLE.

*De l'aire du plan qui est au dessus du fond, ôtez $1\frac{1}{3}$ de l'aire de la hauteur du fond ou de la couronne, le reste étant multiplié par la moitié de cette hauteur, donnera la quantité ou le nombre de galons qui doivent couvrir le fond.*

Cette regle se tire des scholies du théor. 18 & du théorême 25, Part. 5.



## SECTION V.

*Calculer la capacité d'un tonneau à deux fonds en galons, comme d'une botte, pipe, muid, barril, &c.*

POUR venir à bout de cette partie difficile du jaugeage, il faut prendre exactement en pouces & en fractions décimales du pouce les trois dimensions suivantes du tonneau proposé, qui sont

Le diametre du *bondon* en dedans du tonneau,
L'un des diametres des *fonds*, en les supposant égaux,
Et la longueur intérieure du tonneau.

*Nota.* En prenant ces dimensions, il faut observer avec soin, 1°. Que le trou du bondon soit au milieu du tonneau, & que les douves tout autour du cercle à la bonde soient régulieres & unies en dedans.

2°. Que les fonds du tonneau soient égaux & bien circulaires; si cela est le diametre extérieur en dedans des douves, approchera fort du diametre intérieur des fonds en dedans du tonneau.

3°. Avec un instrument (destiné à cet usage) on prendra la plus courte distance en longueur entre les surfaces extérieures des deux fonds (en les supposant unis); on en retranchera $1\frac{1}{2}$ (plus ou moins, selon la grandeur du tonneau) à cause de l'épaisseur des deux fonds, le reste sera la longueur intérieure du tonneau.

On croira peut-être que ces dimensions suffisent pour déterminer parfaitement la capacité du tonneau, mais il est aisé de s'appercevoir par la *figure* 172, que les deux tonneaux peuvent avoir les mêmes diametres & la même longueur, tandis que l'un contiendra plus de galons que l'autre.

Par exemple, si ABCDF représente un tonneau, il est clair que si les lignes courbes extérieures ABC & FGD sont les douves du tonneau, il contiendra plus que celui

dont les douves sont les lignes droites intérieures ou pointées, quoique le diametre de la bonde BG, ceux des fonds CD & AF, & la longueur LH soient les mêmes dans les deux tonneaux.

Il suit delà évidemment qu'on ne peut pas donner une regle certaine ou générale pour trouver la vraie capacité de toutes sortes de tonneaux, & c'est pour cela que les jaugeurs supposent ordinairement que chaque tonneau a la forme de l'un des solides suivans :

Sçavoir,
- I. Zone moyenne ou tronc d'un spheroïde.
- II. Zone moyenne ou tronc d'un fuseau parab.
- III. Troncs inférieurs de deux conoïdes.
- IV. Troncs inférieurs de deux cones égaux.

Je vais maintenant donner la maniere de jauger chaque forme de tonneaux, & de calculer sa capacité, conformément à sa figure, en suivant le même ordre.

I. Si les douves du tonneau sont fort courbées ou arquées (comme les lignes extérieures de la figure 173), on suppose alors que le tonneau a la figure de la zone moyenne ou du tronc d'un spheroïde, dont on peut calculer la capacité par le théor. 22 de la Part. 5, lequel donne les deux regles suivantes.

### REGLE I.

*A deux fois le quarré du diametre à la bonde, ajoutez le quarré du diametre du fond ; multipliez cette somme par la longueur, & divisez le produit par* $1077,15 = 3,8197 \times 282$ *pour les galons de biere, & par* $882,36 = 3,8197 \times 231$ *pour les galons de vin ; ou bien*

### REGLE II.

*A deux fois l'aire du cercle à la bonde, ajoutez l'aire du cercle des fonds ; multipliez leur somme par le tiers de la longueur, & le produit sera la capacité en galons respectifs.*

### EXEMPLE I.

Supposons un tonneau de la figure de la zone moyenne

d'un spheroïde, dont le diametre au bondon est 31, 5, le diametre des fonds 24,5, & sa longueur 42 pouces.

1°. 31,5 × 31,5 × 2 = 1984,5, & 24,5 × 24,5 = 600,25.

2°. 1984,5 + 600,25, = 2584,75, & 2584,75 × 42 = 108559,5.

3°. 1077,15 ) 108559,5 ( 100,78, capacité en galons de biere.

Et 882,35 ) 108559,5 ( 123,03, capacité en galons de vin.

Ou par la seconde regle, en cette maniere :

| | |
|---|---|
| Diametre à la bonde 31,5, deux fois l'aire de son cercle . . . . . . . . . | 5,5270 |
| Diametre des fonds 24, 5, aire de son cercle . . . . . . . . . . . . . | 1,6718 |
| La longueur 42, divisée par 3 est 14. . | 7,1988, *somme.* |

Ensuite 7,1988 × 14 = 100,78, capacité en galons de biere, comme ci-devant ; & l'on trouvera de même la capacité en galons de vin.

II. Si les douves du tonneau ne sont pas tout à fait aussi courbes ou arquées que nous venons de le supposer, on prend alors le tonneau pour le tronc moyen d'un fuseau parabolique, & l'on calcule sa capacité par le théorème 27, Part. 5, qui donne cette regle.

### REGLE.

*A deux fois le quarré du diametre de la bonde, ajoutez le quarré du diametre des fonds ; ôtez de leur différence quatre dixiemes du quarré de la difference des diametres ; multipliez le reste par la longueur, & divisez le produit par* 1077, 15, *&c. comme ci-devant.*

### EXEMPLE II.

Soient les dimensions les mêmes que dans le premier exemple ; nous aurons 31,5 × 31,5 × 2 + 24,5 × 24,5

= 2584,75, & 31,5 — 24,5 = 7. De plus 7 × 7 × 0,4 = 19,6, & 2584,75 — 19,6 × 42 = 107736,3.

Ensuite 1077,15 ) 107736,3 ( 100,01, capacité en galons de biere, &c. pour galons de vin.

III. Lorsque les douves du tonneau ne sont que peu courbées ou arquées, on suppose que sa figure est celle des troncs de deux conoïdes paraboliques joints ensemble par une base commune au bondon, & l'on peut en trouver la capacité par le théor. 25, Part. 5, qui donne ces regles.

### REGLE I.

*Au quarré du diametre à la bonde, ajoutez le quarré du diametre des fonds ; multipliez leur somme par la longueur, & divisez le produit par 718,08 = 2,5464 × 282 pour galons de biere, ou par 588,22 = 2,5464 × 231 pour galons de vin ; ou bien*

### REGLE II.

*A l'aire du cercle à la bonde, ajoutez l'aire du cercle des fonds ; multipliez la somme par la demi-longueur, & le produit sera la capacité requise.*

### EXEMPLE III.

Avec les mêmes dimensions que ci-devant, nous aurons 31,5 × 31,5 + 24,5 × 24,5 = 1592,5, & 1592,5 × 42 = 66885.

Et 718,08 ) 66885 ( 93,01, capacité en galons pour la biere.

Ou 588,22 ) 66885 ( 113,7, capacité en galons pour le vin.

IV. Si les douves du tonneau sont droites, depuis le bondon jusqu'aux fonds, comme les lignes intérieures ponctuées dans la derniere figure ( s'il étoit possible de faire un tonneau de cette espece ), on le prendroit alors pour les deux troncs inférieurs de deux cones égaux, qui se joignent par une base commune au bondon, & sa ca-

pacité peut se calculer comme dans le problême 13 ou théor. 15, Part. 5, en cette maniere :

REGLE.

*A la somme des quarrés des diametres du fond & de la bonde, ajoutez leur produit ; multipliez ensuite cette somme par la longueur, & divisez le dernier produit par 1077,15, ou par 882,36, le quotient sera la capacité, &c.*

*EXEMPLE IV.*

Avec les mêmes dimensions qu'auparavant, on aura

31,5 × 31,5 + 24,5 × 24,5 + 31,5 × 24,5 = 2364,25, & 2364,25 × 42 = 99298,5 ; ensuite 1077,15 ) 99298,5 ( 92,18, capacité en galons de biere, & ainsi pour les galons du vin.

Vous avez donc ici la méthode de calculer la vraie capacité de quatre solides, où l'on peut rapporter toutes les figures des tonneaux ; & il paroît par les exemples, que les quatre especes de tonneaux ayant leurs dimensions égales, & les mêmes que celles que nous avons supposées, auront leurs capacités, comme on voit ici,

| *Galons de biere.* | | *Différences.* |
|---|---|---|
| I. | 100,78 | 0,77 |
| II. | 100,01 | 7,00 |
| III. | 93,01 | 0,83 |
| IV. | 92,18 | |

On conçoit aisément par la disproportion ou inégalité de ces différences, qu'il doit y avoir plusieurs tonneaux, dont on ne peut pas trouver la capacité, selon les figures que l'on suppose ici ; c'est pour cela que pour rectifier ces inégalités, quelques Auteurs (qui ont écrit sur ce sujet), ont donné des Théorêmes de leur invention (& leur ont même donné leurs noms). D'autres ont proposé des Tables pour le même dessein. Mais puisqu'on

ne peut ici que conjecturer, & s'approcher de la vérité, on doit préférer dans la pratique la méthode la plus simple & la plus facile, qui consiste à trouver un diametre moyen, propre à réduire le tonneau proposé à un cylindre, en cette maniere :

*Multipliez la différence entre les diametres du fond & du bondon par 0,7, ou par 0,65, ou par 0,6, ou par 0,55, selon que les douves du tonneau sont plus ou moins arquées; ajoutez le produit au diametre des fonds, & la somme sera le diametre moyen requis; ensuite trouvez la capacité, comme dans le probl. 11 précédent.*

### EXEMPLE.

Avec les mêmes dimensions que ci-devant, on trouvera la différence entre les deux diametres 31,5 — 24,5 = 7,

| | | Diam. moyens. |
|---|---|---|
| & 24,5 + | 7 × 0,7 | = 29,4 |
| | 7 × 0,65 | = 29,05 |
| | 7 × 0,6 | = 28,7 |
| | 7 × 0,55 | = 28,35 |

| | Galons de biere. | Capacité. | Différence. |
|---|---|---|---|
| Son Aire | 2,4073 × 42 | = 101,10 | 2,39 |
| | 2,3504 × 42 | = 98,71 | 2,36 |
| | 2,2941 × 42 | = 96,35 | 2,32 |
| | 2,2385 × 42 | = 94,03 | |

On voit par ces exemples, que les différences entre les capacités de chaque tonneau sont régulieres, & à fort peu près égales, ce qui fait voir clairement que cette maniere de calculer leur capacité est moins sujette à erreur que par les figures précédentes.

Le premier de ces quatre multiplicateurs (0,7) est le plus communément en usage parmi nos Jaugeurs pour toutes sortes de tonneaux; mais je n'en ai jamais jaugé aucun qui eût autant de capacité que cette regle en donne, & la raison en est bien claire par le théor. 22, Part. 5, comparé au théor. 19, & à la derniere figure; car

il n'y a point de tonneau ( construit régulièrement ) qui puisse contenir plus que le tronc moyen d'un spheroïde ; mais j'ai toujours trouvé par expérience, que si l'on applique bien le second ou le troisieme de ces multiplicateurs ( qui sont 0,65 & 0,6 ), on approchera beaucoup de la vérité dans la plûpart des tonneaux, & le 4^e^ multiplicateur ( 0,55 ) est fort approchant de la vérité pour les tonneaux, dont les douves sont presque droites entre le fond & la bonde, comme les pipes de vin, &c.

---

## SECTION VI.

*Trouver la quantité de liqueur qui a été tirée d'un tonneau, qui a la figure d'un spheroïde, ou la quantité qui y reste, ce qui se nomme communément* mesure des segmens, *& a deux cas.*

### PREMIER CAS.

TRouver la quantité de liqueur qui reste dans un tonneau, lorsque son axe est perpendiculaire à l'horizon, ou lorsqu'il est droit sur ses fonds.

Pour venir à bout de cette méthode, qui est la plus aisée, il est à propos de sçavoir calculer l'aire d'un cercle entre le bondon & le fond, la distance au bondon ou milieu du tonneau étant donné. Or on peut y parvenir par cette proportion.

*Comme le quarré de la demi-longueur du tonneau est à la différence entre les aires de la bonde, ainsi le quarré de la distance d'un cercle à celui du bondon est à la différence entre l'aire du bondon & l'aire de ce cercle, qui sera celle de la surface de la liqueur.*

### DEMONSTRATION.

Soient { H = demi-longueur du tonneau ( *fig.* 173 ).
D = demi-diametre du cercle à la bonde,
$d$ = demi-diametre du fond.

Et { P = distance d'un cercle à celui du bondon,
$x$ = demi-diametre de ce cercle.

Selon la propriété commune de l'ellipſe, Part. 4, ch. 2, nous aurons $BB : DD :: BB - HH : dd$, & $BB : DD :: BB - PP : xx$. Donc $\frac{DDHH}{DD - dd} = BB$, & $\frac{DDPP}{DD - xx} = BB$; donc $\frac{DDHH}{DD - dd} = \frac{DDPP}{DD - xx}$.

Cette équation étant délivrée des fractions, deviendra $DDHH - xxHH = DDPP - ddPP$, ce qui donne cette analogie $HH : DD - dd :: PP : DD - xx$, & ôtant $DD - xx$ de $DD$, on aura $xx$; mais les aires des cercles ſont comme les quarrés de leurs diametres par le théor. 6, Part. 5. Donc, &c. *Q. E. D.*

Enſuite vous ôterez de l'aire du cercle à la bonde le tiers de la différence précédente entre l'aire de ce cercle & l'aire de la ſurface de la liqueur; vous multiplierez ce reſte par la diſtance de la liqueur à la bonde, & le produit vous donnera la quantité de liqueur qui eſt ou au deſſus ou au deſſous de la moitié du tonneau.

### *Exemple.*

Suppoſons un tonneau qui ait les mêmes dimenſions que celui du premier exemple, & qu'il ſoit requis de trouver quelle quantité de liqueur il contient (en meſures de biere) lorſqu'il n'y a plus que neuf pouces de plein. La demi-longueur du tonneau eſt ici de 21 pouces, dont le quarré eſt 441, & la diſtance de la liqueur au bondon eſt $21 - 9 = 12$, ſon quarré eſt 144; la différence entre les aires du bondon & du fond eſt 1,0917 ($= 2,7635 - 1,6718$). Donc $441 : 1,0917 :: 144 : 0,3564$, & $2,7635 - 0,3564 = 2,4071$, aire de la ſurface de la liqueur.

De plus 3) 0,3564 (0,1188, & $2,7635 - 0,1188 = 2,6447$; enſuite $2,6447 \times 12 = 31,7364$, ce qui manque au tonneau pour être à demi-plein; donc $50,39 - 31,73 = 18,66$, quantité de liqueur dans le tonneau, lorſqu'il n'y a que neuf pouces de plein en gallons

de biere ; & s'il n'eût manqué au tonneau que 9 pouces pour être plein, alors $50,39 + 31,73 = 82,12$ auroit été la quantité de liqueur contenue dans le tonneau.

*Nota.* Comme les deux premiers termes ( 441 & 1,0917 ) sont fixes dans la proportion, ou continuent d'être les mêmes pour toutes les distances, il sera facile de calculer l'aire de tous les cercles entre le bondon & le fond pour chaque pouce, & de faire par ce moyen une Table qui marquera la quantité de liqueur qu'on aura tirée, ou qui restera dans le tonneau pour chaque profondeur.

## SECOND CAS.

Trouver la quantité de liqueur qui reste dans un tonneau, lorsque son axe est parallele à l'horizon, ou qu'il est couché selon sa longueur.

On trouve beaucoup de Tables différentes dans les Livres de Jaugeage destinées à cet usage, mais j'ai toujours observé que la méthode suivante de calculer le vuide des tonneaux, par le moyen de la Table des segmens du cercle, approche fort de la vérité dans toutes sortes de tonneaux.

1°. Par le moyen des diametres du bondon & du fond cherchez un diametre moyen qui réduise le tonneau proposé à un cylindre, selon la méthode de la sect. 5, & cherchez sa capacité totale comme dans les exemples de cette section.

2°. Du diametre du bondon, ôtez le diametre moyen, & prenez la moitié de cette différence ( ou divisez-la par 2 ).

3°. Des pouces de hauteur de la liqueur dans le tonneau proposé, ôtez cette demi-différence, & l'ayant nommée $x$, faites cette proportion.

*Comme le diametre moyen est à* 100 ( *diametre du cercle de la Table* ), *ainsi la derniere différence* ( $x$ ) *est au sinus verse de la Table.*

4°. Enfin si le segment de la Table, qui est à côté de ce sinus verse, est multiplié par la capacité totale du ton-

neau, le produit marquera la quantité de liqueur qui reste dans le tonneau, ou qu'on en a tirée.

*EXEMPLE.*

Soit le tonneau de la seconde espece, comme à la fin de la section 5, c'est-à-dire dont le diametre à la bonde est 31,5 pouces, le diametre moyen 29,05, & la capacité 98,76, galons de biere; supposons qu'il ne soit rempli qu'à la hauteur de 10,5 pouces, on demande ce qu'il contient en galons.

Nous avons ici 31,5 — 29,05 = 2,45, la moitié est 1,22, & 10,5 — 1,22 = 9,28; ensuite 29,05 : 100 :: 9,28 : 31,9 = sinus verse. Son segment est 0,2748, & 98,71, × 0,2748 = 27,12, nombre des galons qui restent dans le tonneau.

De plus, 31,5 — 10,5 = 21 pouces vuides, & 21 — 1,22 = 19,78; ensuite 29,05 : 100 :: 19,78 : 68, son segment est 0,7241; & 98,71 × 0,7241 = 71,48, nombre des galons du vuide.

*Preuve* 71,48 + 27,12 = 98,6, capacité fort approchante du tonneau, ce qui fait voir la vérité de cette méthode.

En voilà assez pour le Jaugeage des brassieres, cuves, tonneaux, &c. j'ajouterai seulement que comme on calcule la capacité des ustenciles de la biere en galons de biere, on calcule aussi la capacité de ceux des Distillateurs (comme tous leurs alambics, tonneaux, &c.) en galons de vin.

Et lorsqu'on jauge la dreche, on doit observer qu'un boisseau de grain ou de dreche contient 2150,42 pouces cubiques, & ainsi en jaugeant les cuves de dreche ou autres vaisseaux, 2150,42 doit être un diviseur constant ou fixe pour trouver les aires des figures rectilignes en boisseaux à un pouce de profondeur, & 2738 doit être un diviseur constant pour trouver les aires des figures circulaires.

## ADDITION DU TRADUCTEUR.

LA méthode que notre Auteur vient de donner pour trouver la quantité de liqueur qui manque dans un tonneau n'est pas infaillible, & le calcul en est très-difficile. J'ai cru que l'on seroit bien aise de trouver ici celle dont l'Académie Royale des Sciences a bien voulu faire mention dans l'Histoire de 1741, page 100, & dont j'ai donné la démonstration dans la *Théorie du Jaugeage*, imprimée à Lyon, par le Sieur de la Roche: elle consiste principalement dans l'usage de la Table suivante, qui suppose que les tonneaux sont des conoïdes paraboliques tronqués.

*TABLE de la capacité des Segmens des tonneaux, dont le diametre à la bonde est de 100 parties égales.*

| *S.V. ou hauteurs.* | *Diametres des Fonds.* | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 90 | 80 | 70 | 60 |
| 1 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| 2 | 0,0010 | 0,0006 | 0,0004 | 0,0004 |
| 3 | 0,0024 | 0,0014 | 0,0011 | 8,0009 |
| 4 | 0,0046 | 0,0027 | 0,0021 | 0,0018 |
| 5 | 0,0083 | 0,0048 | 0,0038 | 0,0033 |
| 6 | 0.0127 | 0.0075 | 0,0058 | 0,0051 |
| 7 | 0,0180 | 0.0110 | 0,0085 | 0,0074 |
| 8 | 0,0242 | 0,0153 | 0,0119 | 0,0104 |
| 9 | 0,0306 | 0,0203 | 0.0157 | 0,0137 |
| 10 | 0.0375 | 0,0260 | 0,0202 | 0,0176 |
| 11 | 0,0447 | 0,0325 | 0,0253 | 0,0221 |
| 12 | 0,0524 | 0,0397 | 0,0311 | 0,0272 |
| 13 | 0,0605 | 0,0474 | 0,0375 | 0,0327 |
| 14 | 0,0695 | 0,0556 | 0,0448 | 0,0391 |
| 15 | 0,0785 | 0,0642 | 0,0525 | 0,0458 |
| 16 | 0.0876 | 0,0732 | 0,0609 | 0,0533 |

| S. V. ou haut. | Diametres des Fonds. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 90 | 80 | 70 | 60 |
| 17 | 0,0971 | 0,0825 | 0,0700 | 0,0613 |
| 18 | 0,1067 | 0,0920 | 0,0793 | 0,0698 |
| 19 | 0,1169 | 0,1023 | 0,0891 | 0,0790 |
| 20 | 0,1272 | 0,1127 | 0,0994 | 0,0887 |
| 21 | 0,1376 | 0,1232 | 0,1099 | 0,0989 |
| 22 | 0,1482 | 0,1342 | 0,1209 | 0,1097 |
| 23 | 0,1592 | 0,1453 | 0,1321 | 0,1207 |
| 24 | 0,1702 | 0,1566 | 0,1434 | 0,1321 |
| 25 | 0,1814 | 0,1681 | 0,1552 | 0,1439 |
| 26 | 0,1928 | 0,1798 | 0,1673 | 0,1561 |
| 27 | 0,2044 | 0,1918 | 0,1794 | 0,1684 |
| 28 | 0,2162 | 0,2040 | 0,1918 | 0,1811 |
| 29 | 0,2282 | 0,2163 | 0,2046 | 0,1940 |
| 30 | 0,2402 | 0,2288 | 0,2175 | 0,2070 |
| 31 | 0,2522 | 0,2415 | 0,2305 | 0,2206 |
| 32 | 0,2644 | 0,2543 | 0,2437 | 0,2341 |
| 33 | 0,2770 | 0,2672 | 0,2571 | 0,2478 |
| 34 | 0,2897 | 0,2803 | 0,2706 | 0,2618 |
| 35 | 0,3025 | 0,2934 | 0,2841 | 0,2759 |
| 36 | 0,3153 | 0,3067 | 0,2981 | 0,2903 |
| 37 | 0,3282 | 0,3202 | 0,3121 | 0,3047 |
| 38 | 0,3411 | 0,3336 | 0,3261 | 0,3192 |
| 39 | 0,3540 | 0,3471 | 0,3401 | 0,3339 |
| 40 | 0,3669 | 0,3609 | 0,3544 | 0,3487 |
| 41 | 0,3800 | 0,3746 | 0,3687 | 0,3635 |
| 42 | 0,3932 | 0,3883 | 0,3830 | 0,3785 |
| 43 | 0,4065 | 0,4022 | 0,3975 | 0,3935 |
| 44 | 0,4197 | 0,4160 | 0,4120 | 0,4085 |
| 45 | 0,4330 | 0,4299 | 0,4266 | 0,4237 |
| 46 | 0,4462 | 0,4439 | 0,4412 | 0,4389 |
| 47 | 0,4592 | 0,4578 | 0,4558 | 0,4541 |
| 48 | 0,4726 | 0,4719 | 0,4704 | 0,4694 |
| 49 | 0,4862 | 0,4859 | 0,4851 | 0,4847 |
| 50 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 |

L'uſage de cette Table conſiſte dans les regles ſuivantes.

I. Ayant les diametres du bondon & du fond, vous direz : comme le diametre du bondon eſt à celui du fond, ainſi 100 eſt à un quatrieme terme, qui marquera la proportion du diametre des fonds, & la colonne qu'il faut choiſir dans la Table.

II. Ayant la hauteur du ſegment vuide, on dira : comme le diametre du bondon eſt à la hauteur du vuide, ainſi 100 eſt au ſinus verſe de la Table.

III. Multipliez le ſegment de la Table qui eſt à côté de ce ſinus verſe dans la colonne trouvée, par la capacité totale du tonneau, le produit marquera le vuide ou le ſegment du tonneau.

## EXEMPLE.

Soit le tonneau du dernier exemple de notre Auteur, dont le diametre à la bonde eſt 31,5 pouces, celui des fonds 24,5, la capacité totale 98,71 galons, & la hauteur du ſegment 10,5.

1°. 31,5 : 24,5 :: 100 : 7,77, &c. ce qui marque la colonne 80.

2°. 31,5 : 10,5 :: 100 : 33,33, ſinus verſe de la Table.

3°. Le ſegment, à côté de 33, eſt 0,2672, & 0,2672 × 98,71 = 26,37.

FIN.

# CATALOGUE

## Des Livres de Mathématiques, qui se trouvent chez le même Libraire.

*Ouvrages de* M. BELIDOR, *Colonel d'Infanterie, Membre des Académies Royales des Sciences de Paris, de Londres & de Berlin, &c.*

NOuveau Cours de Mathématiques, à l'usage de l'Artillerie & du Génie, où l'on applique les parties les plus utiles de cette Science à la théorie & à la pratique des différens sujets qui peuvent avoir rapport à la guerre, *in*-4°. avec 34 planches, nouvelle édition, 15 liv.

La Science des Ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification & d'architecture civile, *in*-4°. grand papier, 24 liv.

Architecture Hydraulique, *Premiere Partie*, qui contient l'art de conduire, d'élever & de ménager les eaux pour les différens besoins de la vie, en deux volumes *in*-4°. grand papier, avec cent planches, 40 liv.

Architecture Hydraulique, *Seconde Partie*, qui comprend l'art de diriger les eaux de la mer & des rivieres à l'avantage de la défense des places, du commerce & de l'agriculture, en deux vol. *in*-4°. grand papier, enrichis de 120 planches, 50 liv.

Dictionnaire portatif de l'Ingénieur, où l'on explique les principaux termes des sciences les plus nécessaires à un Ingénieur, *in*-8°. 3 liv. 12 s.

Nouveau Cours de Génie, contenant la Fortification raisonnée, l'Artillerie, l'attaque & la défense des places, & les mines & contre-mines, en deux volumes *in*-4°. grand papier. *Sous presse.*

*Ouvrages de M. l'Abbé* DEIDIER, *Professeur de Mathématiques aux Écoles d'Artillerie de la Fere.*

Arithmétique des Géometres, ou Nouveaux Elémens des Mathématiques, contenant l'Arithmétique, l'Algebre, l'analyse, les équations du second & du troisieme degré, &c. *in*-4°. nouvelle édition. *Sous presse.*

La

La Science du Géometre, contenant les Elémens d'Euclide, la Trigonométrie, la Géométrie pratique, le Nivellement, l'Arpentage, les Sections coniques, &c. & tout ce qui concerne la mesure des corps & de leurs surfaces, *in*-4°. avec près de 50 planches, nouvelle édition. *Sous presse.*

La Mesure des Surfaces & des Solides par la connoissance des centres de gravité, & par l'Arithmétique des infinis, *in*-4°. avec figures, 12 liv.

Le Calcul différentiel & le Calcul intégral, expliqués & appliqués à la Géométrie, *in*-4°. avec figures, 15 liv.

La Méchanique générale, pour servir d'introduction aux sciences physico-mathématiques, qui renferme la statique, le jet des bombes, l'hydrostatique, l'airométrie & l'hydraulique, *in*-4°. avec figures, 15 liv.

Le Parfait Ingénieur François, ou la Fortification suivant les systêmes de M. de Vauban, & des autres Auteurs qui ont écrit sur cette science, avec l'attaque & la défense des Places, nouvelle édition, augmentée, *in*-4°. enrichie de 50 planches, 15 liv.

Elémens généraux des parties des Mathématiques nécessaires à l'Artillerie & au Génie, contenant l'Arithmétique, l'Algebre, l'analyse, la Géométrie, la Trigonométrie, le Nivellement, l'Arpentage, les Sections coniques, le Toisé, l'Arithmétique des infinis, la méchanique, la statique, l'airométrie, l'hydraulique & la perspective, en deux volumes *in*-4° avec plus de 60 planches, 24 liv.

Lettres d'un Mathématicien à un Abbé, où l'on prouve que la matiere n'est pas divisible à l'infini, *in*-12. 2 liv.

Lettre de M. de Mairan à Madame la M. du Ch. avec sa Dissertation sur les forces motrices des corps, & la nouvelle réfutation des forces vives, par M. l'Abbé Deidier, *in*-12. 3 liv.

## *Ouvrages de M. OZANAM, de l'Académie des Sciences.*

Cours de Mathématique, qui comprend les parties de cette science les plus utiles à un homme de guerre, en cinq volumes *in*-8°. avec plus de 200 planches, 40 liv.

Les Récréations Mathématiques & Physiques, contenant plusieurs problêmes curieux d'arithmétique, de géométrie, de méchanique, d'optique, de gnomonique & de physique, en quatre volumes *in*-8°. avec quantité de figures, nouv. édit. 20 liv.

Nouveaux Elémens d'Algebre; ou principes généraux pour résoudre toutes sortes de problêmes de Mathématiques, en deux vol. *in*-8°. *Amsterdam.* 9 liv.

## *Traités tirés du Cours de Mathématique* d'Ozanam.

L'Arithmétique, où toutes les parties de cette science sont démon-

trées d'une maniere courte & facile, *in*-8°. *brochure*; 2 liv.

La Trigonométrie rectiligne & sphérique, avec les tables des sinus, tangentes & sécantes, & des logarithmes, par Adrien Wlacq, *in*-8°. 4 liv. 10 s.

La Méchanique, où il est traité des machines simples & composées, &c. *in*-8°. 6 liv.

La Perspective théorique & pratique, où l'on enseigne la méthode de mettre toutes sortes d'objets en perspective, &c. *in*-8°. avec figures, 6 liv.

La Gnomonique, où l'on donne la maniere de faire des Cadrans solaires sur toutes sortes de surfaces, &c. *in*-8°. avec 30 planches, 6 liv.

## *Autres Ouvrages de M.* Ozanam.

Les Élémens d'Euclide du P. Deschalles, avec l'usage de chaque proposition pour toutes les parties des Mathématiques, par M. Audierne, *in*-12, avec 20 pl. Nouv. édit. 1753. 3 liv.

Traité de l'Arpentage & du Toisé, avec un nouveau Tarif pour les bois de charpente, *in*-12. Nouv. édit. augmentée, 1747. 3 liv.

La Géométrie pratique, contenant la trigonométrie, la longimétrie, la planimétrie & la stéréométrie; avec un Traité de l'Arithmétique par Géométrie, *in*-12, avec figures, 2 liv. 10 s.

Usage du Compas de proportion & de l'instrument universel, avec un Traité de la division des champs, *in*-12. avec figures. Nouvelle édition, 1748. 2 liv. 10 s.

Méthode de lever les Plans & les Cartes de terre & de mer, avec toutes sortes d'instrumens & sans instrumens, *in*-12. avec fig. Nouv. édit. augmentée, 1750. 2 liv. 10 s.

Méthode générale pour tracer les Cadrans sur toutes sortes de plans, *in*-12. avec figures. Nouv. édit. *Sous presse*.

## *Ouvrages de M. le* Blond, *Maître de Mathématique des Enfans de France, & Professeur de Mathématique des Pages du Roi.*

Abrégé d'Arithmétique & de Géométrie à l'usage des jeunes Militaires, *in*-12. avec 19 planches, 3 liv.

Nouveaux Élémens de Fortification, contenant ce qu'il y a de plus essentiel à observer dans une place forte pour initier en peu de tems les jeunes Militaires dans la connoissance de cette science, *in*-12. avec 19 planches. Nouvelle édition augmentée, 1752. 3 liv. 10 s.

L'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier, contenant la théorie & la pratique de ces deux sciences appliquées aux emplois de l'homme de guerre, en deux vol. *in*-8°. enrichis de 45 planches, 1748. 12 liv.

## *Suite du même Ouvrage.*

Essai sur la Castramétation, ou sur la maniere de former, de tracer & de mesurer un camp, *in*-8°. avec figures, 1748. 6 liv.

Élémens de la Guerre des Sieges, où il est traité de l'Artillerie, de l'attaque & de la défense des Places; avec un Dictionnaire des termes les plus usités dans la guerre des sieges, en 3 vol. *in*-8°. enrichis de plus de 30 planches, 15 liv.

Élémens de Tactique, ou Traité des évolutions militaires de l'Infanterie & de la Cavalerie. *Sous presse.* 12 liv.

## *Ouvrages de M.* Chretien Wolf, *des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre, de Prusse, &c.*

*Elementa Matheseos universæ, in quibus de arithmeticâ, geometricâ, trigonometricâ, analysi, mechanicâ, opticâ, astronomiâ, geographiâ, chronologiâ, gnomonicâ, architecturâ civili & militari pertractatur. Editio nova in quinque tomos, in* 4°. *distributa.* Genevæ, 60 liv.

*Compendium Elementorum Matheseos universæ, in usum studiosæ juventutis adornatum.* En 2 vol. *in*-8°. Genevæ, 9 liv.

Abrégé du Cours de Mathématique de M. Chrétien Wolf, contenant l'Arithmétique, l'Algebre, la Géométrie, la Trigonométrie, la méchanique, l'hydrostatique, l'airométrie, l'hydraulique, l'optique, la catoptrique, la dioptrique, la perspective, la géographie, la chronologie, la gnomonique, l'astronomie, la navigation, la fortification, l'attaque & la défense des Places, l'artillerie, les feux d'artifice, & l'architecture. En trois volumes *in*-8°. enrichis de 69 planches, 1747. 15 liv.

## *De M.* Maclaurin, *Professeur de Mathématique dans l'Université d'Edimbourg.*

Élémens de la méthode des Fluxions, traduit de l'Anglois, par le R. P. Pezenas, Jésuite, 2 vol. *in*-4°. avec fig. 1747. 20 liv.

Élémens d'Algebre, traduit de l'Anglois, & augmentés par M. le Cozic, Professeur de Mathématique aux Écoles d'Artillerie de la Fere, *in*-4°. avec figures, 1753. 12 liv.

## *De M.* Isaac Newton.

*Philosophiæ naturalis principia Mathematica, cum Commentario perpetuo à* RR. *PP.* Jacquier & le Sueur, *Minim.* En 4 vol. *in*-4°. reliés en trois. Genevæ, 48 liv.

*Isaaci Newton opuscula Mathematica, Philosophica & Philologica.* En trois volumes *in*-4°. Genevæ, 36 liv.

*Philosophia Newtoniana illustrata. A Domckio.* En 2 vol. *in*-8°. Londres.

### *De MM.* BERNOULLI.

*Joannis Bernouilli opera omnia, tam antea sparsim edita, quàm hactenus inedita.* En 4 vol. *in*-4°. avec 120 planches. *Geneve*, 48 liv.

Discours sur les Loix de la communication du mouvement, par M. Jean Bernouilli, *in*-4°. broché, 2 liv. 10 s.

Nouvelles pensées sur le Système de Descartes, par M. Jean Bernouilli, *in*-4°. broché, 1 liv. 10 s.

*Danielis Bernouilli Hydrodinamica, sive de viribus & motibus fluidorum, in* 4°. Strasbourg, 10 liv.

*Jacobi Bernouilli opera omnia.* En 2 vol. *in*-4°. Geneve, 25 liv.

### *De M. le Marquis de* L'HOPITAL.

Traité Analytique des Sections coniques, & de leur usage pour la résolution des Équations, *in*-4°. 12 liv.

Analyse des Infinimens petits pour l'intelligence des lignes courbes, *in*-4°. 8 liv.

Suite des infinimens petits de M. de l'Hopital, contenant le Calcul intégral, par M. Stône, *in*-4°. 8 liv.

### *Ouvrages de M.* BOUGUER, *de l'Académie Royale des Sciences.*

La Figure de la Terre, déterminée par les observations de MM. Bouguer & de la Condamine, envoyés par ordre du Roi sous l'équateur; avec une Relation du voyage fait au Pérou, & la description de ce pays; ouvrage pour servir de suite aux Mémoires de l'Académie, année 1745, *in*-4°. avec figures, vem 13 liv. 10 s.

Traité du Navire, de sa construction & de ses mouvemens; *in*-4°. avec figures, 1746. 15 liv.

Méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres, piece qui a remporté le prix en 1729, 1 liv. 10 s.

De la maniere d'observer en mer la déclinaison de la boussole, piece qui a remporté le rix en 1731, 1 liv. 10 s.

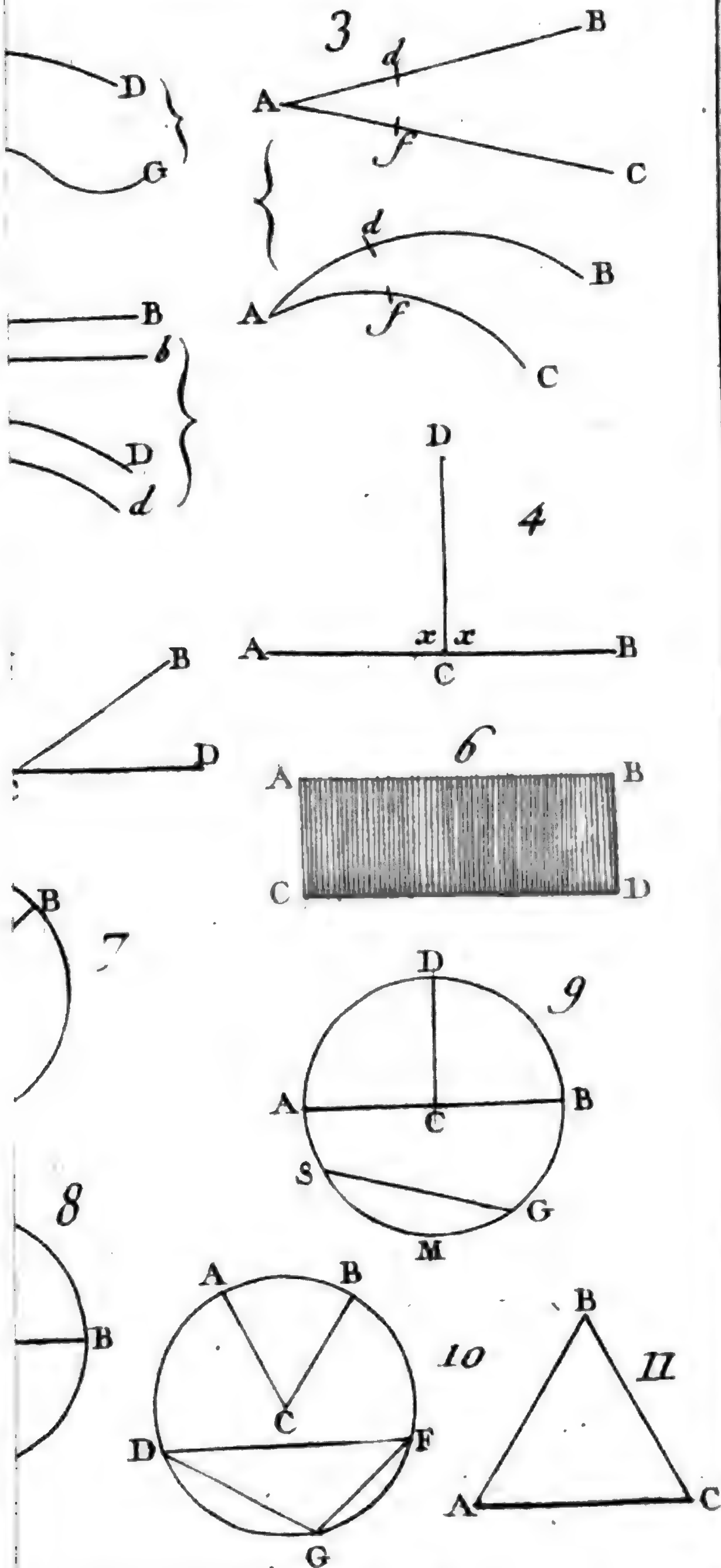
Entretiens sur la cause de l'inclinaison des orbites des planetes. Nouv. édit. augmentée de moitié, *in*-4°. broché, 3 liv.

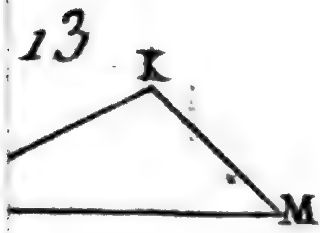
Essai d'Optique sur la gradation de la lumiere, *in*-12. 2 liv.

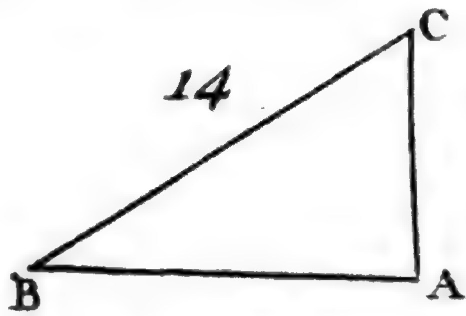
### *Du R. P.* LAMY, *de l'Oratoire.*

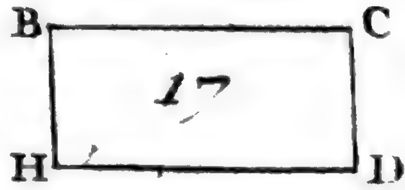
Les Élémens de Géométrie, ou de la mesure de l'étendue, qui comprennent les élémens d'Euclide, les propositions d'Archimede, l'analyse, & une introduction aux sections coniques. Nouvelle édit. corrigée & augmentée, *in*-12. 1756. 2 liv. 10 s.

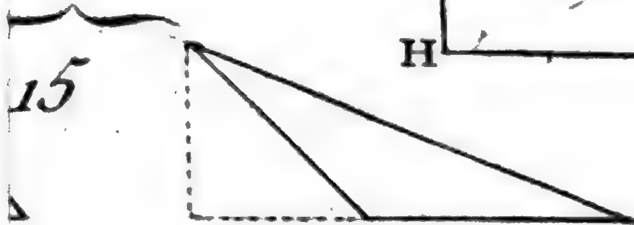
Élémens de Mathématique, ou Traité de la grandeur en général, contenant l'Arithmétique, l'Algebre, l'analyse, &c. *in*-12. 1741. 3 liv.

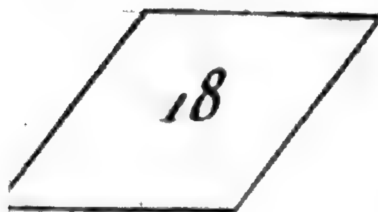

3
A
B
C
d
f
D
G
b
4
x x
6
7
8
9
10
11
S
M
F

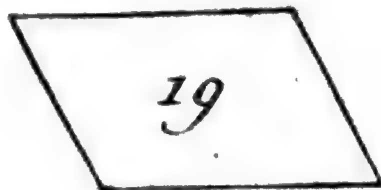

13
K
M

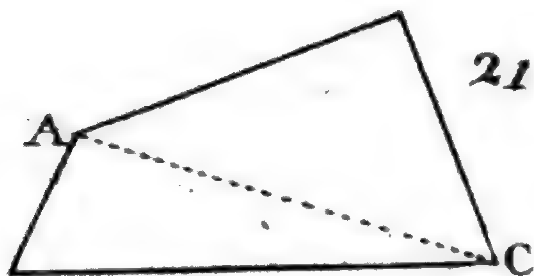

C
14
B
A

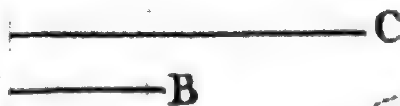

B
C
17
H
D

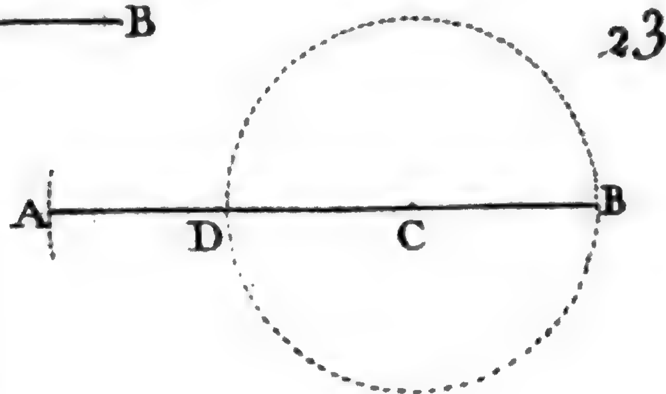

15

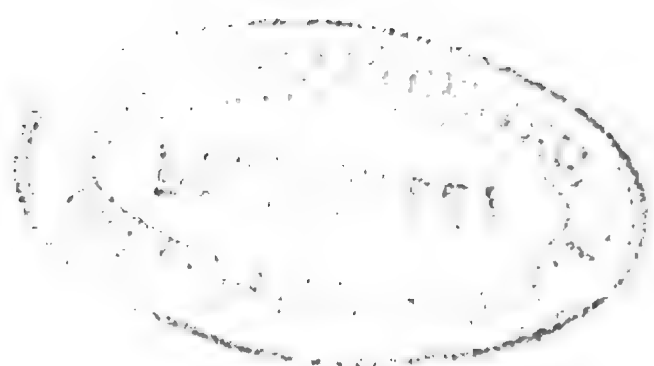

18

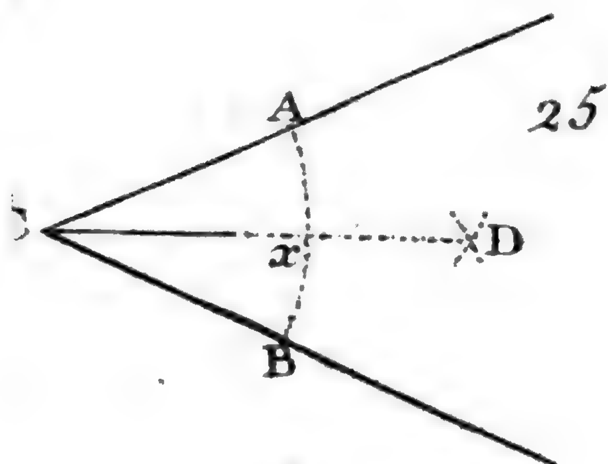

19

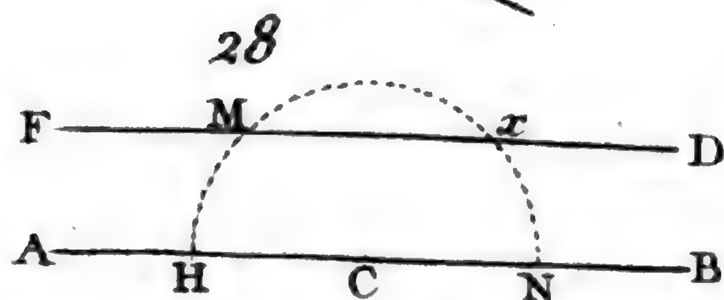

21
A
C


C
B

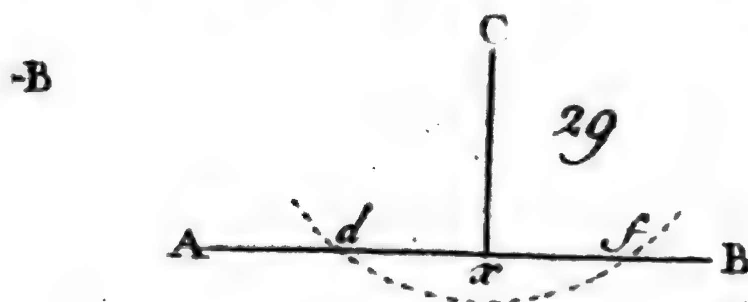

23
A
D
C
B

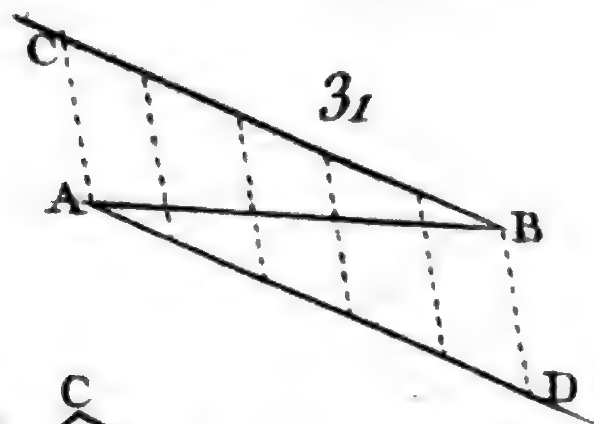


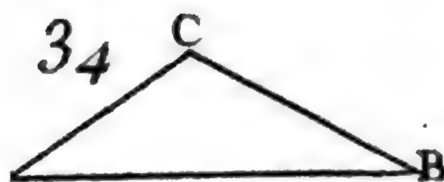


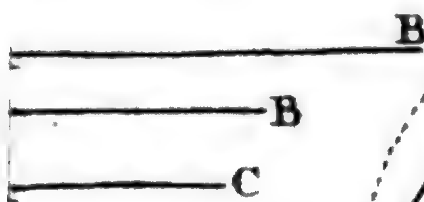



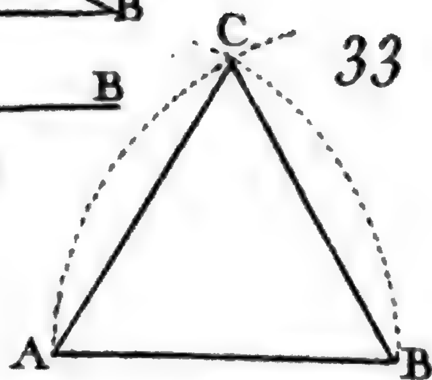

-B

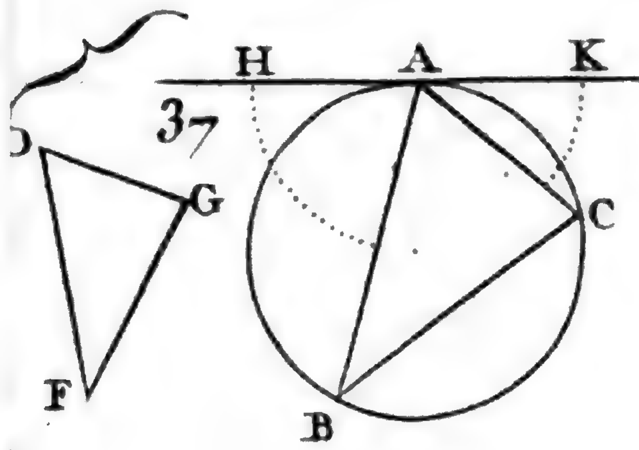


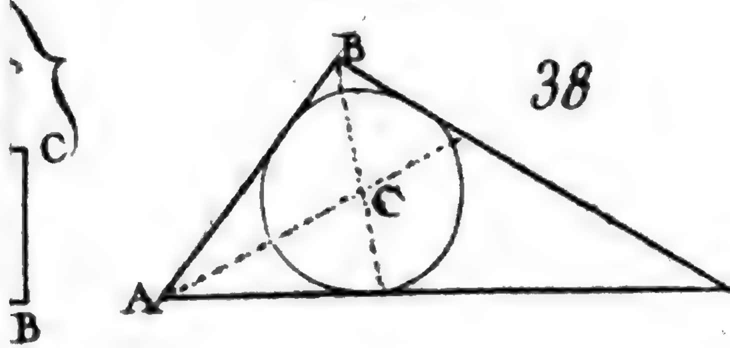



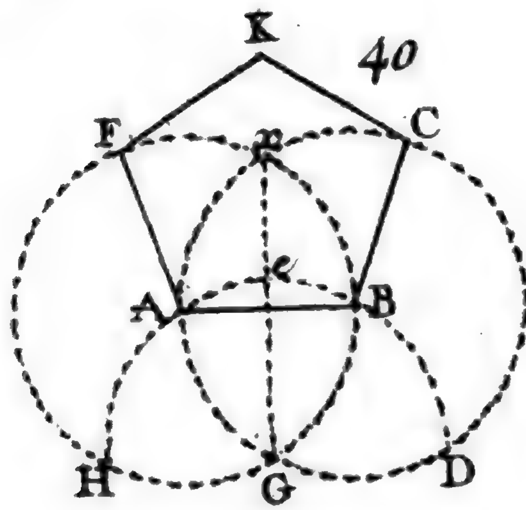



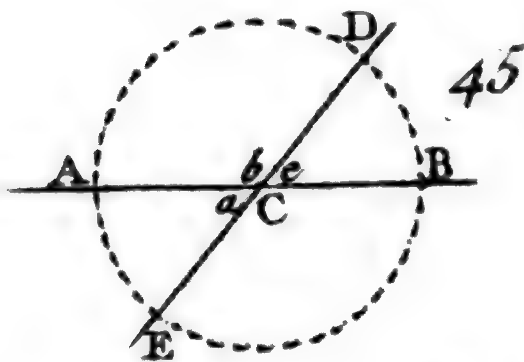



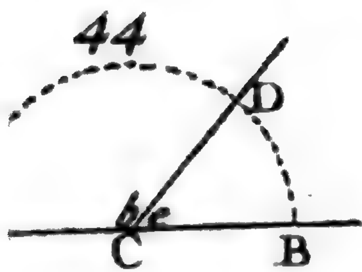




37
H
A
K
G
C
F
B

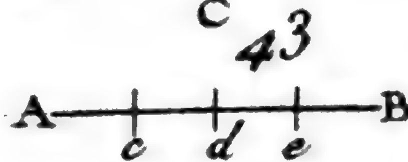

B
38
C
C
A
B

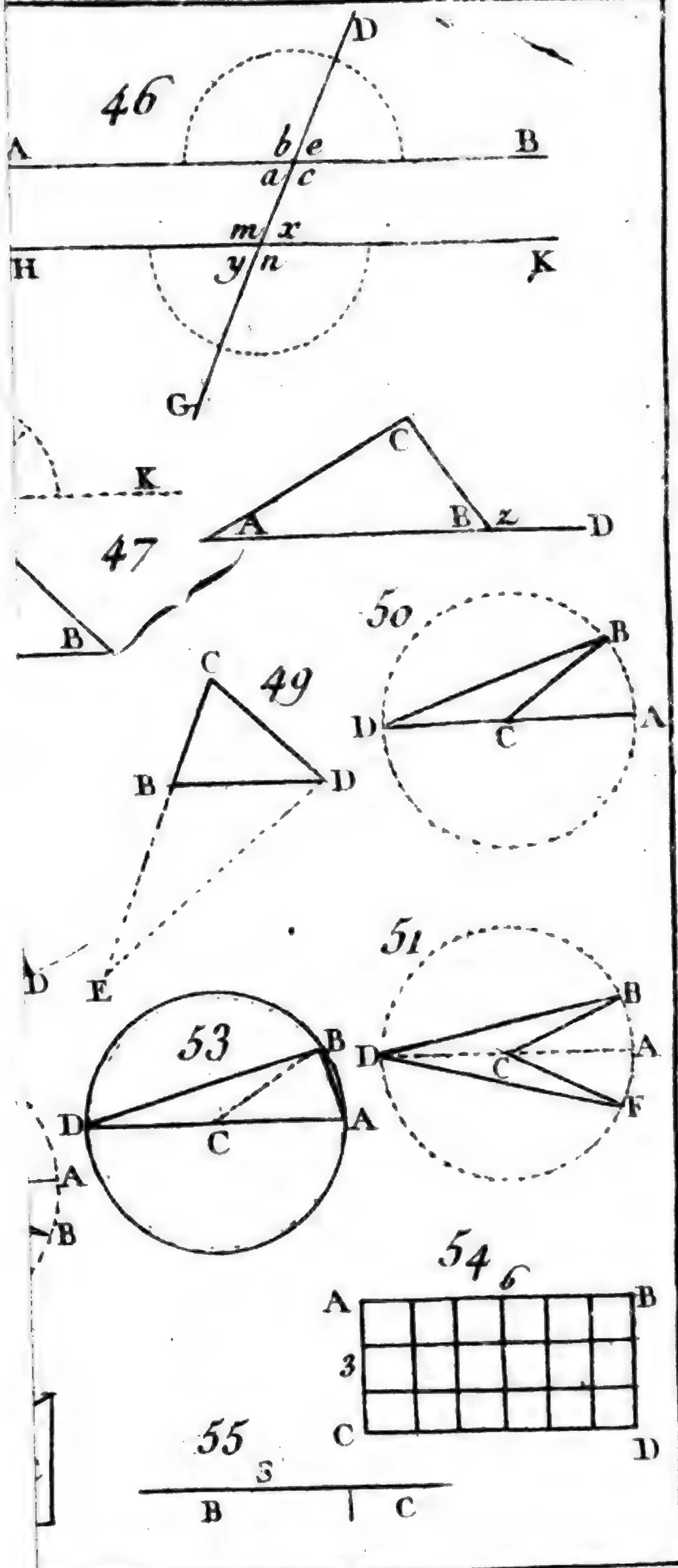

K
40
F
C
e
A
B
H
G
D


D
45
A
b
e
B
a
C
E


44
D
b
e
C
B

42
A
B
C


43
A
B
c
d
e


46
D
A
b e
a c
B
m x
H
y n
K
G
C
K
A
B z
D
47
B
50
B
D
C
A
C
49
B
D
51
D
E
53
B
D
A
C
A
B
A
C
F
54
6
A
B
3
C
D
55
3
B
C

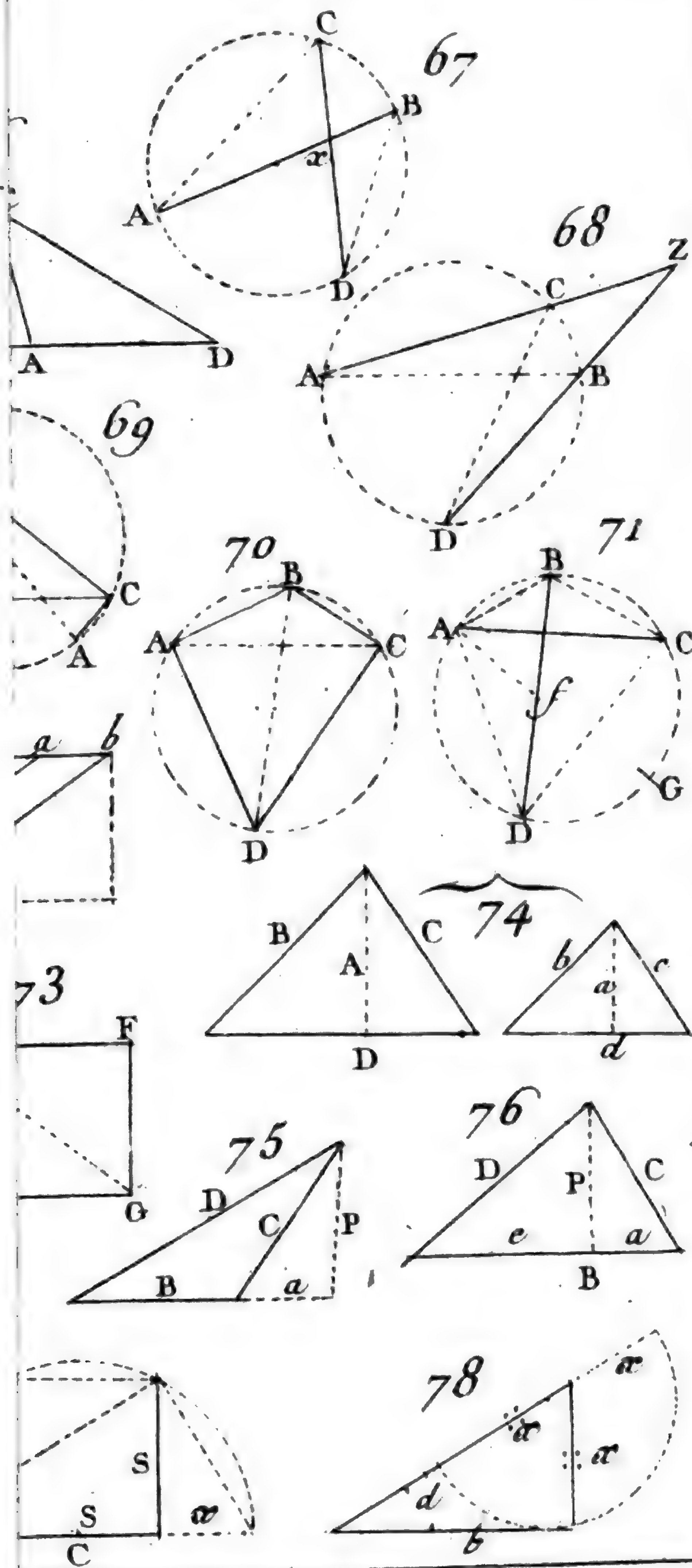
58

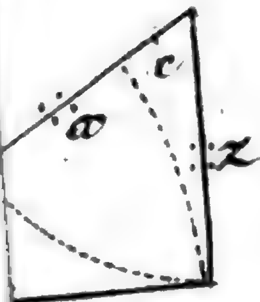
59

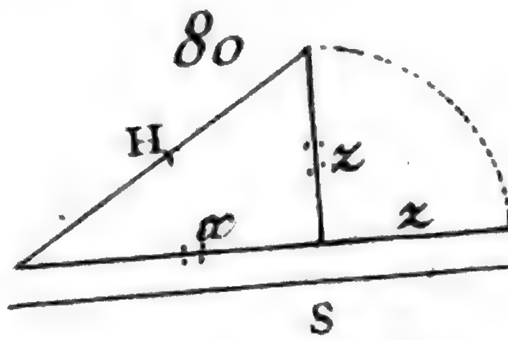
60

63

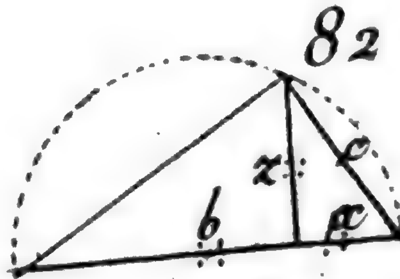
65

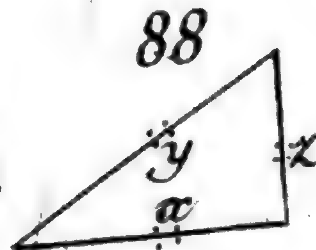

67
C
B
x
A
D
68
Z
C
A
B
D
A
D
69
C
A
70
B
A
C
D
71
B
A
C
f
G
D
a
b
74
B
C
A
D
b
c
a
d
73
F
G
75
D
C
P
B
a
76
D
P
C
e
a
B
S
S
C
x
78
x
x
x
d
b

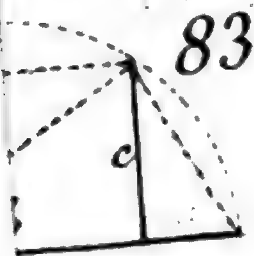

c
x
z

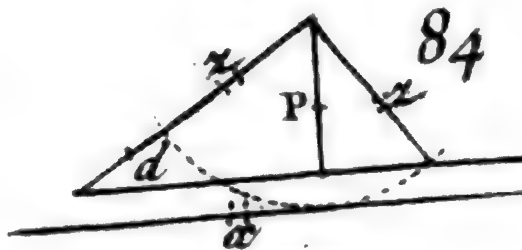

80
H
z
x
z
S

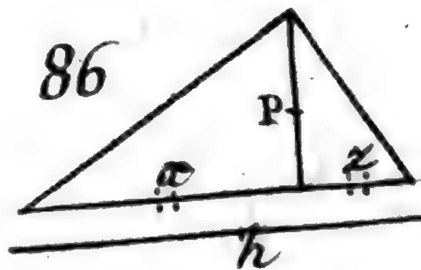
z
z

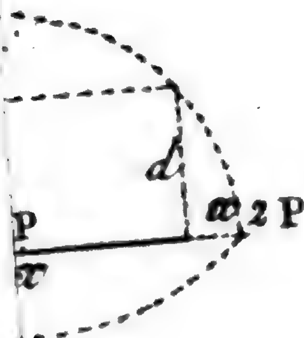

82
z
c
b
x

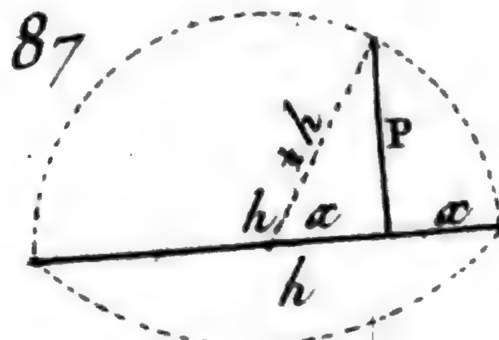

88
y
z
x

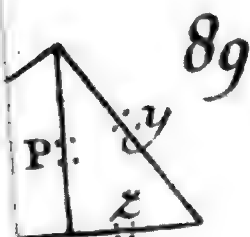

83
c

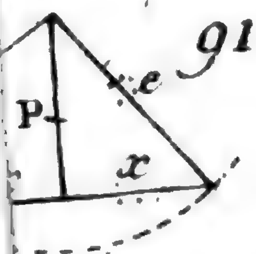

84
z
P
z
d
x

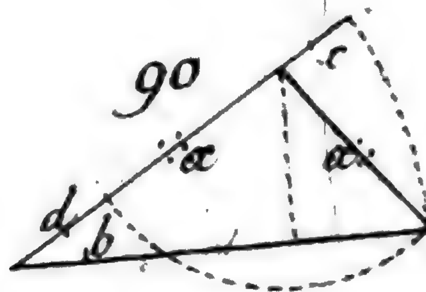

86
P
x
z
h

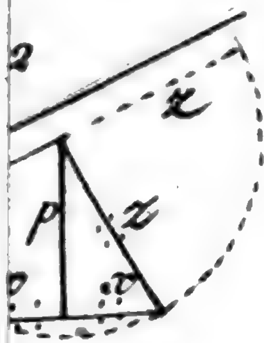

d
x 2 P
P
x

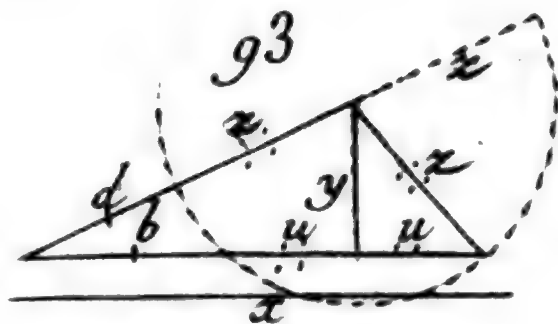

87
h
P
h
x
x
h

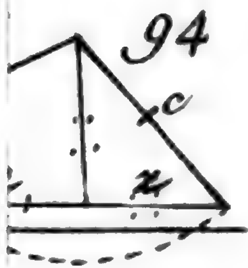

89
P
y
z

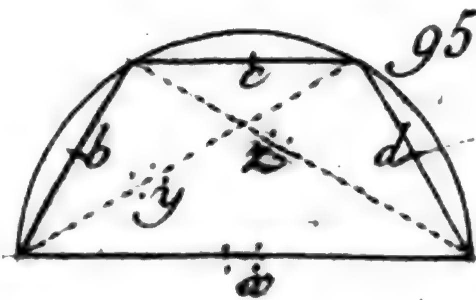

91
P
e
x


90
c
x
x
d
b

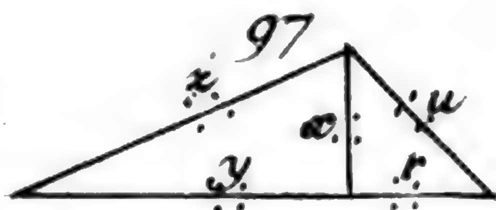

z
p
z
x

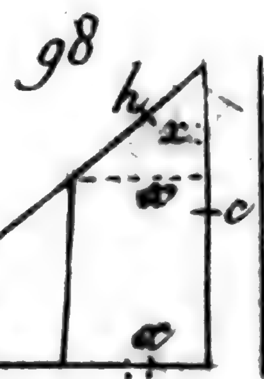

93
z
z
z
d
b
y
u
u
x

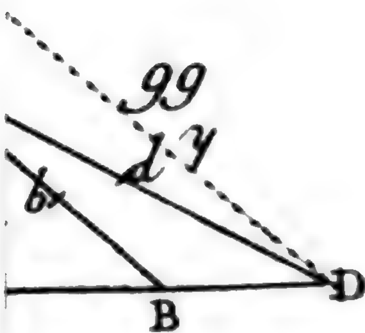

94
c
z

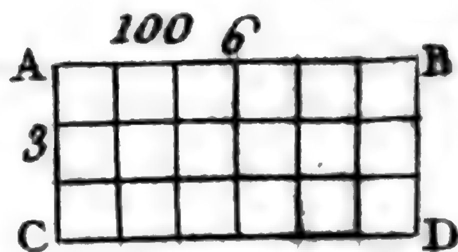

95
c
b
z
d
y
x

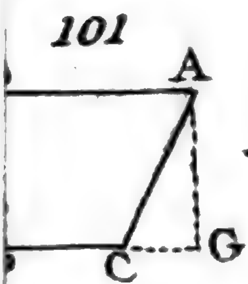
z

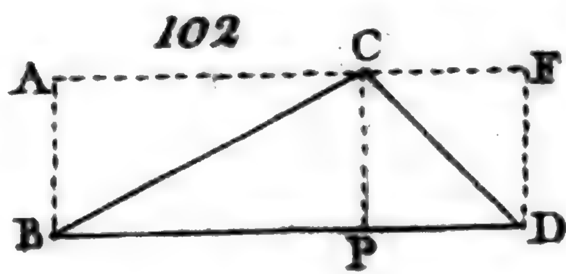

97
z
u
x
y
r

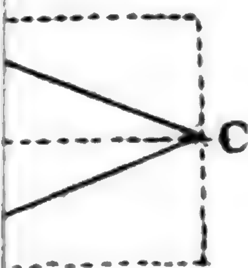

98
h
x
x
c
b
x

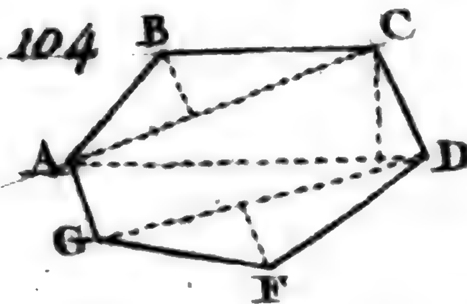

99
d
y
b
B
D

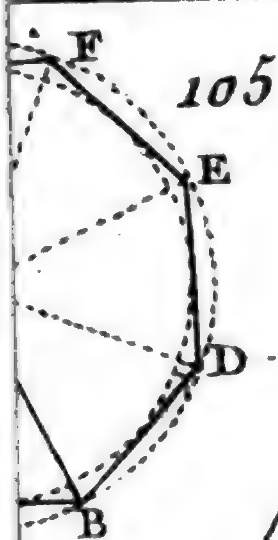

100
6
A
B
3
C
D

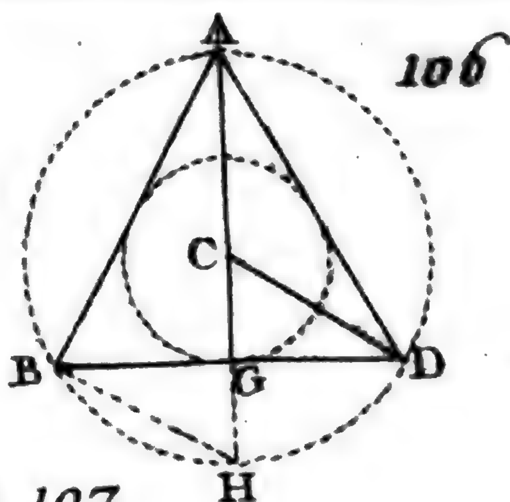

101
A
C
G

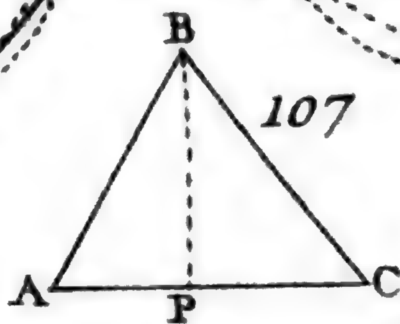

102
C
A
F
B
P
D

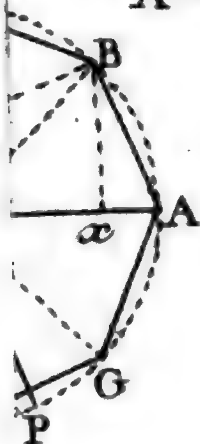

C

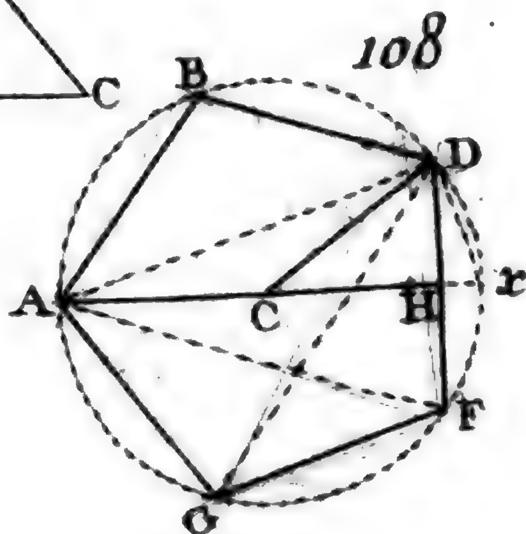

104
B
C
A
D
G
F

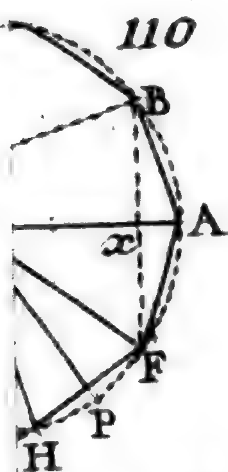

F
105
E
D
B

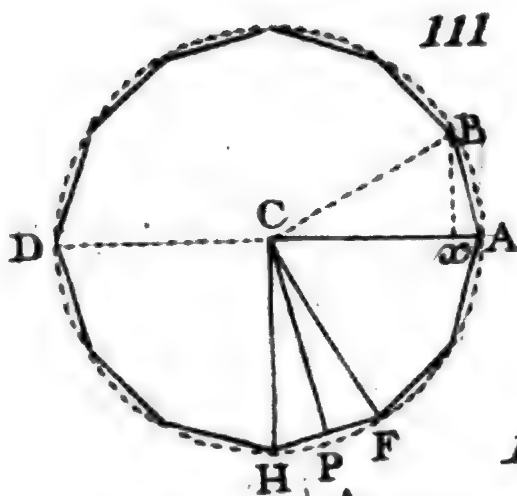

A
106
C
B
G
D
H

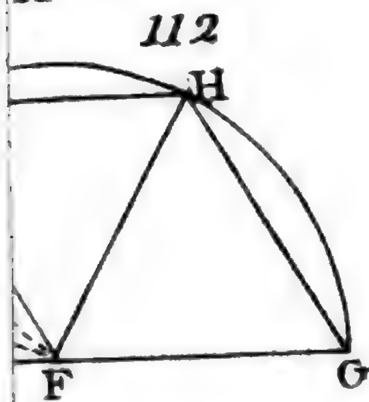

B
107
A
P
C

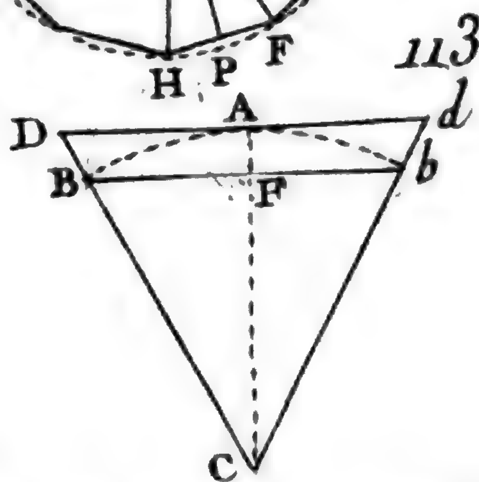

B
x
A
G
P

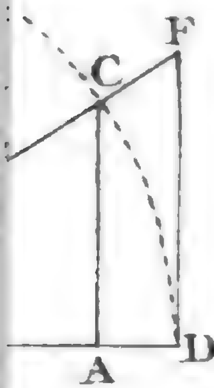

108
B
D
A
C
H
x
F
G

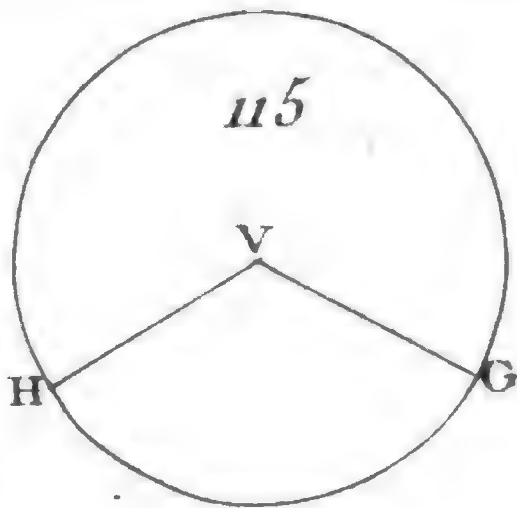

110
B
x
A
F
P
H

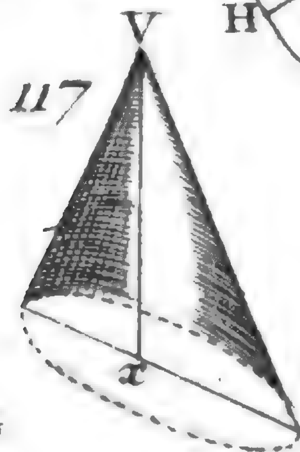

111
B
D
C
x
A
H
P
F

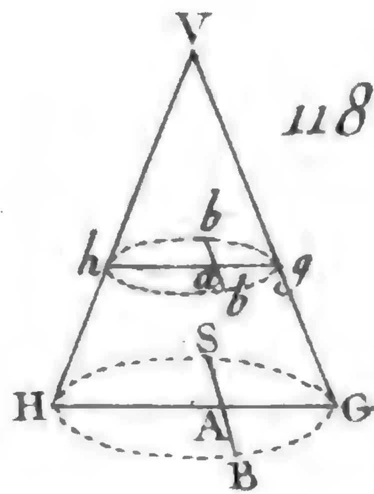

112
H
F
G

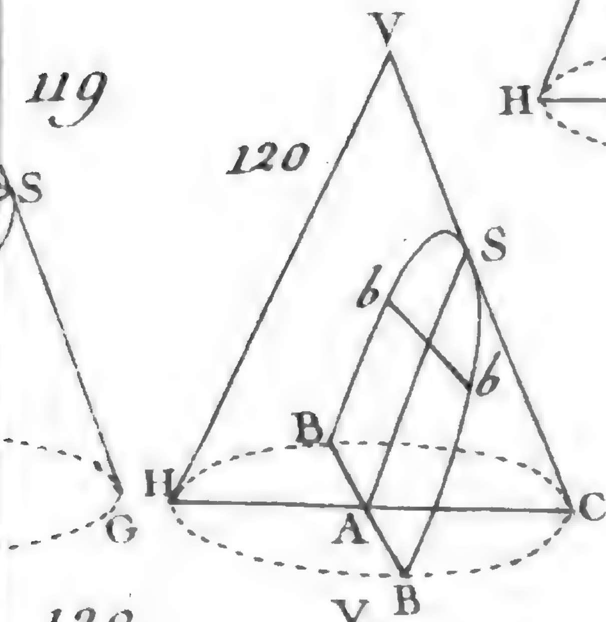

113
D
A
d
B
F
b
C

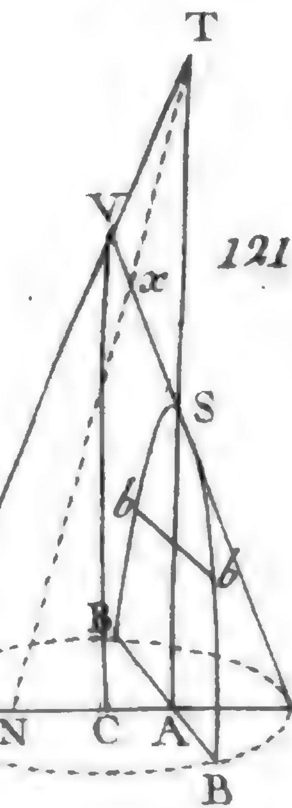

C
F
A
D

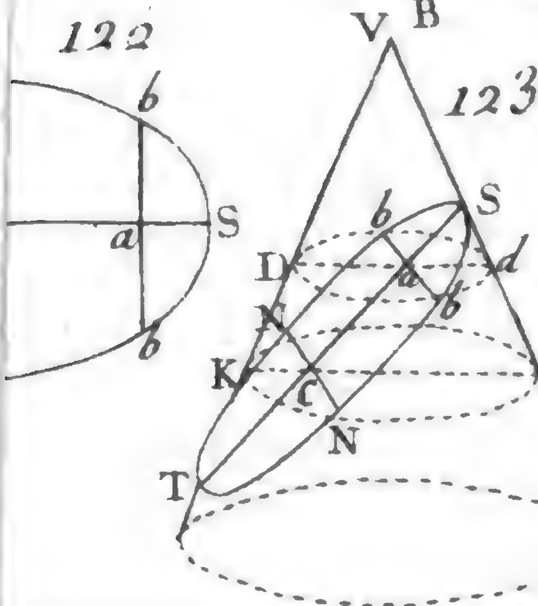

115
V
H
G

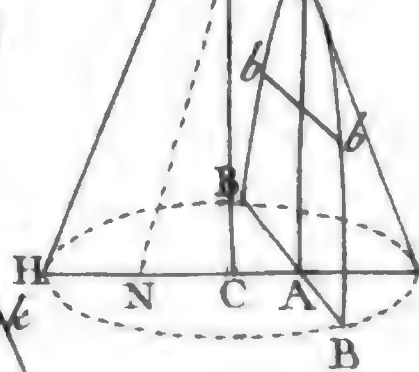

V
117
x
G

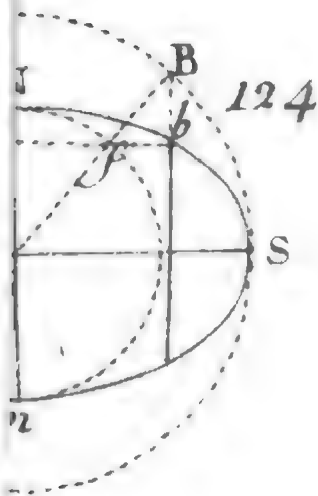

V
118
b
h
a
b
g
S
H
A
G
B

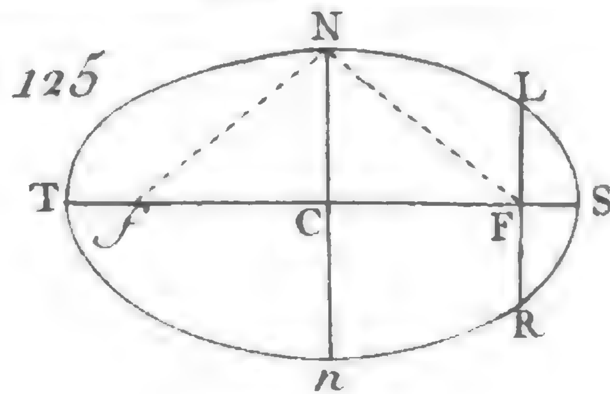

119
S
G
V
120
S
b
b
B
H
A
C
B

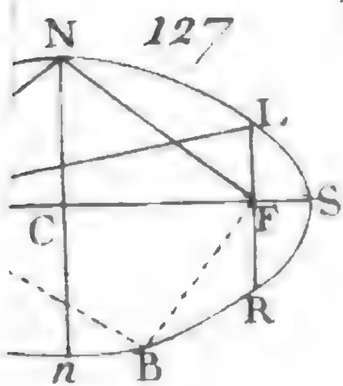

T
V
x
121
S
b
b
B
H
N
C
A
B

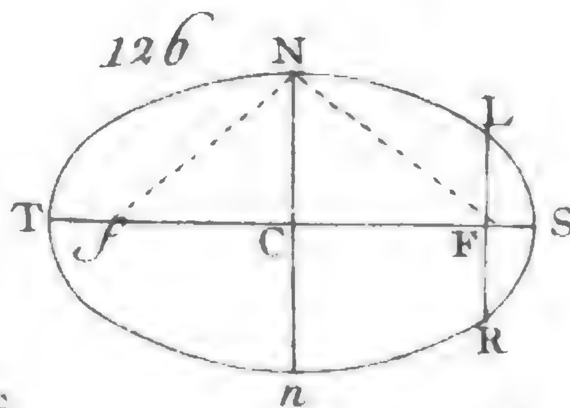

122
b
a
S
b
V
123
S
b
D
a
d
b
N
K
c
k
N
T

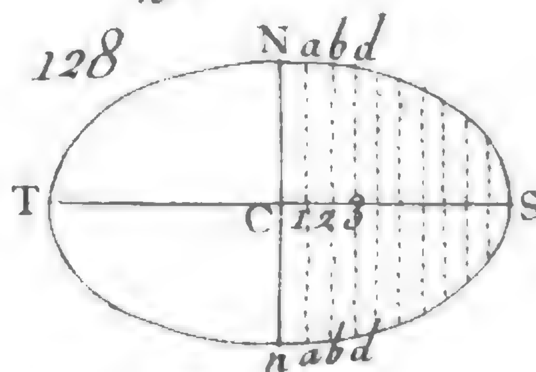


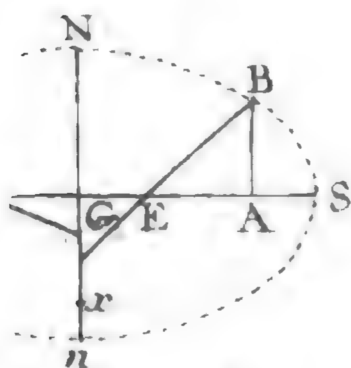

124
B
b
f
S
n

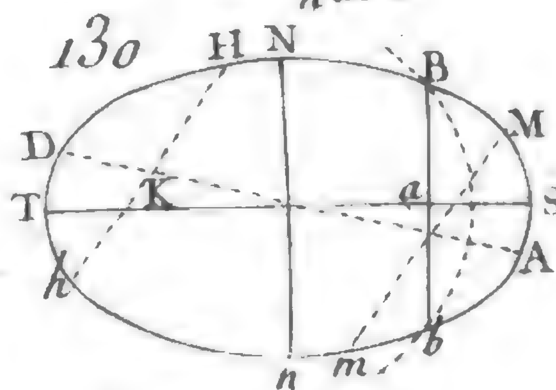

125
N
L
T
f
C
F
S
R
n

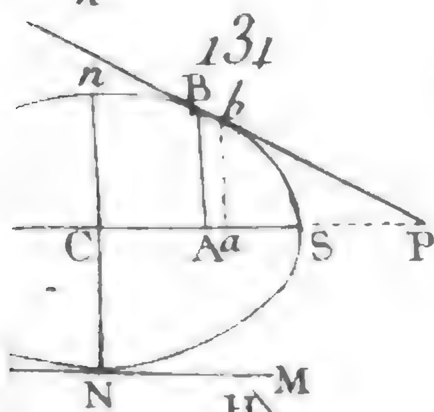

127
N
L
C
F
S
R
n
B

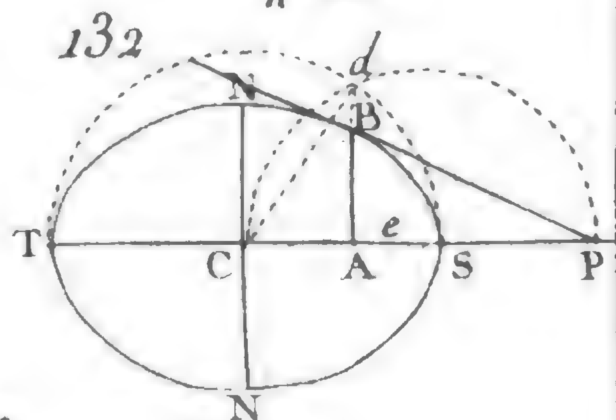

126
N
L
T
f
C
F
S
R
n

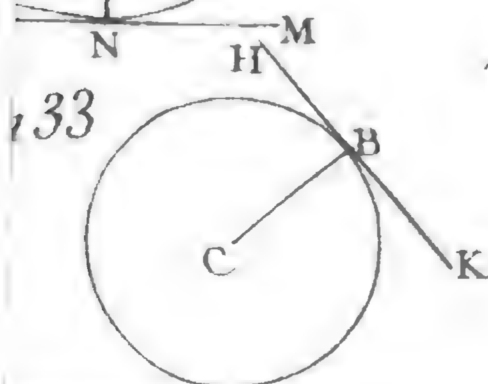

128
N a b d
T
C 1 2 3
S
n a b d

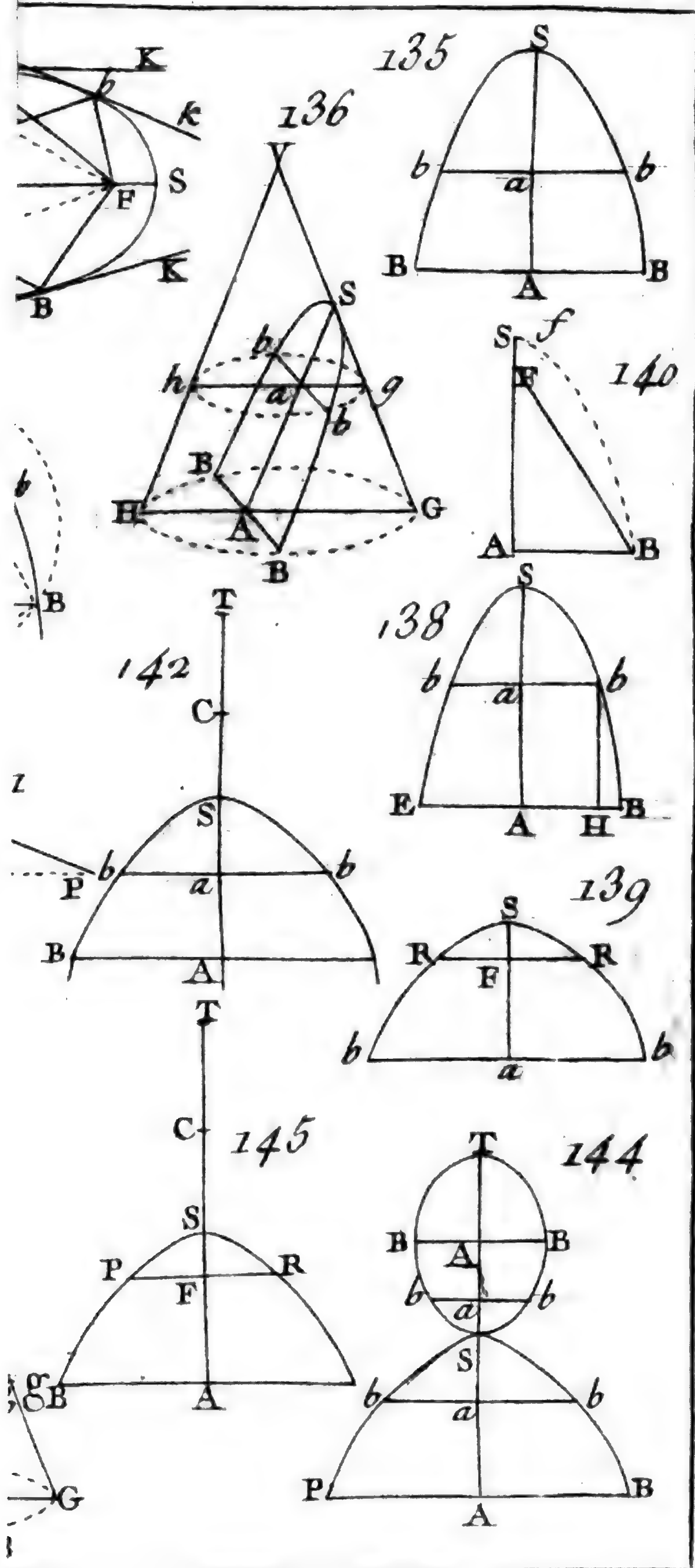

N
B
G
E
A
S
r
n


130
H
N
B
M
D
K
a
S
T
A
h
n
m
b


131
n
B
b
C
A
a
S
P
N
M

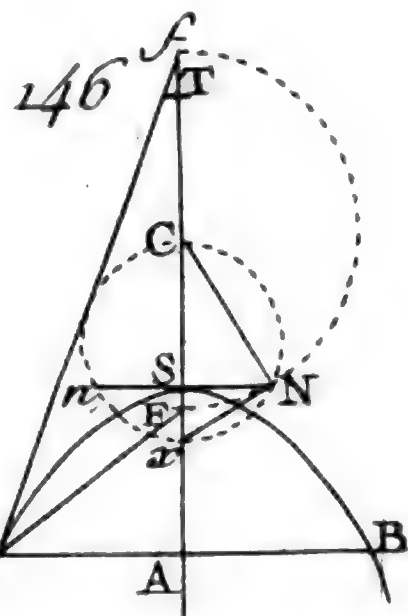

132
N
d
B
e
T
C
A
S
P
N

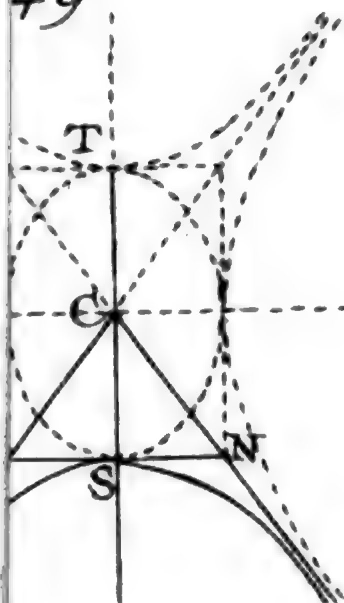

133
H
B
C
K

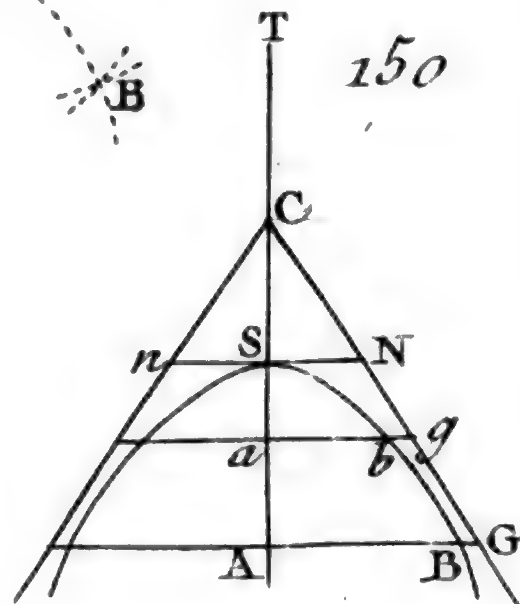

135
136
140
138
142
139
145
144

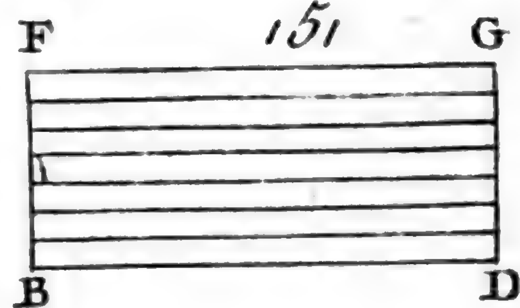
T
S
b
B

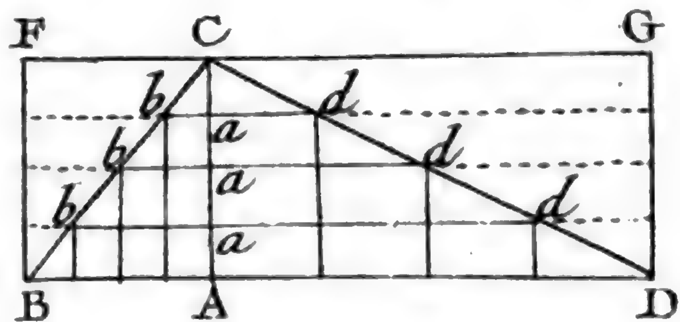
147
f
T
S
F
B
B

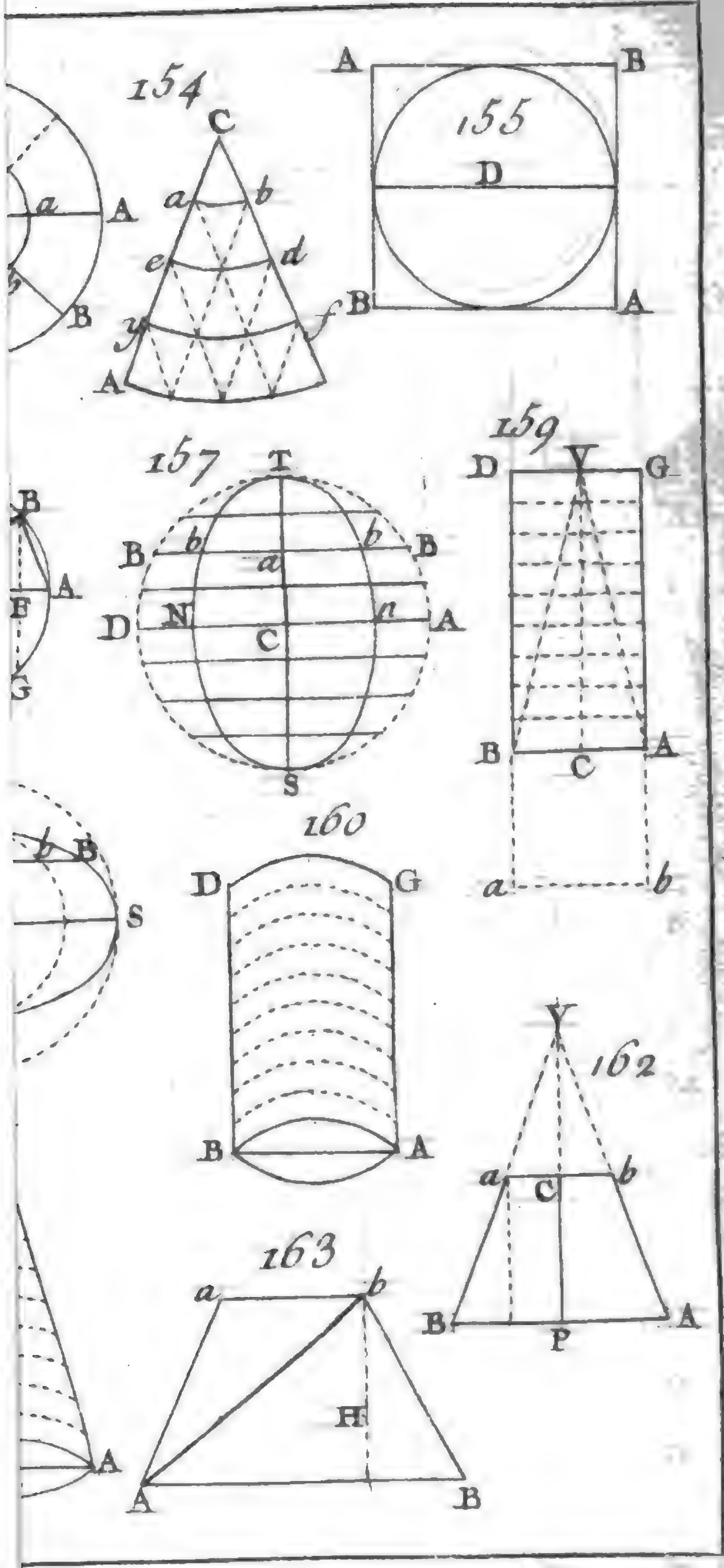

146
f
T
C
S
n
N
F
x
B
B
A

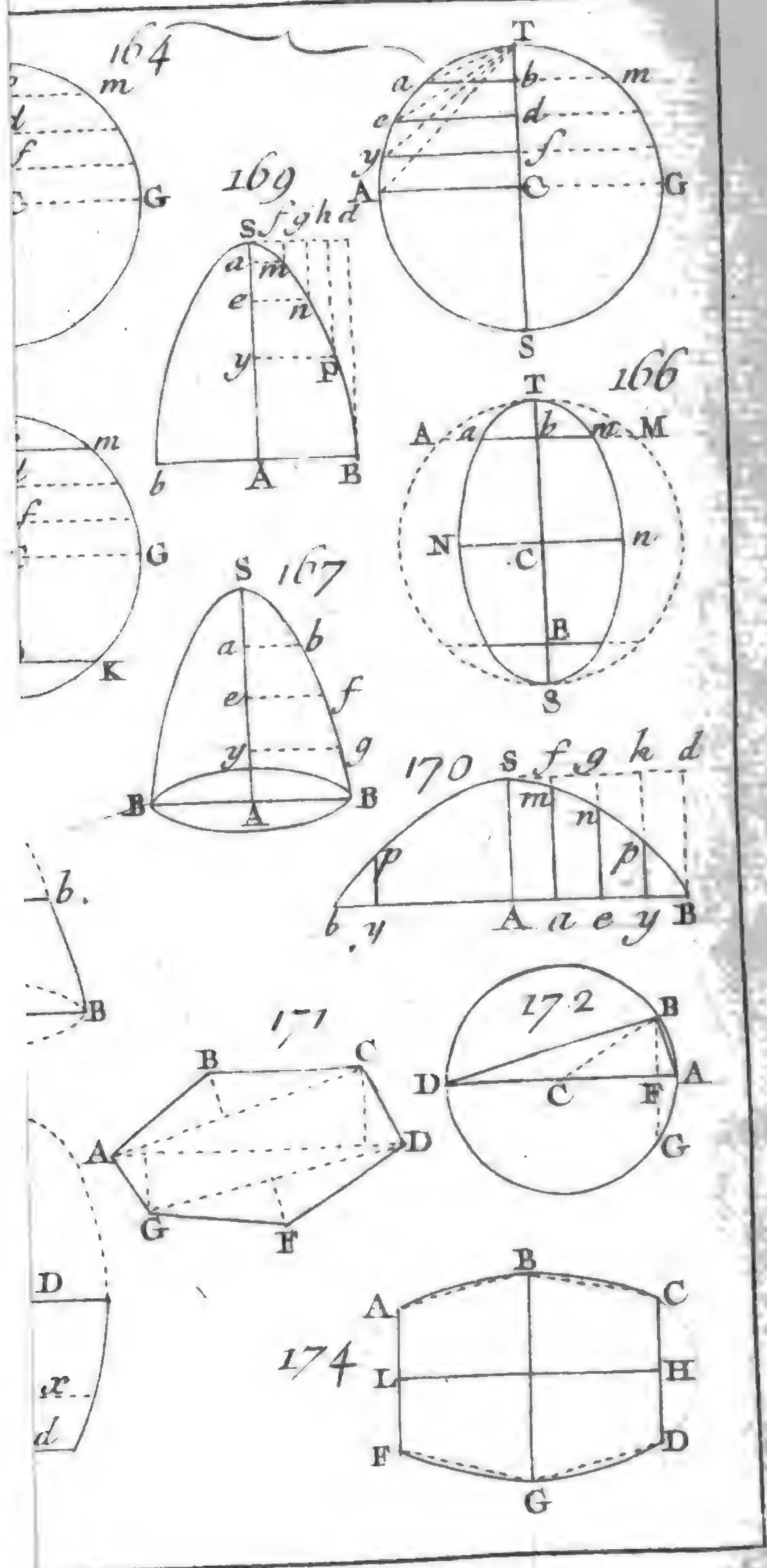

49
T
C
N
S


T
150
C
n
S
N
a
b
g
A
B
G


F
151
G
B
D


F
C
G
b
b
b
d
d
d
a
a
a
B
A
D


154
C
a
b
e
d
y
f
A
155
A
B
D
B
A
157
T
B
b
b
B
a
D
N
n
A
C
S
159
D
V
G
B
C
A
a
b
160
D
G
B
A
162
V
a
C
b
B
P
A
163
a
b
H
A
B
a
A
B
B
F
A
G
b
B
S
A


164
169
166
167
170
171
172
174